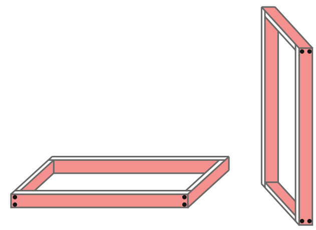
Моделирование

Отец и сын хотят заменить оконную раму, имеющую размеры $1 \times 1{,}2$ м, в доме ветерана войны. У них имеются доски длиной 2 м 20 см, шириной 12 см и толщиной 2 см каждая.

1. Составьте план изготовления такой рамы.
2. Как проверить, имеет ли сделанная по вашему плану рама форму прямоугольника, при помощи:
   а) угольника;
   б) рулетки?
3. Подсчитайте, сколько погонных метров доски пойдет на изготовление двух таких рам.



Выясните, на каком предприятии в Беларуси производят рулетки.

§ 5. Ромб

Определение. **Ромбом** называется параллелограмм, у которого все стороны равны.

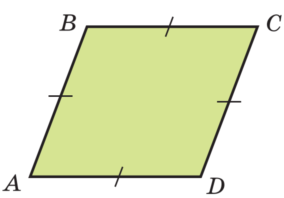


Рис. 59

На рисунке 59 изображен ромб $ABCD$. У него $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$ и $AB = BC = CD = AD$. Как частный случай параллелограмма ромб обладает всеми свойствами параллелограмма. Кроме этого, у него есть свойства, присущие именно ромбу. Сформулируем их в виде теоремы.

Теорема (свойство диагоналей ромба).
Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и лежат на биссектрисах его углов.

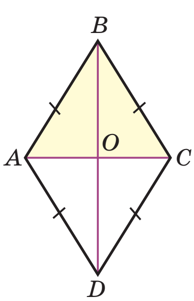


Рис. 60

Дано: $ABCD$ — ромб (рис. 60).
Доказать: $BD \perp AC$; BD — биссектриса угла ABC.
Доказательство. Так как у ромба все стороны равны, то $AB = BC$ и треугольник ABC — равнобедренный. Диагонали любого параллелограмма точкой пересечения делятся пополам. Поэтому $AO = OC$ и BO — медиана треугольника ABC. А медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основанию,

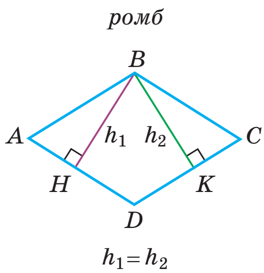


Рис. 61

является высотой и биссектрисой. Отсюда $BD \perp AC$ и BD — биссектриса угла ABC.
Теорема доказана.

Для ромба также справедливо свойство: **«Высоты ромба, проведенные к соседним сторонам, равны между собой»**. Доказательство следует из равенства прямоугольных треугольников ABH и CBK (рис. 61) по гипотенузе ($AB = BC$) и острому углу ($\angle A = \angle C$).

Сформулируйте и докажите утверждение, обратное данному.

Теорема (признаки ромба).
Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то это ромб.
Если одна из диагоналей параллелограмма лежит на биссектрисе его угла, то это ромб.

Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $AC \perp BD$ (рис. 62, *а*) или луч AC — биссектриса угла BAD (рис. 62, *б*).
Доказать: $ABCD$ — ромб.

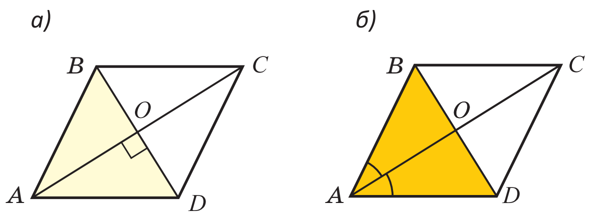


Рис. 62

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABD. Так как диагонали любого параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, то $BO = OD$. Отсюда следует, что отрезок AO — медиана треугольника ABD. Если $AC \perp BD$, то в треугольнике ABD медиана AO является высотой. Если AC — биссектриса угла BAD, то в треугольнике ABD медиана AO является биссектрисой. В обоих случаях следует, что треугольник ABD — равнобедренный по признаку равнобедренного треугольника. Значит, $AB = AD$. Тогда у параллелограмма $ABCD$ все стороны равны. Следовательно, он — ромб. Теорема доказана.

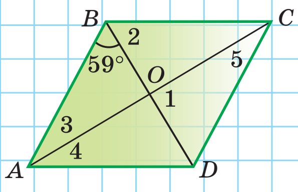
Замечание. Если перегнуть ромб по диагонали AC, то вершина B совместится с вершиной D ($BO \perp AC$, $BO = OD$), а значит, треугольник ABC совместится с треугольником ADC. *Ромб имеет две оси симметрии, которые содержат его диагонали.*

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

Тест 1

$ABCD$ — ромб. Найдите сумму углов 1, 2, 3, 4 и 5.

