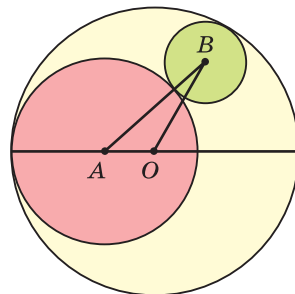


Гімнастыка розуму

Дыяметр акружнасці з цэнтрам у пункце O роўны 24 см (рыс. 348). Акружнасць з цэнтрам у пункце A датыкаецца да першай акружнасці ўнутраным чынам. Акружнасць з цэнтрам у пункце B датыкаецца да першай акружнасці ўнутраным, а да другой — знешнім чынам. Знайдзіце перыметр трохвугольніка ABO .



Рыс. 348



ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Азначэнне датычнай да акружнасці і сякучай.
2. Уласцівасць датычнай і прымету датычнай.
3. Уласцівасць датычных, праведзеных з аднаго пункта да акружнасці.
4. Уласцівасць акружнасці, упісанай у вугал.
5. Усе выпадкі ўзаемнага размяшчэння дзвюх акружнасцей.

Умеем

1. Даказваць прымету датычнай.
2. Даказваць тэарэму аб уласцівасці датычнай.
3. Даказваць тэарэму аб датычных, праведзеных з аднаго пункта да акружнасці.
4. Будаваць пры дапамозе цыркуля і лінейкі датычную да дадзенай акружнасці.

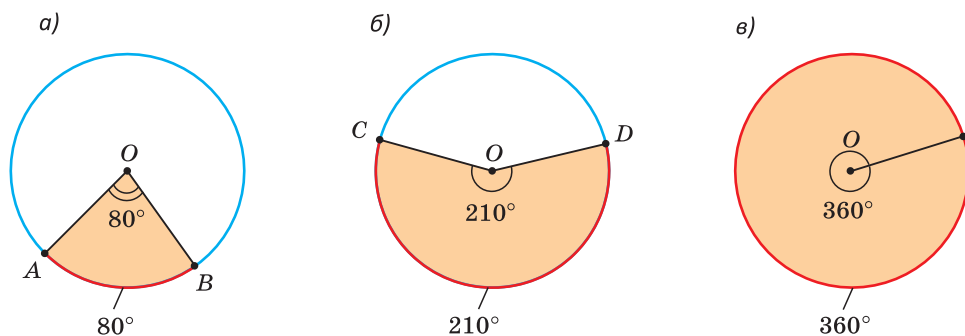
§ 27. Цэнтральны і ўпісаны вуглы

Азначэнне. Цэнтральным вуглом акружнасці называецца вугал, вяршыня якога знаходзіцца ў цэнтры акружнасці.

Дуга акружнасці, змешчаная ўнутры цэнтральнага вугла, і гэты цэнтральны вугал называюцца *адпаведнымі*.

Азначэнне. Градуснай мерай дугі акружнасці называецца градусная мера адпаведнага ёй цэнтральнага вугла.

На рысунку 349, а) паказаны цэнтральны вугал AOB , роўны 80° . Яму адпавядае дуга AB , змешчаная ўнутры вугла. Таму $\sphericalangle AB = 80^\circ$. На рысун-



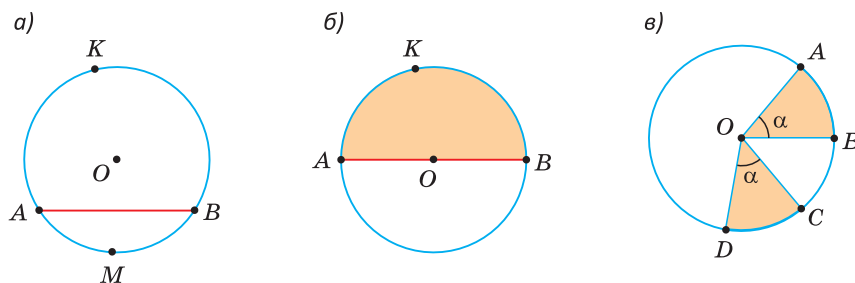
Рыс. 349

ку 349, б) цэнтральны вугал COD роўны 210° , дуга CD , якая яму адпавядае, таксама роўна 210° . Поўнаму цэнтральнаму вуглу (рыс. 349, в) адпавядае ўся акружнасць. Таму акружнасць змяшчае 360° . Цэнтральны вугал і адпаведная яму дуга могуць змяняцца ад 0° да 360° .

