ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Определение многоугольника, выпуклого многоугольника, диагонали многоульника.

2. Определение параллелограмма, высоты параллелограмма.

3. Свойства параллелограмма.

4. Признаки параллелограмма.

Умеем

1. Доказывать теорему о сумме углов n-угольника.

2. Доказывать теоремы о свойствах и признаках параллелограмма.

§ 4. Прямоугольник

Определение. **Прямоугольником** называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

Заметим, что если у некоторого параллелограмма один угол прямой, то и остальные три угла будут прямыми, поскольку сумма соседних углов параллелограмма равна 180°. Таким образом, *параллелограмм, у которого есть прямой угол, является прямоугольником*.

Так как прямоугольник — частный случай параллелограмма, то он обладает всеми свойствами параллелограмма. Однако у прямоугольника есть и отличительное для него свойство. Сформулируем это свойство в виде теоремы.

Теорема (свойство диагоналей прямоугольника).
Диагонали прямоугольника равны.

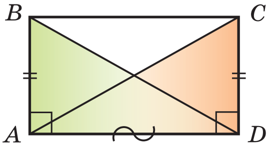


Рис. 42

Дано: $ABCD$ — прямоугольник (рис. 42).
Доказать: $AC = BD$.
Доказательство. Прямоугольные треугольники ABD и DCA равны по двум катетам: катеты AB и CD равны как противоположные стороны параллелограмма, катет AD — общий. Отсюда $AC = BD$. Теорема доказана.

Теорема (признак прямоугольника).
Если у параллелограмма диагонали равны, то это прямоугольник.

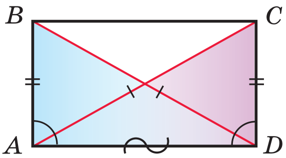


Рис. 43

Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $AC = BD$ (рис. 43).
Доказать: $ABCD$ — прямоугольник.
Доказательство. Треугольники ABD и DCA равны по трем сторонам: $AB = CD$ по свойству параллелограмма, $AC = BD$ по условию, сторона AD — общая. Отсюда $\angle BAD = \angle CDA$. Так как сумма соседних углов параллелограмма равна $180°$, то $\angle BAD = \angle CDA = 90°$, $\angle ABC = \angle BCD = 90°$. У параллелограмма $ABCD$ все углы прямые, поэтому он — прямоугольник. Теорема доказана.

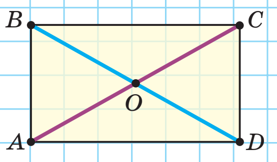
Замечание. Прямоугольники, в частности, равны, если равны их соответствующие стороны, так как в этом случае прямоугольники можно совместить наложением.

А теперь выполните **Тест 1**, **Тест 2** и **Тест 3**.

Тест 1

Если $ABCD$ — прямоугольник и $AO + BO + CO = 24$ см, то $BD = \dots$

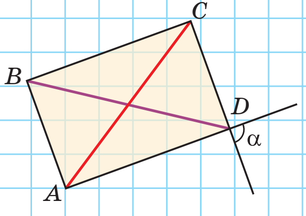
а) 12 см; в) 32 см;
б) 16 см; г) 8 см.



Тест 2

Если $ABCD$ — параллелограмм и $AC = BD$, то $\alpha = \dots$

а) $90°$; в) $60°$;
б) $100°$; г) $180°$.



Тест 3

Верно ли утверждение: «Если у четырехугольника диагонали равны, то это прямоугольник»? Если ваш ответ «нет», то приведите контрпример.

Гимнастика ума

1. В прямоугольнике провели два отрезка, перпендикулярные его сторонам (рис. 44). Какое максимальное число прямоугольников можно насчитать на рисунке?

2. В прямоугольнике $ABCD$ провели два отрезка, параллельные его сторонам (рис. 45). По данным на рисунке найдите периметр прямоугольника $ABCD$.

3. Из четырех равных прямоугольников с периметром 24 см каждый сложили квадрат $ABCD$ (рис. 46). Найдите периметр квадрата $ABCD$.

