29. Точка M — середина стороны BC параллелограмма $ABCD$, $\angle ABC = 104°$, $\angle BAM = 38°$. Найдите величину угла CDM.

30. $ABCD$ — параллелограмм, $\angle A$ — острый, AH и AK — высоты, проведенные к сторонам BC и CD соответственно. Докажите, что $\angle HAK = \angle B$. Найдите $\angle B$, если $\angle HAK : \angle C = 3 : 2$.

31. В треугольнике ABC проведена биссектриса AK, $KE \parallel AC$, $EH \parallel BC$ (рис. 26). Докажите, что $EK = AE$. По данным на рисунке найдите длины отрезков HC и AH.

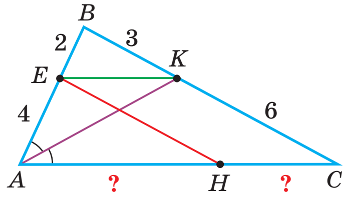


Рис. 26

32. Составьте алгоритм построения с помощью циркуля и линейки параллелограмма:
а) по двум соседним сторонам и углу между ними;
б) по двум соседним сторонам и высоте, проведенной к одной из сторон.

33. Сформулируйте какой-либо признак равенства параллелограммов и докажите его. (Фигуры равны, если их можно совместить наложением.)

34. Дан угол A и точка M внутри него. Постройте при помощи циркуля и линейки отрезок с концами на сторонах угла A, проходящий через точку M, который делится точкой M пополам.

§ 3. Признаки параллелограмма

Рассмотрим три признака параллелограмма.

Теорема (признак параллелограмма).
Если у четырехугольника две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник — параллелограмм.

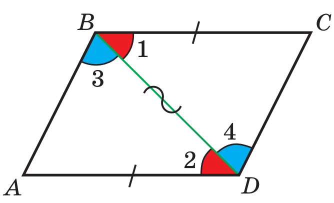


Рис. 27

Дано: четырехугольник $ABCD$, $BC = AD$, $BC \parallel AD$ (рис. 27).
Доказать: $ABCD$ — параллелограмм.
Доказательство. Проведем в четырехугольнике $ABCD$ диагональ BD. Треугольники ABD и CDB равны по 1-му признаку равенства треугольников ($AD = BC$ по условию, $\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и AD и секущей BD, сторона BD — общая). Из *равенства треугольников* следует, что $\angle 3 = \angle 4$. А так как $\angle 3$ и $\angle 4$ по своему расположению — накрест лежащие углы при прямых AB

и CD и секущей BD, то $AB \parallel CD$ (по признаку параллельности прямых). Таким образом, у четырехугольника $ABCD$ противоположные стороны параллельны. Поэтому $ABCD$ — параллелограмм (по определению параллелограмма). Теорема доказана.

Теорема (признак параллелограмма).
Если у четырехугольника противоположные стороны попарно равны, то этот четырехугольник — параллелограмм.

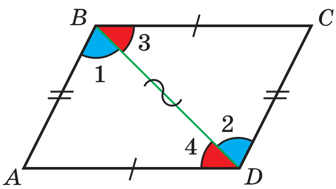


Рис. 28

Дано: четырехугольник $ABCD$, $BC = AD$, $AB = CD$ (рис. 28).
Доказать: $ABCD$ — параллелограмм.
Доказательство. Проведем диагональ BD. Треугольники ABD и CDB равны по трем сторонам ($AD = BC$, $AB = CD$ по условию, сторона BD — общая). Из *равенства треугольников* следует, что $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$. А так как $\angle 3$ и $\angle 4$ — накрест лежащие углы при прямых BC и AD и секущей BD, то $BC \parallel AD$ (по признаку параллельности прямых). Аналогично, так как $\angle 1$ и $\angle 2$ — накрест лежащие углы при прямых AB и CD и секущей BD, то $AB \parallel CD$. Поскольку у четырехугольника $ABCD$ противоположные стороны параллельны, то $ABCD$ — параллелограмм (по определению параллелограмма). Теорема доказана.

Теорема (признак параллелограмма).
Если у четырехугольника диагонали точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.