На рысунку 350, а) дугі AKB і AMB з'яўляюцца *дадатковымі* (дапаўняюць адна адну да акружнасці), таму сума іх градусных мер роўна 360° . Гавораць, што хорда AB *сцягвае* дугу AMB і дугу AKB .

На рысунку 350, б) дыяметр AB сцягвае паўакружнасць AKB , якая роўна 180° , паколькі ёй адпавядае цэнтральны вугал AOB , які з'яўляецца разгорнутым.

Дугі адной акружнасці або роўных акружнасцей называюцца *роўнымі*, калі роўныя іх градусныя меры. Большай лічыцца тая дуга, якая мае большую градусную меру. Калі $\angle AOB = \alpha$ і $\angle DOC = \alpha$ (рыс. 350, в), то $\cup AB = \cup DC$.



Рыс. 350

Адзначым, што акружнасць і любая яе дуга характарызуюцца і даўжынёй, і градуснай мерай. Гавораць «дуга акружнасці роўна 6 см», таксама гавораць «дуга акружнасці роўна 30° ». Даўжыня дугі прама прапарцыянальна яе градуснай меры. Дугі адной акружнасці, якія маюць роўныя градусныя меры, роўныя па даўжыні і наадварот.

А цяпер выканайце Тэст 1.

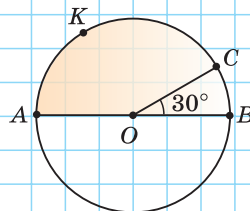
Тэст 1

Калі AB — дыяметр, O — цэнтр акружнасці, то:

а) $\sphericalangle CB = \dots^\circ$

б) $\sphericalangle AKC = \dots^\circ$

в) $\sphericalangle ABC = \dots^\circ$



Азначэнне. Упісаным вуглом называецца вугал, у якога вяршыня належыць акружнасці, а стораны перасякаюць акружнасць.

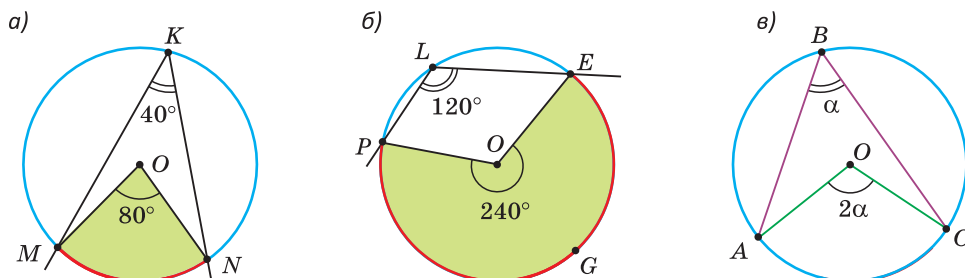
У азначэнні ўпісанага вугла маецца на ўвазе вугал, меншы за 180° .

На рысунку 351, а) $\angle MKN$ — упісаны. Яму адпавядае дуга MN , змешчаная ўнутры гэтага ўпісанага вугла, і цэнтральны $\angle MON$. Гавораць, што $\angle MKN$ і $\angle MON$ *абапіраюцца* на дугу MN .

На рысунку 351, б) $\angle PLE$ — упісаны. Яму адпавядае дуга PGE і цэнтральны вугал $\angle POE$, большы за 180° , які змяшчае гэту дугу.