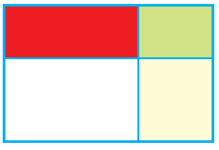


Рис. 44

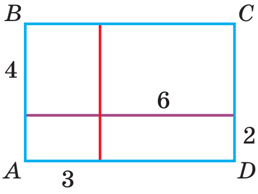


Рис. 45

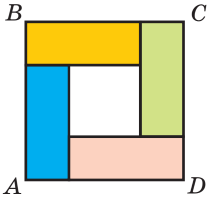


Рис. 46

Задания к § 4

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
ключевые задачи

Задача 1. *Доказать, что если у четырехугольника все углы прямые, то он является прямоугольником.*

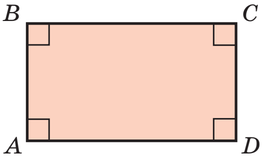


Рис. 47

Доказательство. Пусть у четырехугольника $ABCD$ $\angle A = \angle B = \angle D = \angle C = 90^\circ$ (рис. 47). Так как $\angle A + \angle B = 180^\circ$ и $\angle A + \angle D = 180^\circ$, то $BC \parallel AD$ и $AB \parallel CD$ по признаку параллельности прямых. Тогда $ABCD$ — параллелограмм по определению. А параллелограмм, у которого все углы прямые, — это прямоугольник.

Замечание. Итак, многоугольник является прямоугольником, если это:
1) параллелограмм, у которого все углы прямые;
2) параллелограмм, у которого есть прямой угол;
3) четырехугольник, у которого все углы прямые;
4) параллелограмм, у которого диагонали равны.

Задача 2. *Доказать теорему: «**Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы**».*

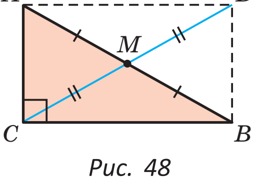


Рис. 48

Доказательство. Пусть CM — медиана треугольника ACB, где $\angle C = 90^\circ$ (рис. 48). Продлим медиану CM за точку M на ее длину. Получим $CM = \frac{1}{2}CD$. Так как у четырехугольника $CADB$ диагонали точкой пересечения делятся пополам, то это параллелограмм по признаку параллелограмма. Параллелограмм, у которого есть прямой угол, является прямоугольником. Поэтому $CADB$ — прямоугольник. Так как диагонали прямоугольника равны, то $CD = AB$ и $CM = \frac{1}{2}AB$. Что и требовалось доказать.

Докажите аналогичным способом обратную теорему: **«Если в треугольнике медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный».**

Задача 3. *Доказать, что отрезок, соединяющий середины противоположных сторон прямоугольника, разбивает этот прямоугольник на два равных прямоугольника.*

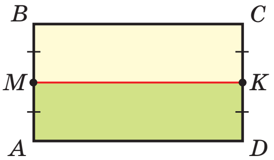


Рис. 49

Доказательство. Пусть $ABCD$ — прямоугольник, точки M и K — середины сторон AB и CD (рис. 49). Отрезки MB и CK равны как половины равных сторон AB и CD и параллельны, так как $AB \parallel CD$. Поэтому четырехугольник $MBCK$ является параллелограммом по признаку параллелограмма. А так как $\angle B = 90°$, то $MBCK$ — прямоугольник. Аналогично доказываем, что $AMKD$ — прямоугольник. Поскольку у этих прямоугольников стороны равны, то они равны между собой.

Следствие.

Если прямоугольник $ABCD$ мысленно перегнуть по прямой MK, то в силу того, что $AB \perp MK$, $CD \perp MK$, $MB = MA$, $KC = KD$, точка B совпадет с точкой A, точка C — с точкой D, прямоугольник $MBCK$ совпадет с прямоугольником $AMKD$. Прямая MK будет являться осью симметрии прямоугольника $ABCD$ (подробнее симметрия будет рассмотрена в § 12).

Таким образом, у прямоугольника есть центр симметрии, как у любого параллелограмма (он находится в точке пересечения диагоналей), и имеются две оси симметрии, которые проходят через середины его противоположных сторон (рис. 50).

