Гимнастика ума

Из шести равных ромбов (рис. 69, *а*) сложили многоугольник (рис. 69, *б*).

1. Сколько всего ромбов можно насчитать на рисунке 69, *б*)?
2. Если периметр одного маленького ромба равен 48 см, то чему равен периметр сложенного многоугольника?
3. Выясните, что означает ромб в орнаменте белорусского флага.

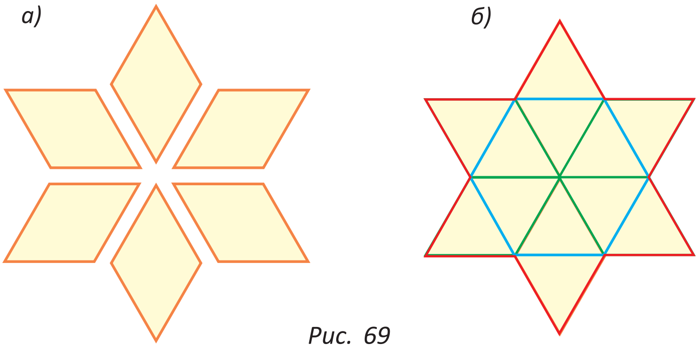


Рис. 69

§ 6. Квадрат

Определение. **Квадратом** называется прямоугольник, у которого все стороны равны.

На рисунке 70, *а*) изображен квадрат $ABCD$. Так как любой прямоугольник — это параллелограмм, то квадрат является параллелограммом с равными сторонами, у которого все углы прямые. Поэтому *квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба*. В частности, диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны и лежат на биссектрисах его углов. Точка пересечения диагоналей — *центр квадрата*.

Диагональ квадрата делит его на два равных равнобедренных прямоугольных треугольника (рис. 70, *б*). А две диагонали делят квадрат на 4 равных равнобедренных прямоугольных треугольника (рис. 70, *в*).

У квадрата, как у любого параллелограмма, имеется один центр симметрии (в точке пересечения диагоналей) и четыре оси симметрии (две из

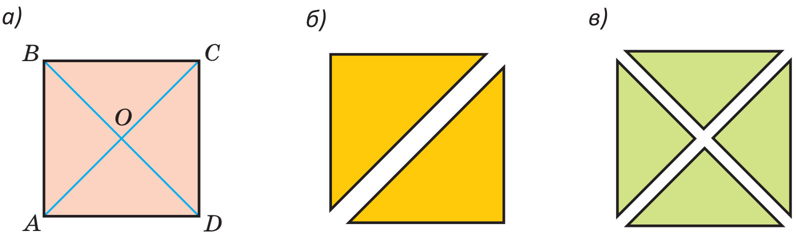


Рис. 70

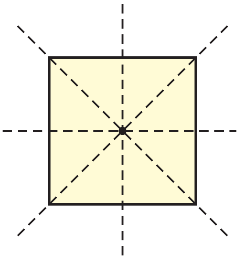


Рис. 71

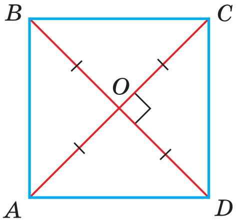


Рис. 72

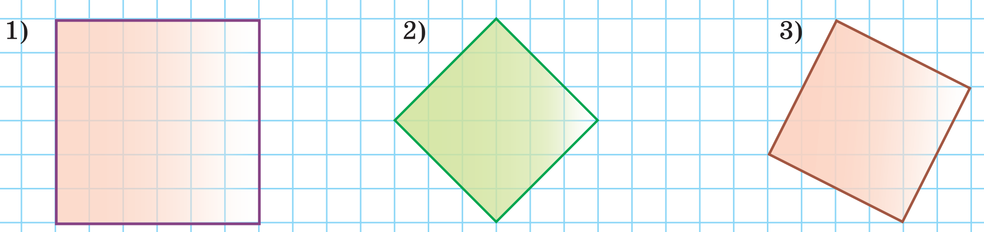
них содержат диагонали, две проходят через середины противоположных сторон) (рис. 71).