Любы ўпісаны вугал у 2 разы меншы за адпаведны цэнтральны вугал і дугу, на якую ён абапіраецца. Калі $\angle MKN = 40^\circ$, то $\angle MON = \sphericalangle MN = 80^\circ$, калі $\angle PLE = 120^\circ$, то $\angle POE = \sphericalangle PGE = 240^\circ$.

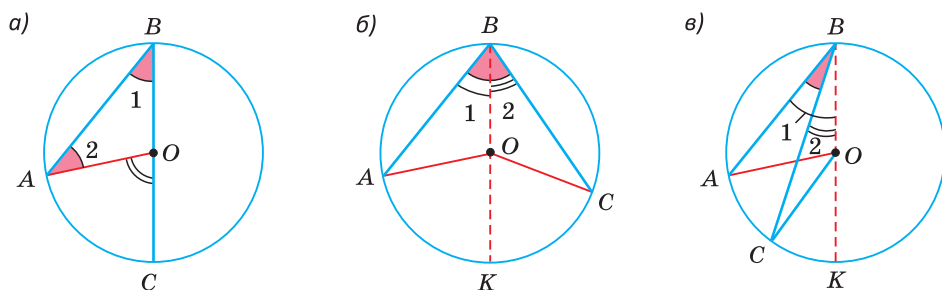
Інакш кажучы, $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} \sphericalangle AC$ (рыс. 351, в). Дакажам гэта сцверджанне.



Рыс. 351

Тэарэма (аб упісаным вугле).

Упісаны вугал роўны палавіне адпаведнага яму цэнтральнага вугла, а таксама палавіне дугі, на якую ён абапіраецца.



Рыс. 352

Доказ. Разгледзім тры выпадкі.

а) Няхай цэнтр O акружнасці ляжыць на старане BC упісанага вугла ABC (рыс. 352, а). Тады BC — дыяметр, $OA = OB$ як радыусы, $\triangle AOB$ — раўнабедраны, $\angle 1 = \angle 2$ як вуглы пры яго аснове; $\angle AOC$ — знешні для $\triangle AOB$. Па ўласцівасці знешняга вугла трохвугольніка $\angle AOC = \angle 1 + \angle 2 = 2\angle ABC$, адкуль $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\sphericalangle AC$.

б) Няхай цэнтр O акружнасці ляжыць унутры ўпісанага вугла ABC (рыс. 352, б). Правядзём дыяметр BK . Па даказаным у п. а) $\angle 1 = \frac{1}{2}\sphericalangle AK$, $\angle 2 = \frac{1}{2}\sphericalangle KC$, тады $\angle ABC = \angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2}(\sphericalangle AK + \sphericalangle KC) = \frac{1}{2}\sphericalangle AC = \frac{1}{2}\angle AOC$.

в) Няхай цэнтр O акружнасці ляжыць па-за ўпісаным вуглом ABC (рыс. 352, в). Правядзём дыяметр BK . Па даказаным у п. а) $\angle 1 = \frac{1}{2}\sphericalangle AK$, $\angle 2 = \frac{1}{2}\sphericalangle CK$, тады $\angle ABC = \angle 1 - \angle 2 = \frac{1}{2}(\sphericalangle AK - \sphericalangle CK) = \frac{1}{2}\sphericalangle AC = \frac{1}{2}\angle AOC$.

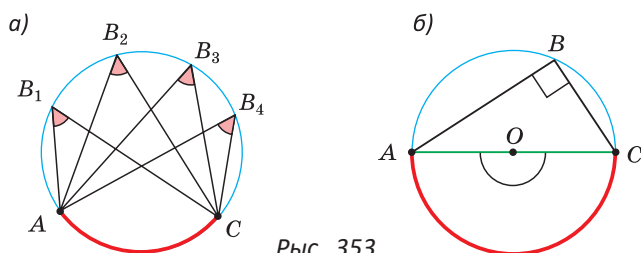
Тэарэма даказана.

Вынікі.

1. Упісаныя вуглы, якія абapіраюцца на адну і тую ж дугу, роўныя паміж сабой.