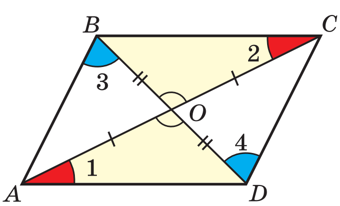


Рис. 29

Дано: четырехугольник $ABCD$, $AO = OC$, $BO = OD$ (рис. 29).
Доказать: $ABCD$ — параллелограмм.
Доказательство. Треугольники AOD и COB равны по 1-му признаку равенства треугольников ($\angle AOD = \angle COB$ как вертикальные, $AO = OC$, $BO = OD$ по условию). Из *равенства треугольников* следует, что $\angle 1 = \angle 2$. Но углы 1 и 2 — накрест лежащие при прямых AD и BC и секущей AC. По признаку параллельности прямых $AD \parallel BC$. Аналогично, треугольники AOB и COD равны по 1-му признаку равенства треугольников, откуда $\angle 3 = \angle 4$, $AB \parallel CD$. Так как у четырехугольника $ABCD$ противоположные стороны параллельны, то он — параллелограмм (по определению параллелограмма). Теорема доказана.

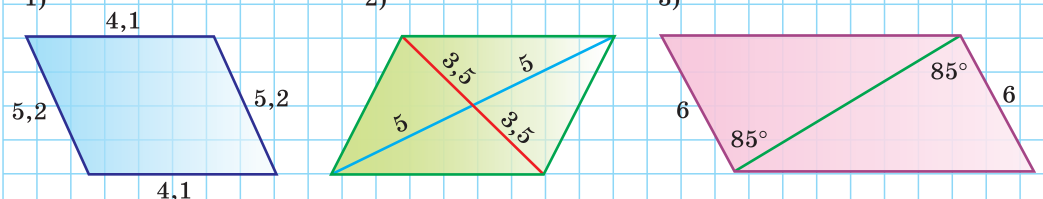
А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

Тест 1

Какой из изображенных на рисунках четырехугольников не является параллелограммом?

а) 1); б) 2); в) 3); г) все являются.

1) 2) 3)



Тест 2

Верно ли утверждение: «Если у четырехугольника две противоположные стороны равны, а две другие параллельны, то этот четырехугольник — параллелограмм»? Если ваш ответ «нет», то приведите *контрпример* (пример, опровергающий это утверждение).

При помощи **Интернета** выясните, как в математике называется точка пересечения высот треугольника.

Задания к § 3

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
ключевые задачи

Задача 1. *Дан параллелограмм $ABCD$. На его сторонах BC и AD отложены равные отрезки BK и DM. Доказать, что $AKCM$ — параллелограмм.*

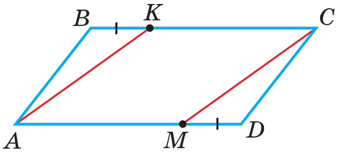
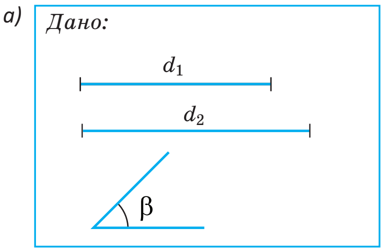


Рис. 30

Доказательство. У любого параллелограмма противоположные стороны равны и параллельны. Поэтому $AD = BC$ и $AD \parallel BC$ (рис. 30). Так как $KC = BC - BK$, $AM = AD - DM$ и по условию $BK = DM$, то $KC = AM$. Поскольку у четырехугольника $AKCM$ стороны KC и AM равны и параллельны, то он является параллелограммом по признаку параллелограмма.

Задача 2. *Построить при помощи циркуля и линейки параллелограмм по двум диагоналям и углу между ними.*

Решение. Пусть d_1 и d_2 — данные диагонали, β — угол между ними (рис. 31, *а*).