Для квадрата можно сформулировать признаки квадрата. Например, «Если у ромба есть прямой угол, то это квадрат», «Если у параллелограмма диагонали равны и перпендикулярны, то это квадрат». Докажем следующий признак квадрата: **«Если у четырехугольника диагонали равны, перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам, то это квадрат»**. Доказательство. Из того, что диагонали данного четырехугольника точкой пересечения делятся пополам (рис. 72), следует, что он — параллелограмм (по признаку параллелограмма). Из того, что у этого параллелограмма диагонали равны, следует, что это прямоугольник (по признаку прямоугольника). А из того, что диагонали параллелограмма перпендикулярны, следует, что это ромб (по признаку ромба). А так как у ромба стороны равны, то данный четырехугольник является прямоугольником с равными сторонами, то есть квадратом (по определению квадрата).

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

Тест 1

Какая из изображенных на рисунке фигур не является квадратом?
а) 1); б) 2); в) 3); г) все являются.
Докажите ваше утверждение.



Тест 2

1. Является ли квадрат ромбом? Аргументируйте ваш ответ.
2. Может ли ромб быть прямоугольником? Если да, то при каком условии?

Задания к § 6

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
ключевые задачи

Задача 1. *На рисунке 73 ABCD — квадрат, AKD — равносторонний треугольник. Найти* $\angle BMC$.

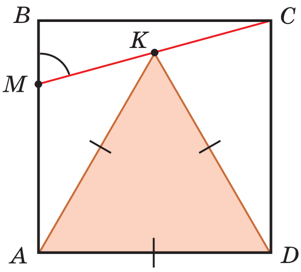


Рис. 73

Решение. У равностороннего треугольника все углы равны по 60°, поэтому $\angle ADK = 60°$. Так как $\angle ADC = 90°$, то $\angle KDC = 90° - 60° = 30°$. Поскольку $KD = AD$ и $AD = CD$, то $KD = CD$. Следовательно, треугольник KDC — равнобедренный с основанием KC. Углы при основании равнобедренного треугольника равны, поэтому $\angle KCD = \angle CKD = \dfrac{180° - 30°}{2} = 75°$.

Тогда $\angle BMC = \angle DCM$ как накрест лежащие углы при $AB \parallel CD$ и секущей MC, $\angle BMC = 75°$.

Ответ: 75°.

Задача 2. *На сторонах квадрата ABCD отмечены точки N, P, K, M так, что* $AN = BP = CK = DM$ (рис. 74). *Доказать, что* $NK \perp PM$ *и* $NK = PM$.

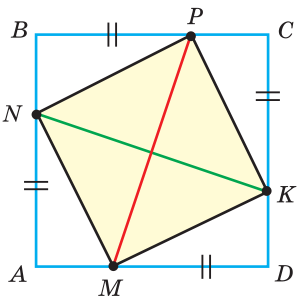


Рис. 74

Доказательство. Так как стороны квадрата равны и по условию $AN = BP = CK = DM$, то $NB = PC = KD = AM$. Тогда прямоугольные треугольники MAN, NBP, PCK и KDM равны по двум катетам. Следовательно, $MN = NP = PK = KM$. Так как у четырехугольника $MNPK$ стороны равны, то это ромб (задача 78). У прямоугольного треугольника сумма острых углов равна 90°. Поэтому $\angle ANM + \angle AMN = 90°$. Но $\angle KMD = \angle ANM$, откуда $\angle KMD + \angle AMN = 90°$ и $\angle NMK = 90°$. Поскольку ромб с прямым углом является квадратом, то $MNPK$ — квадрат. Мы знаем, что у квадрата диагонали равны и взаимно перпендикулярны. Значит, $NK \perp PM$ и $NK = PM$.
Что и требовалось доказать.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

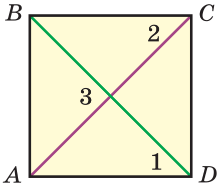


Рис. 75

82. На рисунке 75 $ABCD$ — квадрат. Найдите сумму углов 1, 2 и 3.