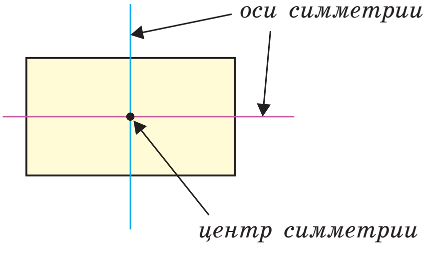


Рис. 50

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

52. Дан прямоугольник $ABCD$, O — точка пересечения его диагоналей. Найдите длину отрезка BO, если $AC = 8$ см.

53. $ABCD$ — прямоугольник, его диагонали пересекаются в точке O. Найдите периметр треугольника AOD, если $BC = 10$ см, $BD = 24$ см.

54. Найдите периметр прямоугольника $ABCD$, если периметр треугольника ABD равен 30 см и $AC = 12$ см.

55. На рисунке 51 изображен параллелограмм $ABCD$, $\angle ABC = 90°$, $OD = 6$ см. Найдите длину диагонали AC.

56. По данным на рисунке 52 найдите периметр прямоугольника $ABCD$.

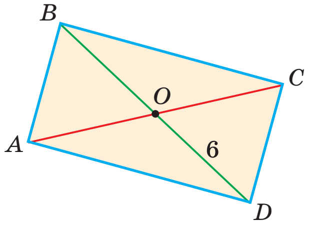


Рис. 51

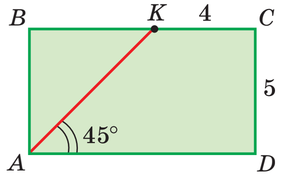


Рис. 52

57. Докажите следующие признаки прямоугольника:

а) Если у четырехугольника три угла прямые, то это прямоугольник.
б) Если у четырехугольника все углы равны, то это прямоугольник.

58. Дан прямоугольник $ABCD$ (рис. 53), $BH \perp AC$, $\angle 1 = 28°$. Найдите $\angle 2$.

59. У параллелограмма $ABCD$ $AC = BD$, $\angle ACB = 32°$ (рис. 54). Найдите углы 1, 2 и 3 и в ответе запишите их сумму.

60. Дан прямоугольник $ABCD$ (рис. 55), $AB = 8$ см, разность периметра треугольника BOC и периметра треугольника COD равна 4 см. Найдите периметр прямоугольника $ABCD$.

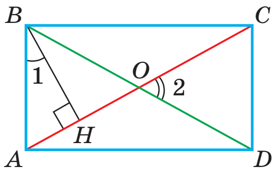


Рис. 53

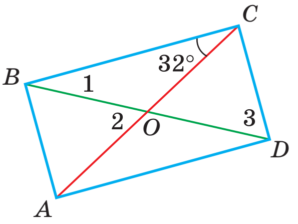


Рис. 54

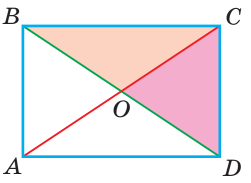


Рис. 55

61. В прямоугольнике $ABCD$ $AC = 12$ см, $\angle ADB = 15°$. Найдите расстояние от вершины A до прямой BD.

62. Докажите, что концы двух диаметров окружности являются вершинами прямоугольника.

63. Серединный перпендикуляр к диагонали прямоугольника делит сторону прямоугольника в отношении 2 : 1. Найдите углы, которые диагональ прямоугольника образует с его сторонами.

64. На рисунке 56 $ME = EP$, $NE = EK$, $\angle NPM = \angle MKN$. Найдите $\angle MNP$.

65. Прямоугольник разбили прямыми, параллельными его сторонам, на четыре прямоугольника (рис. 57).

а) Зная периметры трех прямоугольников: $P_1 = 8$ см, $P_2 = 14$ см, $P_3 = 24$ см, найдите периметр P_4 четвертого прямоугольника.
б) Докажите, что при любых значениях P_1, P_2, P_3, P_4 верно равенство $P_{ABCD} = P_1 + P_3 = P_2 + P_4$.

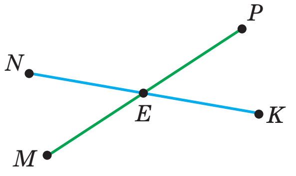


Рис. 56

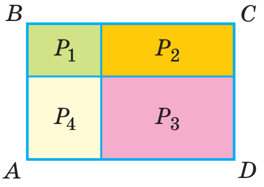


Рис. 57

66. В параллелограмме $ABCD$ ($AD \neq AB$) провели биссектрисы его углов. Какую фигуру ограничивают четыре построенные биссектрисы? Докажите вашу гипотезу.

