Три совета:
Как научиться решать задачи по геометрии

Совет 1. Приступая к решению задачи, желательно прочесть ее условие несколько раз, чтобы ясно понимать, что в задаче дано, а что требуется найти (доказать). Далее следует сделать чертеж (если он не прилагается), наиболее близко отражающий условие задачи. При этом, если сказано, что дан четырехугольник, не стоит чертить прямоугольник, а если дан произвольный треугольник, то построенные вами равнобедренный или равносторонний треугольники могут привести к неправильным рассуждениям. Следует быть готовым к тому, что придется построить несколько чертежей, чтобы выбрать наиболее подходящий.

Совет 2. Если сразу не удается составить план решения задачи, нужно получить все дополнительные данные, вытекающие из условия. Первым делом необходимо найти величины всех углов и всех отрезков, которые только можно. Затем следует еще раз прочитать, что требуется найти или доказать.

Совет 3. Древние греки говорили: «Чтобы научиться плавать, нужно лезть в воду». Аналогично можно сказать: «Чтобы научиться решать задачи по геометрии, нужно их решать». Решение большого количества простых и средних по сложности задач — лучший способ научиться решать более сложные задачи.

§ 2. Параллелограмм и его свойства

Определение. **Параллелограммом** называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

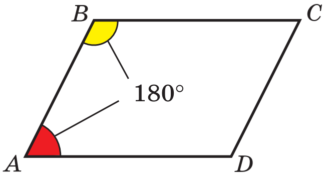
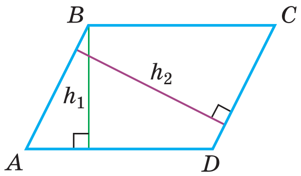


Рис. 12

На рисунке 12 изображен параллелограмм $ABCD$, у него $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.

По свойству односторонних углов при параллельных прямых и секущей $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle B + \angle C = 180°$. Справедливо свойство: ***«Сумма соседних углов параллелограмма равна 180°».***

Определение. **Высотой параллелограмма** называется перпендикуляр, проведенный из точки прямой, содержащей одну из сторон параллелограмма, к прямой, содержащей противоположную сторону (*основание параллелограмма*).



h_1, h_2 — *высоты параллелограмма*

Рис. 13

Высотой параллелограмма также называется *длина* указанного перпендикуляра. Все высоты параллелограмма, проведенные к данному основанию, равны между собой как расстояния между параллельными прямыми.

Высота h_1 параллелограмма $ABCD$ (рис. 13) проведена к основанию AD, высота h_2 — к основанию DC. Из свойств параллельных прямых следует, что $h_1 \perp BC$, $h_2 \perp AB$.

Теорема (о свойстве сторон и углов параллелограмма).
У параллелограмма противоположные стороны равны и противоположные углы равны.

Дано: $ABCD$ — параллелограмм (рис. 14).
Доказать: $AB = CD$, $BC = AD$; $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.

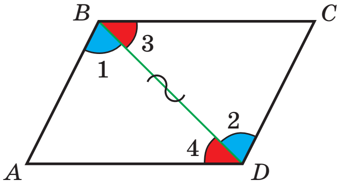


Рис. 14

Доказательство. Так как $ABCD$ — параллелограмм, то $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$. Проведем диагональ BD. Получим два треугольника ABD и CDB, которые равны по 2-му признаку равенства треугольников (сторона BD — общая, $\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей BD, $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей BD). Из равенства этих треугольников следует, что $AD = BC$, $AB = CD$, $\angle A = \angle C$. Углы B и D параллелограмма равны как суммы равных углов: $\angle B = \angle 1 + \angle 3$, $\angle D = \angle 2 + \angle 4$. Теорема доказана.

Следствие.

Периметр параллелограмма со сторонами a и b находится по формуле $P = 2(a + b)$.

При доказательстве теоремы получено еще одно свойство параллелограмма: ***«Диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника»***.

Теорема (о свойстве диагоналей параллелограмма).
Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Дано: $ABCD$ — параллелограмм (рис. 15).
Доказать: $AO = OC$, $BO = OD$.