2. Упісаны вугал, які абapіраецца на дыяметр, — прамы. І наадварот, калі ўпісаны вугал — прамы, то ён абapіраецца на дыяметр.

На рысунку 353, а) $\angle AB_1C = \angle AB_2C = \angle AB_3C = \angle AB_4C$, паколькі ўсе гэтыя ўпісаныя вуглы абapіраюцца на агульную дугу AC , а, значыць, іх градусныя меры роўны палавіне градуснай меры дугі AC .



Рыс. 353

На рысунку 353, б) упісаны вугал ABC абাপіраецца на дыяметр AC . Паколькі адпаведны вуглу ABC цэнтральны вугал AOC — разгорнуты, а адпаведная дуга AC з'яўляецца паўакружнасцю, то $\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$.

А цяпер выканайце **Тэст 2**.

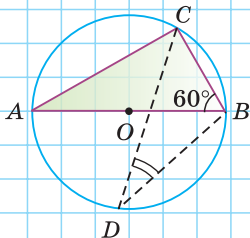
Тэст 2

Калі AB — дыяметр, $\angle ABC = 60^\circ$, то:

а) $\angle ACB = \dots$

б) $\angle CAB = \dots$

в) $\angle CDB = \dots$

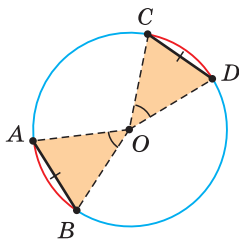


Заданні да § 27

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. Даказаць, што роўныя хорды адной акружнасці сцягваюць роўныя дугі (размова ідзе пра дугі, адначасова меншыя (большыя) за паўакружнасць).

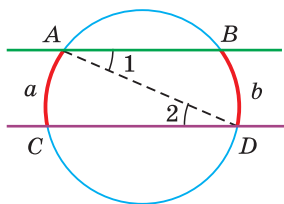


Рыс. 354

Доказ. Няхай хорды AB і CD роўныя (рыс. 354). Гэтыя хорды сцягваюць адпаведна дугі AB і CD . Паколькі $\triangle AOB = \triangle COD$ па трох старанах ($OA = OB = OC = OD$ як радыусы адной акружнасці), то $\angle AOB = \angle COD$. Адсюль вынікае, што $\cup AB = \cup CD$. Што і трэба было даказаць.

Заўвага. Сфармулюйце і дакажыце адваротнае сцверджанне.

Задача 2. Даказаць, што дугі, змешчаныя паміж паралельнымі сякучымі да акружнасці, роўныя паміж сабой.



Рыс. 355

Доказ.

Няхай $AB \parallel CD$ (рыс. 355). Правядзём хорду AD . Вуглы 1 і 2 роўныя як накрыжлеглыя пры паралельных прамых.

З роўнасці ўпісаных вуглоў вынікае роўнасць дуг, на якія яны абাপіраюцца, г. зн. $\cup AC = \cup BD$.

Што і трэба было даказаць.

Задача 3. Даказаць тэарэму: «Вугал паміж датычнай і хордай, якая выходзіць з пункта дотыку, вымяраецца палавінай дугі, змешчанай унутры вугла».

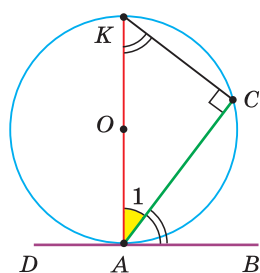


Рис. 356

Доказ. Няхай DB — датычная да акружнасці з цэнтрам у пункце O , дзе A — пункт дотыку, AC — хорда. Дакажам, што $\angle CAB = \frac{1}{2} \cup AC$ (рыс. 356).