67. Составьте алгоритм построения при помощи циркуля и линейки прямоугольника по следующим элементам:

а) по двум соседним сторонам a и b;
б) по стороне a и диагонали d;
в) по диагонали d и углу между диагоналями.

68. На координатной плоскости изобразите четырехугольник $MNPK$, где $M(-1; -2)$, $N(-3; 4)$, $P(6; 7)$, $K(8; 1)$. Докажите, что $MNPK$:

а) параллелограмм; б) прямоугольник.

69. Невозмутимая кошка сидит на середине лестницы (рис. 58). Лестница начинает падать, скользя концами по полу и стене. По какой траектории будет двигаться кошка:

а), б), в) или г)?

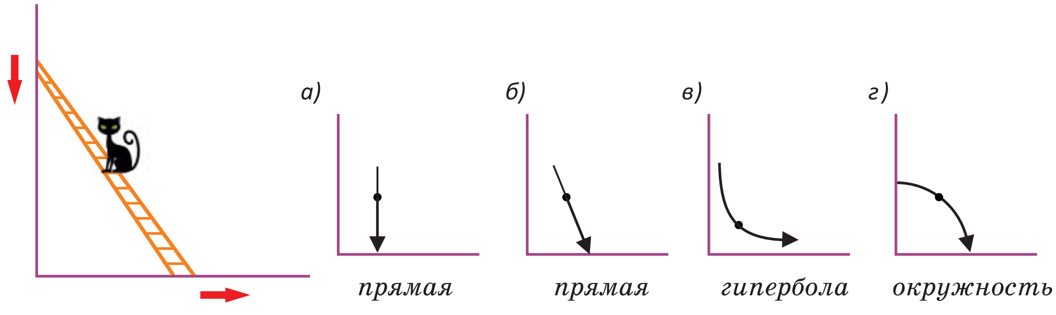


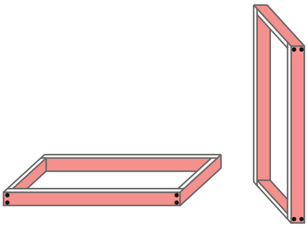
Рис. 58

Моделирование

Отец и сын хотят заменить оконную раму, имеющую размеры $1 \times 1{,}2$ м, в доме ветерана войны. У них имеются доски длиной 2 м 20 см, шириной 12 см и толщиной 2 см каждая.

1. Составьте план изготовления такой рамы.
2. Как проверить, имеет ли сделанная по вашему плану рама форму прямоугольника, при помощи:
   а) угольника;
   б) рулетки?
3. Подсчитайте, сколько погонных метров доски пойдет на изготовление двух таких рам.

Выясните, на каком предприятии в Беларуси производят рулетки.



§ 5. Ромб

Определение. **Ромбом** называется параллелограмм, у которого все стороны равны.

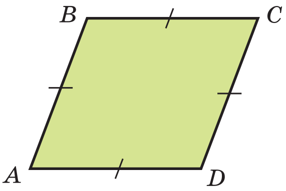


Рис. 59

На рисунке 59 изображен ромб $ABCD$. У него $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$ и $AB = BC = CD = AD$. Как частный случай параллелограмма ромб обладает всеми свойствами параллелограмма. Кроме этого, у него есть свойства, присущие именно ромбу. Сформулируем их в виде теоремы.

Теорема (свойство диагоналей ромба).
Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и лежат на биссектрисах его углов.

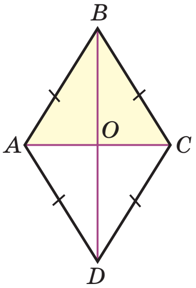


Рис. 60

Дано: $ABCD$ — ромб (рис. 60).

Доказать: $BD \perp AC$; BD — биссектриса угла ABC.

Доказательство. Так как у ромба все стороны равны, то $AB = BC$ и треугольник ABC — равнобедренный. Диагонали любого параллелограмма точкой пересечения делятся пополам. Поэтому $AO = OC$ и BO — медиана треугольника ABC. А медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основанию,