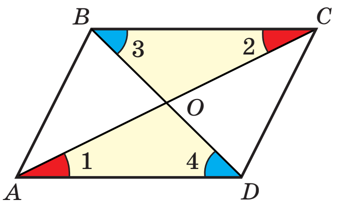


Рис. 15

Доказательство. Так как $ABCD$ — параллелограмм, то $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$. Треугольники AOD и COB равны по 2-му признаку равенства треугольников ($\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей AC, $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей BD, $AD = BC$ как противоположные стороны параллелограмма). Из равенства этих треугольников следует, что $AO = OC$, $BO = OD$. Теорема доказана.

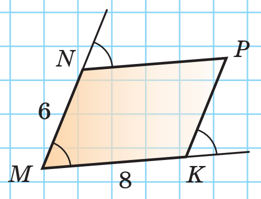
Замечание. Точка пересечения диагоналей параллелограмма называется *центром параллелограмма*.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

Тест 1

Найдите периметр четырехугольника $MNPK$.

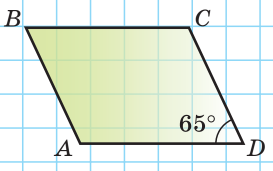
а) 14; б) 48; в) 28; г) 32.



Тест 2

Найдите сумму углов A, B и C параллелограмма $ABCD$.

а) 115°; б) 235°; в) 180°; г) 295°.



Внимание!

Если на рисунке к задаче и в ее условии не указана размерность (например, как в **Тесте 1**), то подразумевается, что длины отрезков выражены в одних и тех же единицах. Ответ для такой задачи приводится без размерности.

Задания к § 2

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

ключевые задачи

Задача 1. *$ABCD$ — параллелограмм, BK и BM — его высоты, $\angle KBM = 60°$, $AK = 3$ см, $KD = 7$ см. Найти: $\angle ABK$, $\angle A$, сторону AB, периметр параллелограмма $ABCD$.*

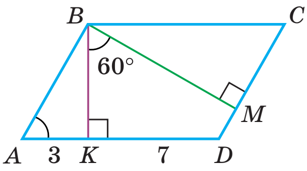


Рис. 16

Решение. Так как $BM \perp AB$ (рис. 16), то $\angle ABM = 90°$, $\angle ABK = 90° - 60° = 30°$. В прямоугольном треугольнике ABK $\angle A = 90° - 30° = 60°$. Поскольку в треугольнике ABK катет AK лежит против угла в 30°, то он равен половине гипотенузы. Отсюда гипотенуза $AB = 2AK = 6$ см. Так как $AD = AK + KD = 10$ см, то $P_{ABCD} = 2(AB + AD) = 2(6 + 10) = 32$ (см).

Ответ: 30°; 60°; 6 см; 32 см.

Замечание. Так как $\angle A$ и $\angle KBM$ дополняют $\angle ABK$ до 90°, то $\angle A = \angle KBM$. Полезно запомнить свойство: ***«Угол между высотами параллелограмма, проведенными из его вершины, равен углу при соседней вершине»***.

Задача 2. *Биссектриса угла A параллелограмма ABCD пересекает сторону BC в точке K, AD = 12 см, AB = 10 см. Найти длину отрезка KC* (рис. 17).

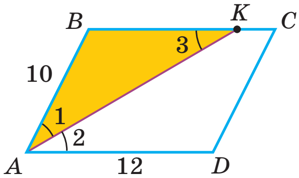


Рис. 17

Решение.

1) $\angle 1 = \angle 2$ (AK — биссектриса);

2) $\angle 2 = \angle 3$ (как накрест лежащие углы при $AD \parallel BC$ и секущей AK);

3) $\angle 1 = \angle 3$, $\triangle ABK$ — равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника);

4) $AB = BK = 10$ см (как боковые стороны равнобедренного треугольника);

5) $BC = AD = 12$ см (как противоположные стороны параллелограмма);

6) $KC = BC - BK = 12 - 10 = 2$ (см).

Ответ: 2 см.

Замечание. В ходе решения задачи доказано свойство: ***«Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник»***.