Правядзём дыяметр AK . Па ўласцівасці датычнай $\angle KAB = 90^\circ$ і $\angle CAB$ дапаўняе $\angle 1$ да 90° . З другога боку, $\angle C = 90^\circ$ як упісаны вугал, які абпіраецца на дыяметр, таму $\angle AKC$ таксама дапаўняе $\angle 1$ да 90° . Таму $\angle CAB = \angle AKC$. Але $\angle AKC = \frac{1}{2} \cup AC$. Адкуль $\angle CAB = \frac{1}{2} \cup AC$. Што і трэба было даказаць.

Выпадкі, калі вугал паміж хордай і датычнай прамы ($\angle BAK$) або тупы ($\angle CAD$), разгледзьце самастойна.

Заўвага. Карысна запомніць уласцівасць: «Вугал паміж датычнай і хордай, якая выходзіць з пункта дотыку, роўны ўпісанаму вуглу, які абпіраецца на дугу, змешчаную паміж датычнай і хордай» (рыс. 357).

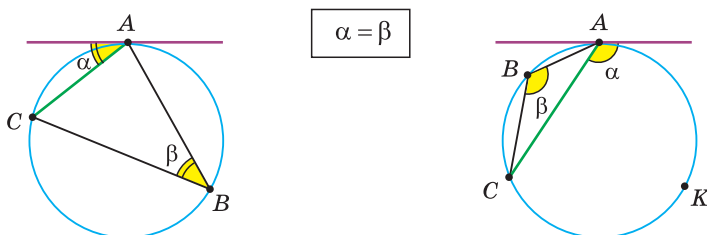


Рис. 357

Задача 4. Даказаць наступныя сцверджанні: а) дыяметр, перпендыкулярны да хорды, дзеліць хорду і дугі, якія яна сцягвае, папалам (рыс. 358, а); б) дыяметр, праведзены праз сярэдзіну хорды, якая не з'яўляецца дыяметрам, перпендыкулярны да гэтай хорды і дзеліць дугі, якія яна сцягвае, папалам; в) сярэдзінны перпендыкуляр да хорды праходзіць праз цэнтр акружнасці і дзеліць дугі, якія сцягвае хорда, папалам.

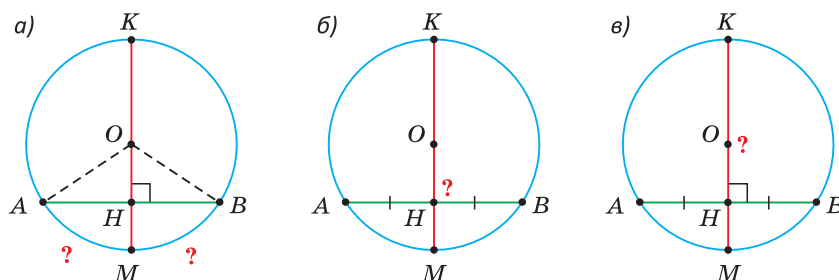


Рис. 358

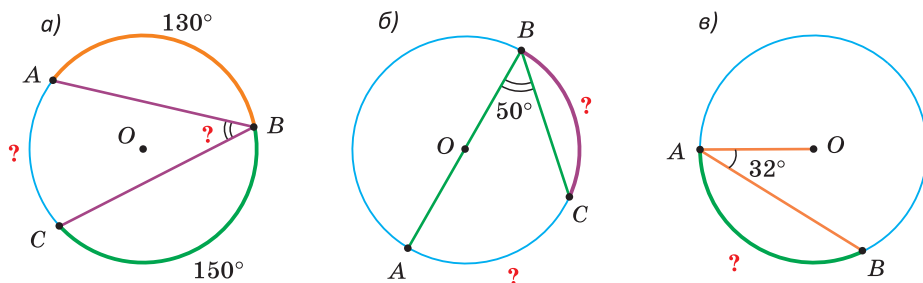
Доказ. а) Трохвугольнік AOB — раўнабедраны ($OA = OB$ як радыусы), а яго вышыня OH , праведзеная да асновы AB , з'яўляецца медыянай і бісектрысай (гл. рыс. 358, а). Таму $AH = HB$, $\angle AOM = \angle BOM$, $\sphericalangle AM = \sphericalangle BM$. Сцверджанні б) і в) дакажыце самастойна (рыс. 358, б, в).



