§ 1. Многоугольник

Определение. **Многоугольником** называется простая замкнутая ломаная вместе с частью плоскости, которую она ограничивает.

Вершины этой ломаной называются *вершинами многоугольника*, ее звенья — *сторонами многоугольника*. *Периметром многоугольника* называется сумма длин его сторон. По свойству ломаной длина любой стороны многоугольника меньше суммы длин оставшихся сторон.

Определение. Многоугольник называется **выпуклым**, если он лежит в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей любую его сторону. В противном случае он называется **невыпуклым**.

На рисунке 1, *а*) изображен выпуклый пятиугольник $ABCDE$, на рисунке 1, *б*) — невыпуклый четырехугольник $ABCD$ (вершины A и B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой CD). Фигура, изображенная на рисунке 1, *в*), не является многоугольником, так как ломаная $ABCDEC$ непростая.

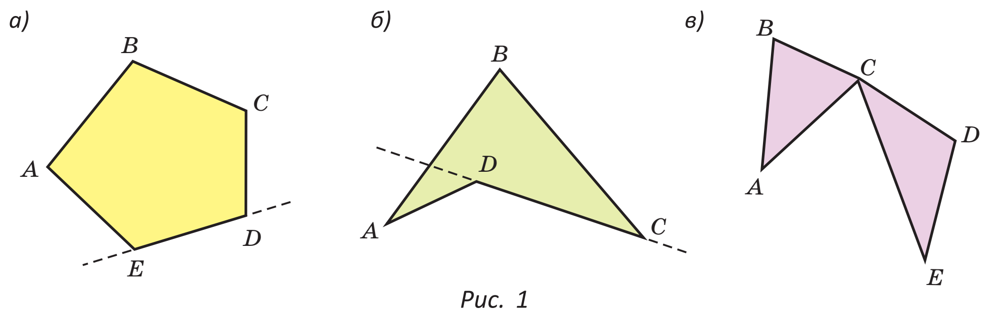


Рис. 1

Стороны многоугольника, имеющие общую вершину, называются *соседними сторонами*; вершины, являющиеся концами одной стороны, — *соседними вершинами*, а углы при этих вершинах — *соседними углами* многоугольника. При этом *углом выпуклого многоугольника* (иногда говорят *внутренним углом*) называется угол между соседними сторонами, содержащий этот многоугольник.

Например, на рисунке 1, *а*) стороны AB и BC — соседние, вершины A и B — соседние, $\angle A$ и $\angle B$ — соседние углы.

Каждый угол выпуклого многоугольника меньше 180°. Невыпуклый многоугольник имеет, по крайней мере, один угол, больший 180°.

Определение. **Диагональю** многоугольника называется отрезок, который соединяет две несоседние вершины многоугольника.

У любого четырехугольника четыре стороны, четыре вершины, четыре внутренних угла, две диагонали. Две несоседние стороны называются *противоположными* (или *противолежащими*) сторонами, две несоседние вершины — *противоположными вершинами*, а углы при этих вершинах — *противоположными углами* четырехугольника.

У четырехугольника $ABCD$ (рис. 2, *а*) стороны AB и CD, AD и BC — противоположные, вершины A и C, B и D, а также углы при этих вершинах — противоположные. Отрезки AC и BD — диагонали четырехугольника $ABCD$. Диагональ AC разбивает четырехугольник $ABCD$ на два треугольника ABC и ADC (рис. 2, *б*).

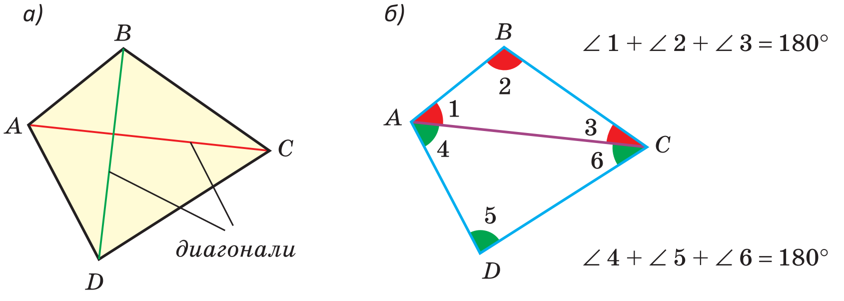


Рис. 2

Сумма углов четырехугольника $ABCD$ равна сумме углов этих треугольников. Так как сумма углов треугольника равна 180°, то *сумма углов четырехугольника равна* $180° \cdot 2$, то есть 360°.