а) 180°; б) 242°; в) 360°; г) 140°.



Тест 2

1. Является ли любой ромб параллелограммом?
2. Является ли любой параллелограмм ромбом?
3. Каким условиям должен отвечать параллелограмм, чтобы быть ромбом? Перечислите все известные вам наборы условий.

При помощи **Интернета**:
а) выясните историю происхождения слова «ромб»;
б) найдите, где в технике используются параллелограммы.

Задания к § 5

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

Задача 1. *Найти периметр четырехугольника $ABCD$* (рис. 63), *у которого $AO = OC$, $BO = OD$, $\angle 1 = 35°$, $\angle 2 = 55°$, $CD = 6$ см.*

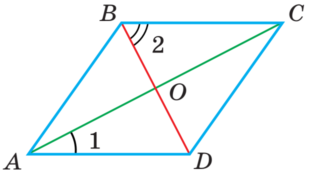


Рис. 63

Решение. Так как диагонали четырехугольника $ABCD$ точкой O делятся пополам, то это — параллелограмм (по признаку параллелограмма). Тогда $AD \parallel BC$ и $\angle ADB = \angle 2 = 55°$ (как накрест лежащие углы при $AD \parallel BC$ и секущей BD). В треугольнике AOD $\angle AOD = 180° - (\angle 1 + \angle ADO) = 180° - (35° + 55°) = 90°$. Значит, $AC \perp BD$. Так как диагонали параллелограмма $ABCD$ перпендикулярны, то это ромб (по признаку ромба). Поскольку у ромба все стороны равны, то искомый периметр $P_{ABCD} = 4 \cdot CD = 4 \cdot 6 = 24$ (см).

Ответ: 24 см.

Задача 2. *Дан параллелограмм $ABCD$ с периметром 128 см, $\angle D = 150°$, $\angle ACD = \angle ACB$. Найти расстояние от точки A до прямой BC.*

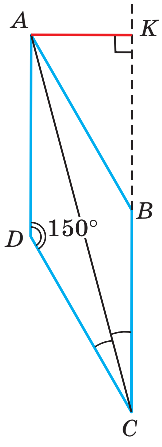


Рис. 64

Решение.

1) Проведем $AK \perp BC$. Длина перпендикуляра AK — искомое расстояние (рис. 64).

2) Так как $\angle ACD = \angle ACB$, то CA — биссектриса угла BCD и поэтому параллелограмм $ABCD$ — ромб (по признаку ромба).

3) $\angle ABC = \angle D = 150°$ (у параллелограмма противоположные углы равны).

4) В прямоугольном треугольнике AKB $\angle ABK = 180° - 150° = 30°$ (по свойству смежных углов).

5) $AB = 128 : 4 = 32$ (см) (у ромба все стороны равны).

6) $AK = \frac{1}{2}AB = \frac{32}{2} = 16$ (см) (катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы).

Ответ: 16 см.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

70. Используя транспортир, постройте равносторонний треугольник. Достройте его до ромба. Проведите другую диагональ этого ромба. Убедитесь, что диагонали ромба перпендикулярны. Найдите величину угла, образованного большей диагональю ромба и его стороной.

71. По данным на рисунках 65, *а)*—*в)* решите следующие задачи:

а) Найдите периметр ромба $ABCD$ (рис. 65, *а*), если $AB + BC + AD = 36$ см.
б) $ABCD$ — ромб, $\angle ACB = 55°$ (рис. 65, *б*). Найдите $\angle ACD$ и $\angle ABC$.
в) Найдите диагональ BD ромба $ABCD$ (рис. 65, *в*) с периметром 64 см, если $\angle A = 60°$.

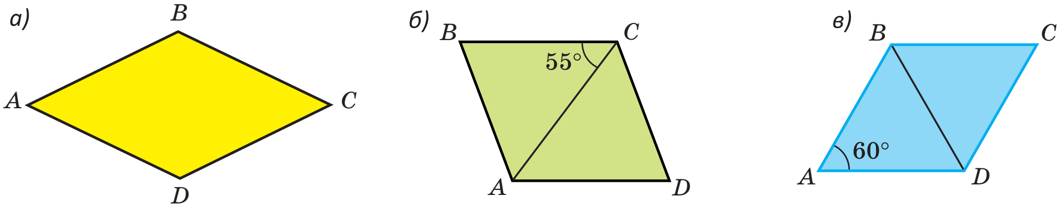


Рис. 65

72. Дан ромб $ABCD$, $\angle DBC = 64°$. Найдите:

а) $\angle ABC$; б) $\angle CDB$; в) $\angle BAD$; г) $\angle ACD$.