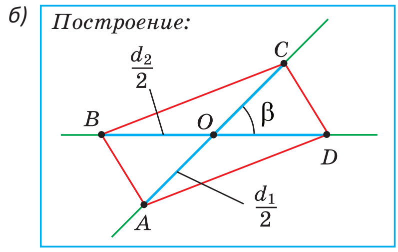


Рис. 31

Построение (алгоритм). Делим каждую из диагоналей d_1 и d_2 пополам (вспомните, как это делается при помощи циркуля и линейки). Строим угол O, равный углу β (вспомните алгоритм построения). На сторонах угла O и на их продолжениях откладываем отрезки $OC = OA = \frac{d_1}{2}$ и $OD = OB = \frac{d_2}{2}$ (рис. 31, *б*). Проводим отрезки AB, BC, CD и AD. Четырехугольник $ABCD$ — искомый параллелограмм.

Доказательство. У четырехугольника $ABCD$ диагонали точкой пересечения делятся пополам (по построению), поэтому он является параллелограммом (по признаку параллелограмма). Диагонали AC и BD равны d_1 и d_2, и угол AOB между диагоналями равен β (по построению).

Задача 3. *Доказать, что высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.*

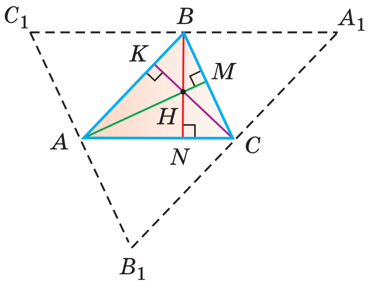


Рис. 32

Доказательство. Пусть AM, BN и CK — высоты треугольника ABC (рис. 32). Через вершины треугольника ABC проведем прямые, параллельные противолежащим сторонам. В их пересечении получим треугольник $A_1B_1C_1$. Так как $A_1B_1 \parallel AB$, $A_1C_1 \parallel AC$, то ABA_1C — параллелограмм, откуда $BA_1 = AC$. Аналогично AC_1BC — параллелограмм и $C_1B = AC$. Тогда $C_1B = BA_1$. Значит, точка B — середина отрезка A_1C_1. Так как $AC \parallel A_1C_1$ и $BN \perp AC$, то $BN \perp A_1C_1$ (прямая, перпендикулярная одной из двух параллельных прямых, перпендикулярна и другой прямой). Прямая BN — серединный перпендикуляр к стороне A_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Аналогично доказывается, что прямые AM и CK — серединные перпендикуляры к сторонам B_1C_1 и A_1B_1 соответственно. А мы знаем, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке (Геометрия, 7 класс, с. 85, ключевая задача **2**). Следовательно, высоты AM, BN и CK (или их продолжения в случае тупоугольного треугольника) пересекаются в одной точке. Что и требовалось доказать.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

35. Перенесите рисунок 33 в тетрадь. Проведите (вправо) отрезок BC, равный и параллельный отрезку AD. Объясните, почему четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. Найдите приближенно периметр параллелограмма $ABCD$. Выразите его в сантиметрах.

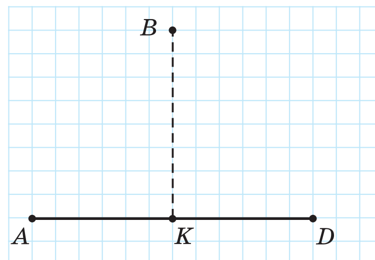


Рис. 33

36. Используя данные на рисунках 34, *а)*—*г)*, докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

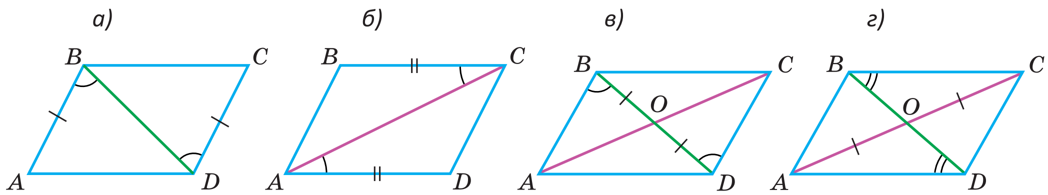


Рис. 34

37. Используя данные на рисунках 35, *а)*—*в)*, ответьте на следующие вопросы:

а) Почему на рисунке 35, *а)* $AD \parallel BC$?