Задача 3. *Доказать, что любой отрезок с концами на сторонах параллелограмма, проходящий через точку пересечения диагоналей, делится этой точкой пополам.*

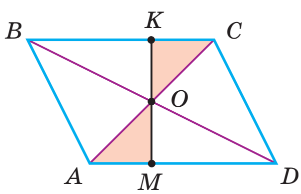


Рис. 18

Доказательство. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, KM — указанный отрезок (рис. 18). Докажем, что $OK = OM$. Рассмотрим $\triangle AOM$ и $\triangle COK$. У них $AO = OC$ (диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам), $\angle OAM = \angle OCK$ (как накрест лежащие углы при параллельных прямых AD и BC и секущей AC), $\angle AOM = \angle COK$ (как вертикальные). Значит, $\triangle AOM = \triangle COK$ (по 2-му признаку равенства треугольников). Из равенства треугольников следует, что $OM = OK$. Утверждение доказано.

Следствие.

Так как точки K и M симметричны относительно точки пересечения диагоналей, то можно сделать вывод, что параллелограмм — центрально-симметричная фигура и центр параллелограмма является его центром симметрии (подробнее симметрия будет рассмотрена в § 12).

Гимнастика ума

Параллелограмм $ABCD$ разрезали по ломаной линии, соединяющей вершины B и D (рис. 19). Определите, периметр какой части параллелограмма больше: желтой или красной.

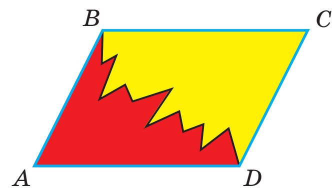


Рис. 19

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

17. Перенесите рисунок 20 в тетрадь. Постройте параллелограмм $ABCD$. Чему равна длина стороны BC? Чем является отрезок BH для параллелограмма $ABCD$? Проведите высоту CM к стороне AD. Почему из равенства треугольников ABH и DCM следует, что $AB \parallel CD$?

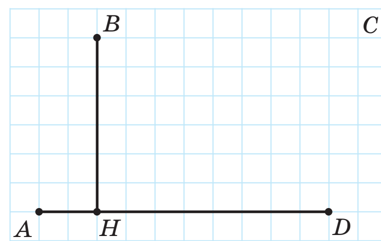


Рис. 20

18. По данным на рисунках 21, *а)—г)* докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

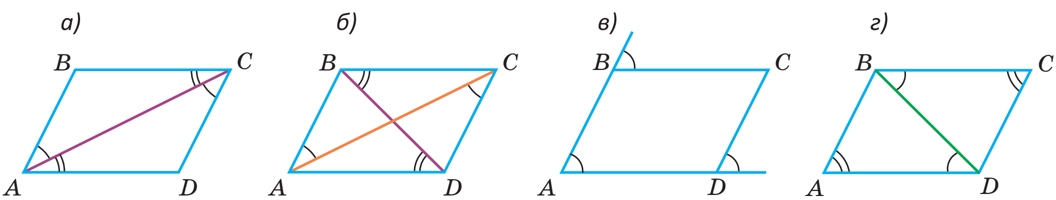


Рис. 21

19. Найдите неизвестные углы параллелограмма $ABCD$, если:

а) $\angle B = 130°$;
б) $\angle A + \angle C = 140°$;
в) угол A на $20°$ меньше угла B;
г) $\angle C : \angle B = 2 : 7$;
д) $\angle BAC = 35°$, $\angle DAC = 25°$;
е) $\angle D - 2\angle C = 12°$.

20. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 48 см. Найдите его стороны, если:

а) $CD = 10$ см;
б) сторона AD на 2 см больше стороны AB;

в) $AB : AD = 3 : 5$;
г) $AB + BC + CD = 32$ см;
д) $\angle BAC = \angle DAC$.

21. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 22). Найдите:
а) периметр треугольника AOB, если $AC = 20$ см, $BD = 16$ см, $CD = 10$ см;
б) периметр параллелограмма $ABCD$, если $AC = 14$ см, $BD = 12$ см, $P_{AOB} = 21$ см, $P_{ABD} = 33$ см.

22. В параллелограмме $ABCD$ $AN = 16$ см, $BP = 7$ см, $KD = 6$ см, $AM = 18$ см (рис. 23). Найдите периметр параллелограмма.

23. В параллелограмме $ABCD$ проведена высота CK, $\angle A = 120°$, $BC = 11$ см, $AK = 7$ см (рис. 24). Найдите периметр параллелограмма.