РАШАЕМ САМАСТОЙНА

380. Нарысуйце акружнасць, пабудуйце цэнтральны вугал AOB і ўпісаны вугал AKB , якія абাপіраюцца на тую ж дугу, калі цэнтральны вугал роўны: а) 60° ; б) 90° ; в) 120° ; г) 270° . Запішыце, колькі градусаў змяшчаюць у кожным выпадку ўпісаны вугал і адпаведная дуга.

381. Па даных на рысунках 359, а)—в) знайдзіце градусную меру вугла або дугі, якія абазначаны пыталінікамі (O — цэнтр акружнасці).



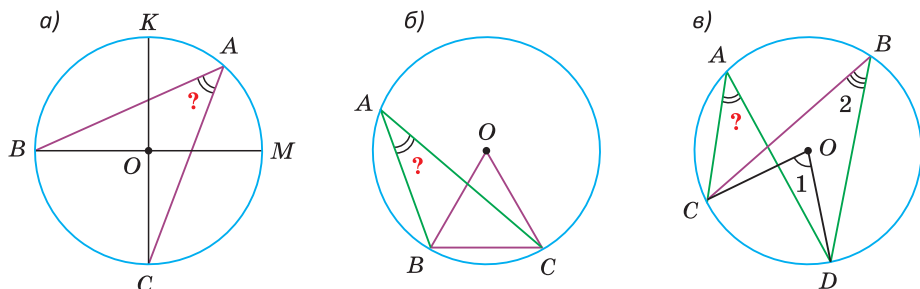
Рыс. 359

382. Радыус акружнасці роўны 24 см. Знайдзіце даўжыню хорды, якая сцягвае дугу, роўную:

- а) 60° ; б) 90° ; в) 180° ; г) 300° .

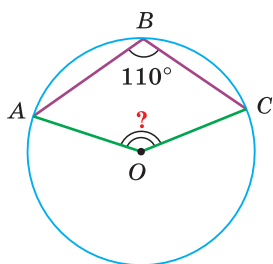
383. На рысунках 360, а)—в) O — цэнтр акружнасці. Знайдзіце вугал A , калі:

- а) $BM \perp KC$; б) $\triangle BOC$ — роўнастаронні; в) $\angle 1 + \angle 2 = 126^\circ$.

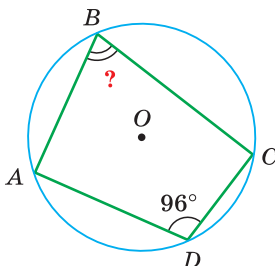


Рыс. 360

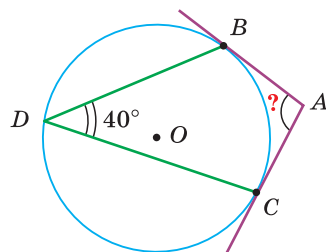
- 384.** Пункты A , B і C ляжаць на акружнасці і з'яўляюцца вяршынямі раўнабедранага трохвугольніка ABC з асновай AC і вуглом пры вяршыні, роўным 78° . Знайдзіце градусныя меры дуг AB , BC і AC , якія змяшчаюцца ўнутры вуглоў трохвугольніка ABC .
- 385.** а) Упісаны вугал ABC на 32° меншы за адпаведны цэнтральны вугал AOC . Знайдзіце цэнтральны вугал AOC .
 б) Цэнтральны і адпаведны яму ўпісаны вугал разам складаюць $63^\circ 12'$. Знайдзіце гэтыя вуглы.
 в) Упісаны вугал, адпаведны яму цэнтральны вугал і дуга, на якую гэтыя вуглы абапіраюцца, разам складаюць 200° . Знайдзіце градусныя меры гэтых вуглоў і дугі.
- 386.** Пункт O — цэнтр акружнасці (рыс. 361), $\angle B = 110^\circ$. Знайдзіце $\angle AOC$.
- 387.** Па даных на рысунку 362 знайдзіце велічыню вугла B .
- 388.** Акружнасць упісана ў вугал BAC , B і C — пункты дотыку прамых AB і AC да акружнасці (рыс. 363). Вугал BDC роўны 40° . Знайдзіце велічыню вугла A .