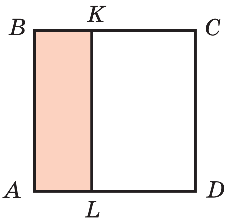


Рис. 76

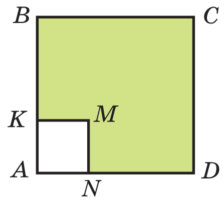


Рис. 77

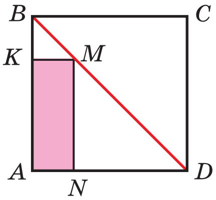


Рис. 78

83. На рисунке 76 $ABCD$ — квадрат, его периметр равен 36 см. Найдите сумму периметров прямоугольников $ABKL$ и $LKCD$, если $BK = 3{,}5$ см.

84. На рисунке 77 изображены квадраты $ABCD$ и $AKMN$. Периметр квадрата $ABCD$ равен 72 см, $AK = \frac{1}{2}KB$. Найдите периметр многоугольника $KBCDNM$.

85. На рисунке 78 $ABCD$ — квадрат, его сторона равна 12 см. Найдите периметр прямоугольника $AKMN$.

86. Докажите, что если в окружности провести два взаимно перпендикулярных диаметра, то концы этих диаметров будут вершинами квадрата.

87. Периметр квадрата равен 48 см. Найдите расстояние от центра квадрата до его сторон.

88. Докажите, что если бумажный квадрат $ABCD$ сложить по диагонали AC, то вершины B и D совпадут.

89. В равнобедренный прямоугольный треугольник помещен квадрат так, что две его вершины находятся на гипотенузе, а две другие на катетах (рис. 79). Найдите гипотенузу треугольника, если периметр квадрата равен 112 см.

90. Два отрезка MK и PE с концами на противоположных сторонах квадрата $ABCD$ взаимно перпендикулярны (рис. 80). Докажите, что $MK = PE$.

91. Докажите, что если у четырехугольника все стороны и все углы равны, то это квадрат.

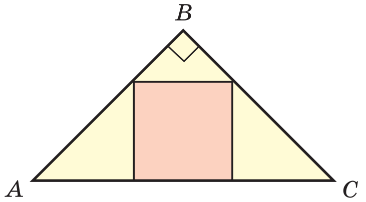


Рис. 79

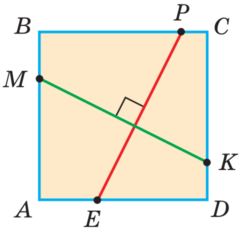


Рис. 80

92. Составьте алгоритм построения с помощью циркуля и линейки квадрата по его диагонали d.

93. На сторонах параллелограмма построены квадраты (сторона каждого квадрата равна соответствующей стороне параллелограмма). Докажите, что центры построенных квадратов являются вершинами квадрата.

94. На стороне AD квадрата $ABCD$ взята точка K, а на стороне CD взята точка M так, что $\angle AKB = \angle DKM = 60°$. Докажите, что $\angle MBK = 45°$.

Моделирование

Иногда множества каких-то элементов (чисел, фигур, ...) изображают в виде овалов (кругов Эйлера). На рисунке 81 изображены соотношения между множествами параллелограммов, прямоугольников, ромбов. Множество каких фигур находится в области, обозначенной знаком вопроса? Аргументируйте ваш ответ.