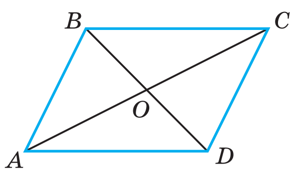


Рис. 22

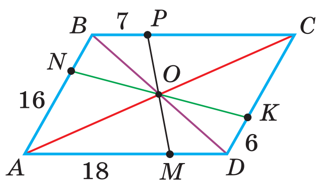


Рис. 23

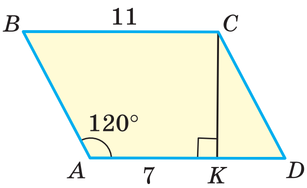


Рис. 24

24. а) Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 36 см, периметр треугольника ABC равен 28 см, $\angle ACB = 30°$. Найдите:
1) отрезок AC;
2) высоту CK, опущенную на сторону AD.
б) Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ перпендикулярна стороне AB, $P_{ABCD} = 30$ см, $\angle ADC = 120°$. Найдите стороны параллелограмма.

25. а) Докажите, что биссектрисы противоположных углов параллелограмма $ABCD$ ($AD \neq AB$) параллельны между собой.
б) Докажите, что биссектрисы соседних углов параллелограмма взаимно перпендикулярны.

26. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ делит сторону BC на отрезки $BK = 6$ см, $KC = 4$ см. Найдите периметр параллелограмма.

27. Биссектрисы углов B и C параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K, которая принадлежит стороне AD. Найдите периметр параллелограмма, если $KD = 8$ см.

28. Треугольник ABC — равнобедренный, $AB = BC = 12$ см (рис. 25). Найдите периметр параллелограмма $MBNK$.

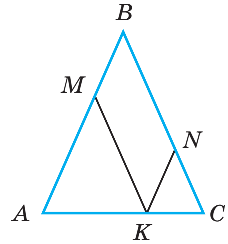


Рис. 25

29. Точка M — середина стороны BC параллелограмма $ABCD$, $\angle ABC = 104°$, $\angle BAM = 38°$. Найдите величину угла CDM.

30. $ABCD$ — параллелограмм, $\angle A$ — острый, AH и AK — высоты, проведенные к сторонам BC и CD соответственно. Докажите, что $\angle HAK = \angle B$. Найдите $\angle B$, если $\angle HAK : \angle C = 3 : 2$.

31. В треугольнике ABC проведена биссектриса AK, $KE \parallel AC$, $EH \parallel BC$ (рис. 26). Докажите, что $EK = AE$. По данным на рисунке найдите длины отрезков HC и AH.

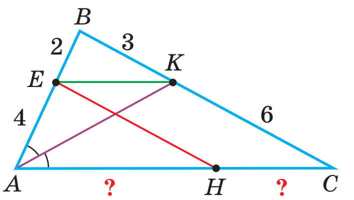


Рис. 26

32. Составьте алгоритм построения с помощью циркуля и линейки параллелограмма:
а) по двум соседним сторонам и углу между ними;
б) по двум соседним сторонам и высоте, проведенной к одной из сторон.

33. Сформулируйте какой-либо признак равенства параллелограммов и докажите его. (Фигуры равны, если их можно совместить наложением.)

34. Дан угол A и точка M внутри него. Постройте при помощи циркуля и линейки отрезок с концами на сторонах угла A, проходящий через точку M, который делится точкой M пополам.

§ 3. Признаки параллелограмма

Рассмотрим три признака параллелограмма.

Теорема (признак параллелограмма).
Если у четырехугольника две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник — параллелограмм.

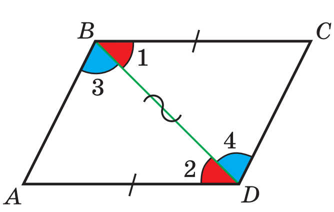


Рис. 27

Дано: четырехугольник $ABCD$, $BC = AD$, $BC \parallel AD$ (рис. 27).
Доказать: $ABCD$ — параллелограмм.
Доказательство. Проведем в четырехугольнике $ABCD$ диагональ BD. Треугольники ABD и CDB равны по 1-му признаку равенства треугольников ($AD = BC$ по условию, $\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и AD и секущей BD, сторона BD — общая). Из *равенства треугольников* следует, что $\angle 3 = \angle 4$. А так как $\angle 3$ и $\angle 4$ по своему расположению — накрест лежащие углы при прямых AB