Многоугольник, у которого n сторон, имеет n вершин, n углов и называется *n-угольником*. Выведем формулу, позволяющую находить сумму углов любого выпуклого n-угольника.

Теорема (о сумме углов n-угольника).
Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°(n - 2)$.

Дано: $A_1A_2...A_n$ — выпуклый n-угольник.
Доказать: $\angle A_1 + \angle A_2 + ... + \angle A_n = 180°(n - 2)$.

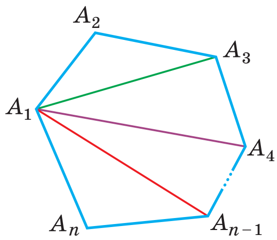


Рис. 3

Доказательство. Проведем из вершины A_1 диагонали A_1A_3, A_1A_4, ..., A_1A_{n-1} (рис. 3). Наш n-угольник разобьется на $n - 2$ треугольника (без учета сторон A_1A_2 и A_1A_n останется $n - 2$ стороны, и на каждую придется по одному треугольнику). В каждом треугольнике сумма углов равна 180°. Сумма всех углов полученных треугольников равна сумме углов данного n-угольника, т. е. $\angle A_1 + \angle A_2 + \ldots + \angle A_n = 180°(n - 2)$.

Теорема доказана.

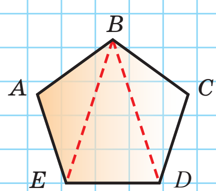
Замечание. Теорема справедлива и для невыпуклого многоугольника.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2.**

Тест 1

Найдите сумму углов 5-угольника, используя разбиение его на треугольники.

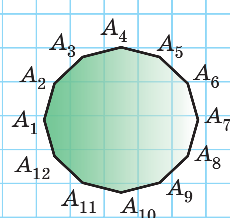
а) 360°; в) 300°;
б) 540°; г) 400°.



Тест 2

Найдите сумму углов 12-угольника при помощи формулы суммы углов n-угольника.

а) 1200°; в) 1800°;
б) 1600°; г) 2400°.



Задания к § 1

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
ключевые задачи

Задача 1. *Сумма углов выпуклого n-угольника равна* 3600°. *Найти число сторон этого многоугольника* (рис. 4).

Решение. Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°(n - 2)$, где n — число его сторон. По условию $180°(n - 2) = 3600°$, откуда $n - 2 = \frac{3600}{180}$, $n - 2 = 20$, $n = 22$.

Ответ: 22.

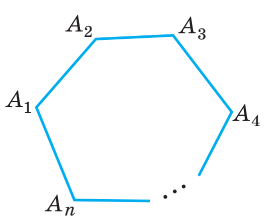


Рис. 4

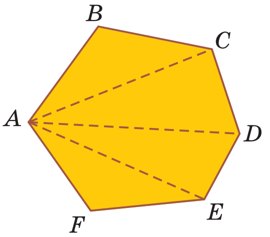


Рис. 5

Задача 2. *Найти число диагоналей шестиугольника.*

Решение. Пусть $ABCDEF$ — некоторый шестиугольник. Из вершины A можно провести 3 диагонали (рис. 5). Из вершины B также можно провести 3 диагонали. Так как из каждой из шести вершин можно провести по 3 диагонали, получим $6 \cdot 3 = 18$ «выходящих» диагоналей. При этом каждая диагональ шестиугольника учитывается дважды: вначале для одной, а затем для другой вершины. Поэтому всего диагоналей в 2 раза меньше, то есть $18 : 2 = 9$.

Ответ: 9.

Замечание. Рассуждая аналогично, можно вывести формулу числа диагоналей n-угольника. Из каждой вершины n-угольника будет выходить $(n - 3)$ диагонали (из данной вершины в нее саму и в две соседние вершины диагонали провести нельзя). Поскольку всего вершин n, то число диагоналей $N_d = \dfrac{n(n-3)}{2}$.