Рыс. 361

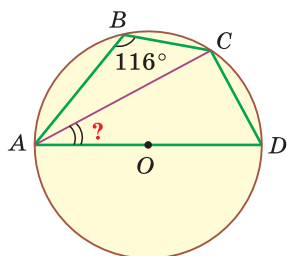


Рыс. 362

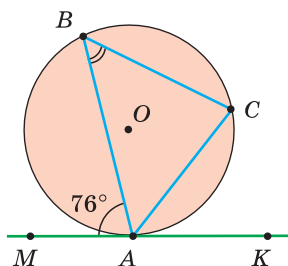


Рыс. 363

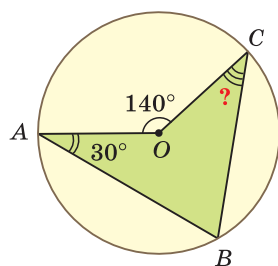
- 389.** а) У акружнасці, радыус якой роўны 10 см, праведзена хорда даўжынёй 16 см. Знайдзіце адлегласць ад цэнтра акружнасці да прамой, якая змяшчае гэту хорду.
 б) Хорда акружнасці роўна 24 см, адлегласць ад цэнтра акружнасці да прамой, якая змяшчае хорду, роўна 5 см. Знайдзіце дыяметр акружнасці.
 в) У акружнасці, радыус якой 5 см, праведзены дзве паралельныя хорды даўжынёй 6 см і 8 см з розных бакоў ад цэнтра. Знайдзіце адлегласць паміж хордамі.
- 390.** а) Дакажыце, што дуга акружнасці, роўная 60° , сцягваецца хордай, роўнай радыусу акружнасці.
 б) Дакажыце, што ўпісаны вугал, роўны 30° , абапіраецца на хорду, роўную радыусу акружнасці.
- 391.** Дадзены акружнасць з цэнтрам O і радыусам R і ўпісаны ў яе вугал ABC . Знайдзіце плошчу трохвугольніка AOC , калі:
 а) $\angle ABC = 30^\circ$, $R = 4$ см; б) $\angle ABC = 45^\circ$, $AC = 8\sqrt{2}$ см.



Рыс. 364



Рыс. 365



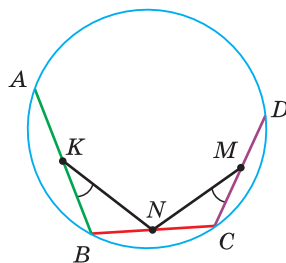
Рыс. 366

- 392.** Пункт O з'яўляецца цэнтрам акружнасці (рыс. 364), $\angle ABC = 116^\circ$. Знайдзіце $\angle CAD$.
- 393.** Прамая MK датыкаецца да акружнасці ў пункце A , $\angle BAM = 76^\circ$, AC — бісектрыса вугла BAK (рыс. 365). Знайдзіце $\angle ABC$.
- 394.** Акружнасць датыкаецца да стараны AC трохвугольніка ABC у пункце K , праходзіць праз яго вяршыню B і перасякае стараны AB і BC адпаведна ў пунктах M і N , $\angle CKN = 40^\circ$, $\angle AKM = 60^\circ$, $\angle A = 50^\circ$. Знайдзіце $\angle C$.
- 395.** а) Дакажыце, што прамы ўпісаны вугал абавязкова на дыяметр.
 б) На акружнасці радыусам 9 см адзначаны пункты A , B і C такія, што $\angle BAC = 52^\circ$, $\angle ACB = 38^\circ$. Знайдзіце даўжыню хорды AC .
 в) Вяршыні трохвугольніка ABC належаць акружнасці, радыус якой роўны 8,5 см, $\angle A + \angle B = 90^\circ$, $AC = 8$ см. Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC .
- 396.** Хорда AC акружнасці роўна 6 см і сцягвае дугу AC , роўную 60° . Хорда AB праходзіць праз цэнтр акружнасці. Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC .
- 397.** Дакажыце, што акружнасць, пабудаваная на бакавой старане раўнабедранага трохвугольніка як на дыяметры, праходзіць праз сярэдзіну асновы.