б) Почему на рисунке 35, *б)* $\angle A = \angle C$?

в) Почему на рисунке 35, *в)* $\angle ADC + \angle DCB = 180°$?

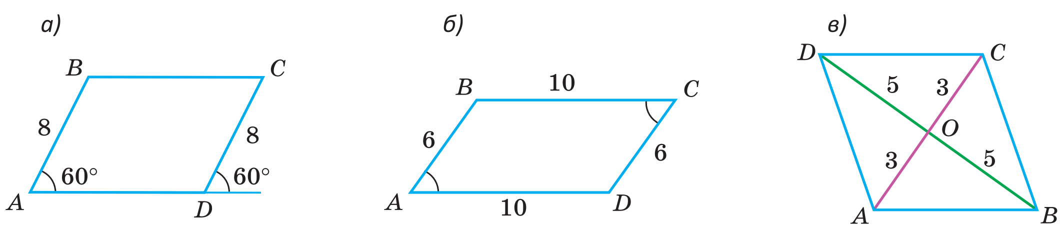


Рис. 35

38. По данным на рисунке 36 найдите периметр четырехугольника $ABCD$.

39. Отрезки AC и BD (рис. 37) пересекаются в их серединах. Известно, что $\angle DAB = 126°$. Найдите $\angle ADC$.

40. Дан параллелограмм $ABCD$ (рис. 38). На его диагонали BD отложены равные отрезки BG и DF. Докажите, что четырехугольник $AGCF$ — параллелограмм.

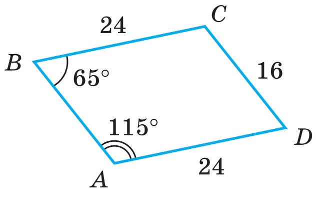


Рис. 36

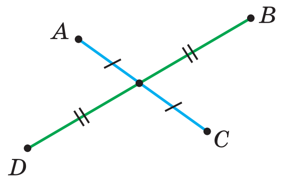


Рис. 37

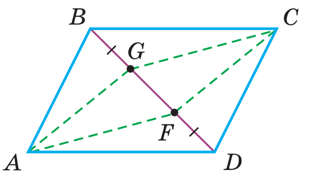


Рис. 38

41. $ABCD$ — параллелограмм, K — середина стороны AB, M — середина стороны DC. Докажите, что:

а) $AKMD$ — параллелограмм; б) $KBMD$ — параллелограмм.

42. $MNPK$ — четырехугольник, $MN = PK$, $NP = MK$, $\angle M = 72°$. Найдите:

а) градусные меры углов MKP и NPK;
б) угол между биссектрисой угла K и прямой NP.

43. У выпуклого четырехугольника $ABCD$ $AB = CD = 8$ см, $\angle ABD = \angle CDB$, диагонали пересекаются в точке O, $P_{ABO} = 20$ см, $P_{BOC} = 22$ см. Найдите периметр этого четырехугольника.

44. Докажите, что если у четырехугольника противоположные углы равны, то этот четырехугольник — параллелограмм.

45. Медиану BM треугольника ABC продолжили за точку M на отрезок MD, равный отрезку BM. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

46. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм (рис. 39), $BB_1 = AB$, $CC_1 = BC$, $DD_1 = CD$, $AA_1 = DA$. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм.

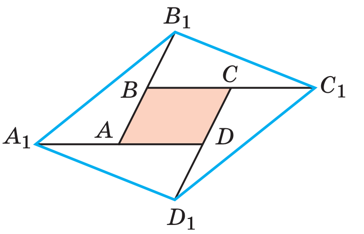


Рис. 39

47. Точки M, N, P, K — середины сторон параллелограмма $ABCD$ (рис. 40). Докажите, что закрашенный четырехугольник — параллелограмм.

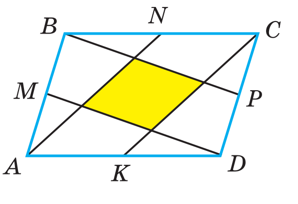


Рис. 40

48. Точки $P(-1;\ 1)$, $E(-3;\ 5)$, $K(4;\ 5)$ — вершины параллелограмма. Найдите координаты четвертой вершины G. Рассмотрите все варианты.

49. Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 10$ см, $AD = 16$ см. Биссектрисы углов A и B пересекаются в точке K, а биссектрисы углов C и D — в точке M. Точки K и M лежат внутри параллелограмма. Найдите длину отрезка MK.

50. Составьте алгоритм построения циркулем и линейкой параллелограмма $ABCD$:

а) по двум диагоналям и стороне;
б) по двум диагоналям и высоте параллелограмма.

51. В треугольнике ABC высоты BH и AF пересекаются в точке O. Из точки C к прямой AC в одну полуплоскость с точкой B восстановлен перпендикуляр CK, равный отрезку BO. Докажите, что $BK \perp AB$.

Моделирование

Известно, что если выпуклый четырехугольник разрезать по средним линиям (отрезкам, соединяющим середины противоположных сторон четырехугольника), то из полученных частей всегда можно сложить параллелограмм.

Задания

1. Вырежьте из листа бумаги произвольный выпуклый четырехугольник. Отметьте при помощи линейки середины его сторон. Соедините середины противоположных сторон отрезками (рис. 41, *А*).

2. Разрежьте четырехугольник при помощи ножниц по полученным средним линиям (рис. 41, *Б*).

3. Из полученных четырех частей четырехугольника сложите параллелограмм (рис. 41, *В*).

4. Докажите, что из указанных частей любого выпуклого четырехугольника всегда можно сложить параллелограмм.

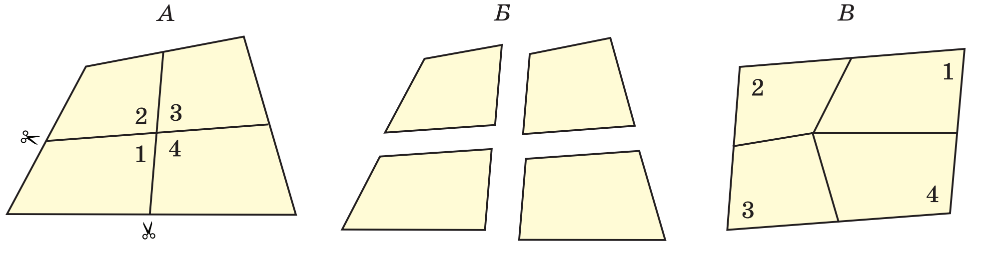


Рис. 41

ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Определение многоугольника, выпуклого многоугольника, диагонали многоульника.

2. Определение параллелограмма, высоты параллелограмма.

3. Свойства параллелограмма.

4. Признаки параллелограмма.

Умеем

1. Доказывать теорему о сумме углов n-угольника.

2. Доказывать теоремы о свойствах и признаках параллелограмма.

§ 4. Прямоугольник

Определение. **Прямоугольником** называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

Заметим, что если у некоторого параллелограмма один угол прямой, то и остальные три угла будут прямыми, поскольку сумма соседних углов параллелограмма равна 180°. Таким образом, *параллелограмм, у которого есть прямой угол, является прямоугольником*.

Так как прямоугольник — частный случай параллелограмма, то он обладает всеми свойствами параллелограмма. Однако у прямоугольника есть и отличительное для него свойство. Сформулируем это свойство в виде теоремы.

Теорема (свойство диагоналей прямоугольника).
Диагонали прямоугольника равны.

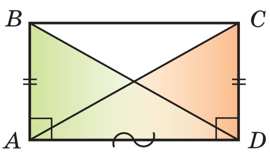


Рис. 42

Дано: $ABCD$ — прямоугольник (рис. 42).
Доказать: $AC = BD$.
Доказательство. Прямоугольные треугольники ABD и DCA равны по двум катетам: катеты AB и CD равны как противоположные стороны параллелограмма, катет AD — общий. Отсюда $AC = BD$. Теорема доказана.

Теорема (признак прямоугольника).
Если у параллелограмма диагонали равны, то это прямоугольник.