Задача 3. *Внешним углом выпуклого многоугольника называется угол, смежный с его внутренним углом. Доказать свойство:* ***«Сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°».***

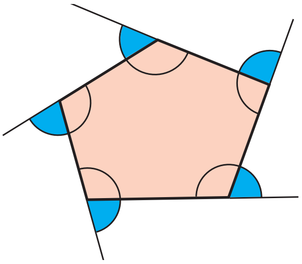


Рис. 6

Доказательство. Чтобы найти сумму внешних (закрашенных) углов выпуклого n-угольника (рис. 6), нужно от суммы развернутых углов, взятых по одному при каждой вершине, отнять сумму его внутренних углов.

Получим:

$180° \cdot n - 180° \cdot (n - 2) = 180° \cdot n - 180° \cdot n + 360° = 360°$.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

1. Найдите сумму углов выпуклого:

а) шестиугольника;

б) десятиугольника;

в) семнадцатиугольника.

2. Решите следующие задачи:

а) Найдите $\angle D$ четырехугольника $ABCD$ (рис. 7, *а*).

б) Найдите $\angle C$ пятиугольника $ABCDE$ (рис. 7, *б*).

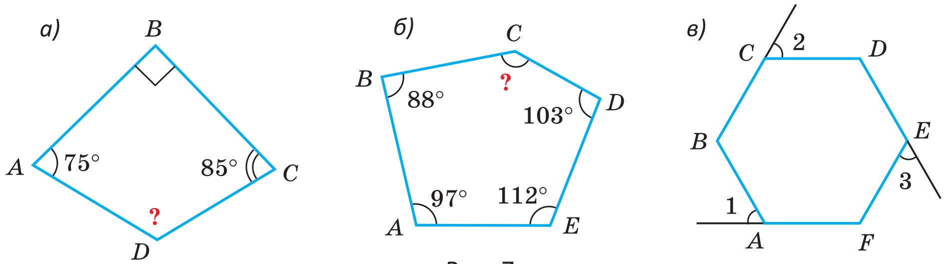


Рис. 7

в) Найдите сумму $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$, если у шестиугольника $ABCDEF$ все внутренние углы равны между собой (рис. 7, *в*).

3. Нарисуйте выпуклый пятиугольник $ABCDE$ и проведите все его диагонали. При помощи формулы $N_d = \frac{n(n-3)}{2}$ найдите число диагоналей пятиугольника и сравните его с числом диагоналей, проведенных вами.

4. Сумма углов n-угольника равна 900°. Все его стороны равны по 6 см. Найдите периметр этого n-угольника.

5. Определите количество сторон выпуклого многоугольника, если у него все углы равны и каждый угол содержит:

а) 60°; б) 108°; в) 120°.

6. Найдите углы четырехугольника $MNPK$, если известно, что $\angle M : \angle N : \angle P : \angle K = 2 : 7 : 3 : 8$. Используя транспортир, изобразите такой четырехугольник.

7. а) У четырехугольника два противоположных угла прямые, третий угол на 20° меньше четвертого угла. Найдите наибольший угол четырехугольника.

б) У четырехугольника три угла равны, а четвертый в 2 раза больше каждого из этих углов. Найдите углы четырехугольника.

8. а) Периметр четырехугольника равен 6 м. Одна из сторон равна 120 см, а три оставшиеся стороны равны между собой. Найдите длину неизвестных сторон четырехугольника и выразите ее в сантиметрах.

б) Периметр четырехугольника равен 78 см, две соседние его стороны относятся как 1 : 3, третья сторона равна 24 см, а четвертая составляет 75 % третьей стороны. Найдите наименьшую сторону четырехугольника.

9. Вершины A, B и C некоторого четырехугольника находятся в узлах тетрадной сетки (рис. 8). Найдите двумя способами величину угла при четвертой вершине четырехугольника, которая недоступна.

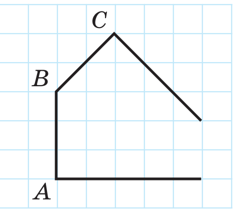


Рис. 8

10. Докажите, что сумма длин диагоналей выпуклого четырехугольника больше:

а) суммы длин двух его противоположных сторон;
б) его полупериметра.

11. Дан невыпуклый четырехугольник (рис. 9). Докажите, что $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3$.