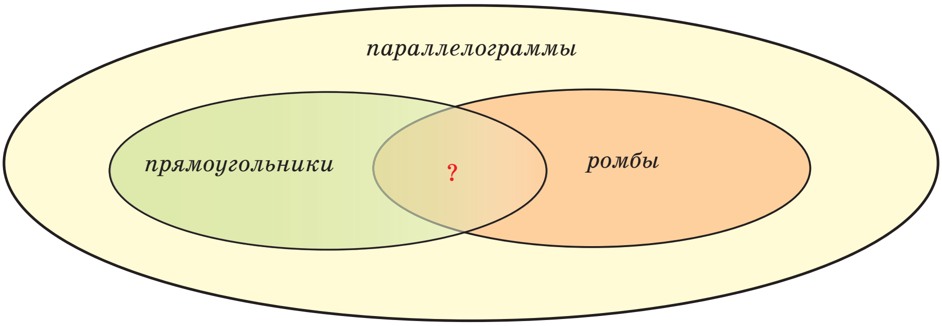


Рис. 81

ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Определение прямоугольника, ромба, квадрата.
2. Свойство диагоналей прямоугольника.
3. Признак прямоугольника.
4. Свойство диагоналей ромба.
5. Признаки ромба.
6. Свойства и признаки квадрата.

Умеем

1. Доказывать теорему о свойстве диагоналей прямоугольника и признак прямоугольника.
2. Доказывать теорему о свойстве диагоналей ромба и признак ромба.

Реальная геометрия

Для участия в республиканском конкурсе «Украсим Беларусь цветами» Маша, Алеся и Настя решили устроить квадратную клумбу в школьном дворе. Маша предлагает натянуть на четырех колышках по периметру клумбы четыре куска веревки одинаковой длины (рис. 82, *а*). Алеся предлагает натянуть на четырех колышках параллельно два куска веревки одинаковой длины, расстояние между которыми будет равно длине натянутых кусков (рис. 82, *б*). Настя предлагает взять два куска веревки одинаковой длины, отметить узелком их середины и натянуть веревки так, чтобы они пересекались в серединах и были перпендикулярны (рис. 82, *в*). У какой из девочек обязательно получится квадрат с вершинами в местах расположения колышков? Объясните ваш ответ.

Клумбы какой формы есть во дворе вашей школы?

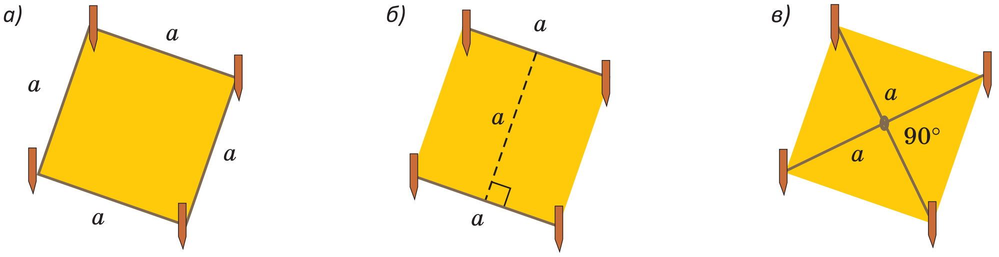


Рис. 82

Геометрия 3D

С понятием *призмы* мы познакомились в 7-м классе. У призмы две грани (*основания*) — это равные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, а остальные грани (*боковые*) — параллелограммы. Если призма прямая, то боковые грани — прямоугольники. На рисунках 83, *а*)—*в*) изображены треугольная, четырехугольная, шестиугольная призмы.