73. На рисунке 66 $ABCD$ — ромб с периметром 80 см, $AC = 24$ см, $BD = 32$ см. Найдите:

а) периметр треугольника AOB;
б) периметр треугольника BCD;
в) периметр треугольника ABC.

74. $ABCD$ — параллелограмм (рис. 67), $AB = BC$, $OM \perp DC$, $\angle COM = 58°$. Найдите $\angle ABD$.

75. $ABCD$ — параллелограмм (рис. 68), $\angle BAC = \angle DAC = 15°$. Расстояние от точки C до прямой AD равно 12 см. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$.

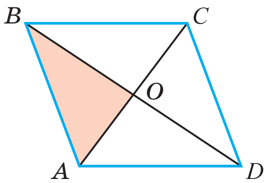


Рис. 66

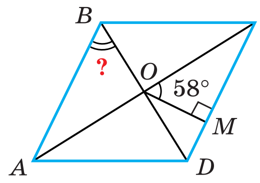


Рис. 67

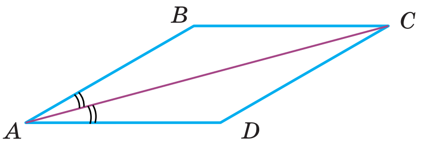


Рис. 68

76. Один из углов ромба равен 120°, меньшая диагональ равна 8 см. Найдите периметр ромба.

77. BK и BM — высоты ромба. Найдите углы треугольника KBM, если:

а) высота BK в 2 раза меньше стороны AB;
б) высота BM делит сторону CD пополам.

78. Докажите, что если у четырехугольника все стороны равны, то это — ромб.

79. Составьте алгоритм построения ромба с помощью циркуля и линейки:

а) по двум диагоналям d_1 и d_2;
б) по отрезку m, равному периметру ромба, и острому углу α ромба.

80. При помощи двусторонней линейки (обычной линейки с параллельными краями) разделите данный угол α пополам. Обоснуйте построение.

81. На координатной плоскости изобразите четырехугольник $ABCD$, у которого $A(-2;\ 2)$, $B(4;\ 4)$, $C(2;\ -2)$, $D(-4;\ -4)$. Докажите, что $ABCD$ — ромб.

Гимнастика ума

Из шести равных ромбов (рис. 69, *а*) сложили многоугольник (рис. 69, *б*).

1. Сколько всего ромбов можно насчитать на рисунке 69, *б*)?

2. Если периметр одного маленького ромба равен 48 см, то чему равен периметр сложенного многоугольника?

3. Выясните, что означает ромб в орнаменте белорусского флага.

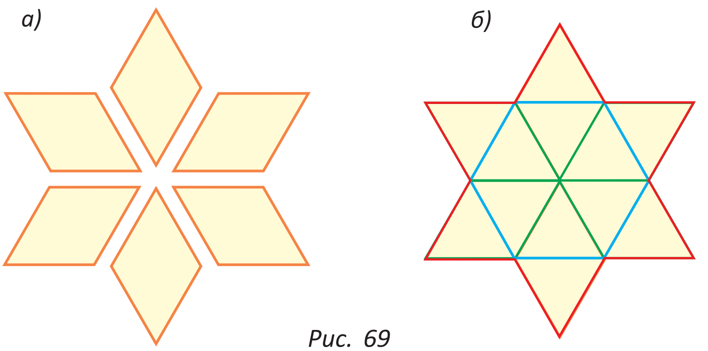


Рис. 69

§ 6. Квадрат

Определение. **Квадратом** называется прямоугольник, у которого все стороны равны.

На рисунке 70, *а*) изображен квадрат $ABCD$. Так как любой прямоугольник — это параллелограмм, то квадрат является параллелограммом с равными сторонами, у которого все углы прямые. Поэтому *квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба*. В частности, диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны и лежат на биссектрисах его углов. Точка пересечения диагоналей — *центр квадрата*.

Диагональ квадрата делит его на два равных равнобедренных прямоугольных треугольника (рис. 70, *б*). А две диагонали делят квадрат на 4 равных равнобедренных прямоугольных треугольника (рис. 70, *в*).

У квадрата, как у любого параллелограмма, имеется один центр симметрии (в точке пересечения диагоналей) и четыре оси симметрии (две из

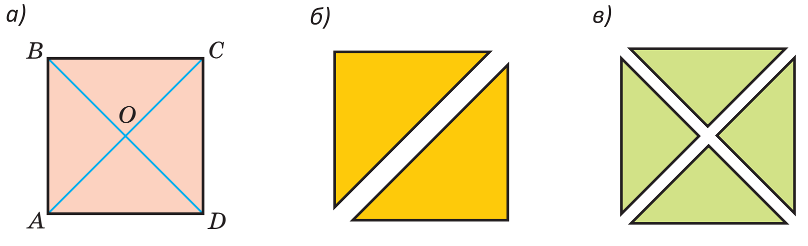


Рис. 70