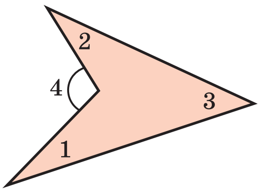


Рис. 9

12. У некоторого выпуклого многоугольника число диагоналей равно числу его сторон. Найдите сумму углов этого многоугольника.

13. $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, $\angle A = 80°$, $\angle D = 70°$. Найдите угол между биссектрисами углов B и C, обращенный к стороне BC.

14. В точках A, B, C и D расположены магазины (рис. 10). Найдите положение точки M, в которой следует разместить склад, чтобы сумма расстояний от склада до магазинов была наименьшей.

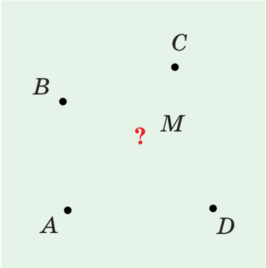


Рис. 10

15. Длины сторон пятиугольника $ABCDE$ выражены целыми числами. Известно, что $AB = 1$ см, $BC = 3$ см, $CD = 5$ см, $DE = 10$ см. Какую наибольшую и какую наименьшую длину может иметь сторона AE?

16. Определите, какое наибольшее число острых углов может иметь выпуклый многоугольник.

Реальная геометрия

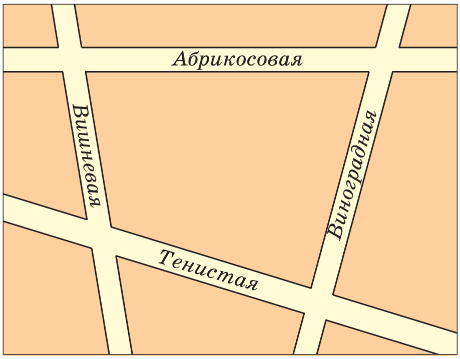


Рис. 11

На рисунке 11 изображен фрагмент карты города. Улицы Тенистая и Виноградная пересекаются под прямым углом, улица Абрикосовая пересекается с улицей Виноградной под углом 74°, а с улицей Вишневой — под углом 80°. Определите, какой угол составляют улицы:

а) Вишневая и Тенистая;
б) Тенистая и Абрикосовая;
в) Виноградная и Вишневая.

Выясните, существуют ли в вашем населенном пункте улицы, названые в честь героев Великой Отечественной войны.

Три совета:
Как научиться решать задачи по геометрии

Совет 1. Приступая к решению задачи, желательно прочесть ее условие несколько раз, чтобы ясно понимать, что в задаче дано, а что требуется найти (доказать). Далее следует сделать чертеж (если он не прилагается), наиболее близко отражающий условие задачи. При этом, если сказано, что дан четырехугольник, не стоит чертить прямоугольник, а если дан произвольный треугольник, то построенные вами равнобедренный или равносторонний треугольники могут привести к неправильным рассуждениям. Следует быть готовым к тому, что придется построить несколько чертежей, чтобы выбрать наиболее подходящий.

Совет 2. Если сразу не удается составить план решения задачи, нужно получить все дополнительные данные, вытекающие из условия. Первым делом необходимо найти величины всех углов и всех отрезков, которые только можно. Затем следует еще раз прочитать, что требуется найти или доказать.

Совет 3. Древние греки говорили: «Чтобы научиться плавать, нужно лезть в воду». Аналогично можно сказать: «Чтобы научиться решать задачи по геометрии, нужно их решать». Решение большого количества простых и средних по сложности задач — лучший способ научиться решать более сложные задачи.

§ 2. Параллелограмм и его свойства

Определение. **Параллелограммом** называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

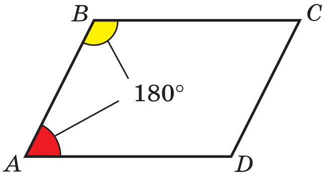


Рис. 12

На рисунке 12 изображен параллелограмм $ABCD$, у него $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.

По свойству односторонних углов при параллельных прямых и секущей $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle B + \angle C = 180°$. Справедливо свойство: ***«Сумма соседних углов параллелограмма равна** 180°».*

Определение. **Высотой параллелограмма** называется перпендикуляр, проведенный из точки прямой, содержащей одну из сторон параллелограмма, к прямой, содержащей противоположную сторону (*основание параллелограмма*).