 **398.** Па даных на рысунку 366 знайдзіце $\angle BCO$, дзе O — цэнтр акружнасці.

 **399.** У акружнасці праведзены тры адвольныя хорды AB , BC і CD (рыс. 367). Пункты K , N і M — адпаведна сярэдзіны дадзеных хорд. Дакажыце, што $\angle BKN = \angle CMN$.

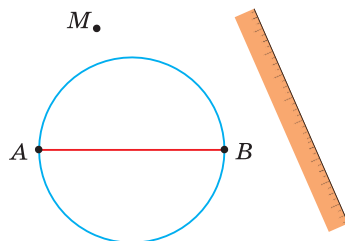
 **400.** Знайдзіце геаметрычнае месца сярэдзін хорд акружнасці, праведзеных з аднаго пункта акружнасці.



Рыс. 367

Гімнастыка розуму

На плоскасці паказана акружнасць, яе дыяметр AB і пункт M па-за акружнасцю (рыс. 368). Пры дапамозе аднабаковай лінейкі апусціце перпендыкуляр з пункта M на дыяметр. (Аднабаковая лінейка без дзяленняў дазваляе праводзіць толькі прамыя лініі.)



Рыс. 368



ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

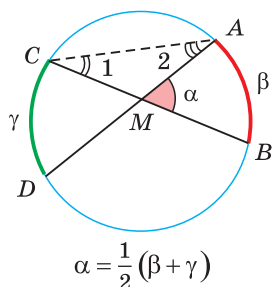
1. Азначэнне ўпісанага і цэнтральнага вуглоў.
2. Як вызначаецца градусная мера дугі акружнасці і колькі градусаў змяшчае ўся акружнасць.
3. Тэарэму аб упісаным і цэнтральным вуглах акружнасці.
4. Уласцівасць упісаных вуглоў, якія абавіраюцца на адну і тую ж дугу.
5. Уласцівасць упісанага вугла, які абавіраецца на дыяметр.
6. Чаму роўны вугал паміж хордай і датычнай, якія маюць агульны пункт на акружнасці.

Умеем

1. Даказваць тэарэму аб тым, што ўпісаны вугал роўны палавіне адпаведнага цэнтральнага вугла.
2. Даказваць тэарэму аб вугле паміж хордай і датычнай.

§ 28. Вуглы, утвораныя хордамі, сякучымі і датычнымі

Тэарэма. Вугал паміж хордамі, якія перасякаюцца, роўны паўсуме дуг, змешчаных унутры дадзенага вугла і вугла, вертыкальнага дадзенаму, г. зн. $\alpha = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$ (рыс. 369).



$$\alpha = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$$

Рыс. 369

Доказ. Трэба даказаць, што вугал AMB роўны паўсуме $\cup AB = \beta$ і $\cup CD = \gamma$ (гл. рыс. 369). Правядзём хорду AC . Для $\triangle AMC$ вугал AMB — знешні, таму $\angle AMB = \angle 1 + \angle 2$. Але вуглы 1 і 2 — упісаныя. Па ўласцівасці ўпісанага вугла $\angle 1 = \frac{1}{2}\cup AB$, $\angle 2 = \frac{1}{2}\cup CD$.

$$\text{Тады } \angle AMB = \frac{1}{2}\cup AB + \frac{1}{2}\cup CD = \frac{1}{2}(\beta + \gamma).$$

Тэарэма даказана.