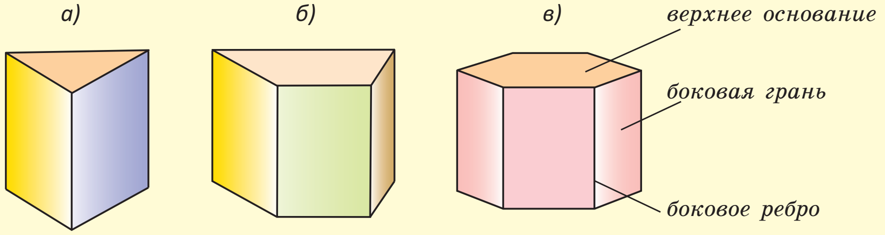


Рис. 83

Отрезок, который соединяет соответствующие вершины верхнего и нижнего оснований, называется *боковым ребром*. Так как боковые грани призмы — параллелограммы, а у параллелограмма противоположные стороны равны, то все боковые ребра призмы равны между собой.

Задания

1. *Сколько у шестиугольной призмы: а) граней; б) ребер (включая боковые ребра и стороны оснований)?*

Поверхность любой призмы состоит из двух оснований и боковой поверхности, которая состоит из боковых граней. На чертеже невидимые ребра изображаются штриховыми линиями. У треугольной и четырехугольной изображенных на рисунках 83, *а*), *б*) призм одна сторона основания невидима и невидима одна («задняя») грань.

2. *На рисунке 84 изображена прямая треугольная призма и ее развертка. С каким ребром совпадет ребро ED, если развертку сложить в призму?*

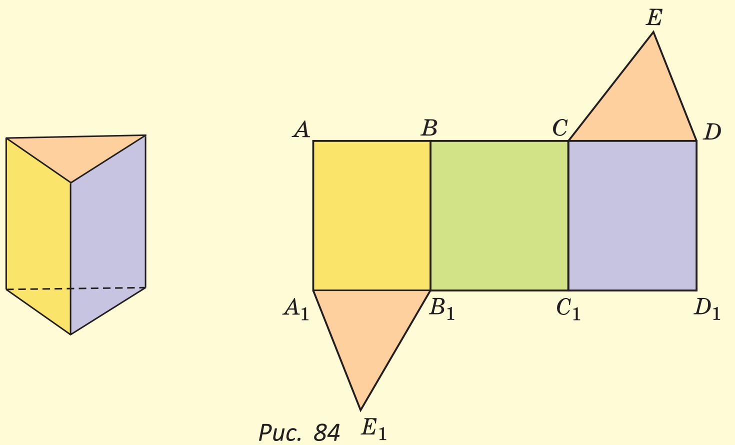


Рис. 84

Призма, у которой основания являются параллелограммами, называется *параллелепипедом* (рис. 85, *а*), его боковые грани — параллелограммы. Противоположные грани любого параллелепипеда равны между собой.

Если боковые грани параллелепипеда — прямоугольники, это *прямой параллелепипед*. Его боковые ребра перпендикулярны основаниям (рис. 85, *б*).

Если в основании прямого параллелепипеда лежит прямоугольник, то это *прямоугольный параллелепипед*. Все его грани — прямоугольники (рис. 85, *в*).

Если у прямоугольного параллелепипеда все ребра равны, то это *куб*. Все его грани — равные квадраты (рис. 85, *г*).

ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЫ

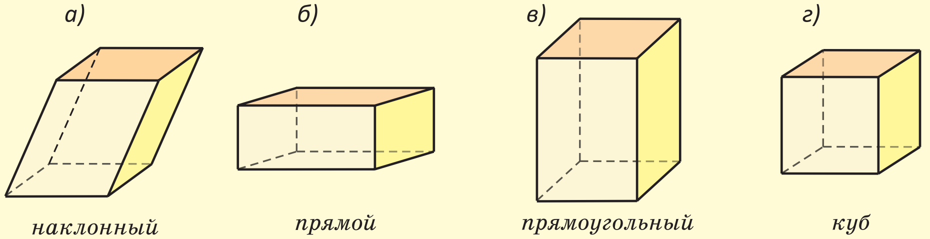


Рис. 85

Любой параллелограмм (включая прямоугольник и квадрат), расположенный в пространстве, на чертеже изображается параллелограммом. Изобразите прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, используя схему на рисунке 86.

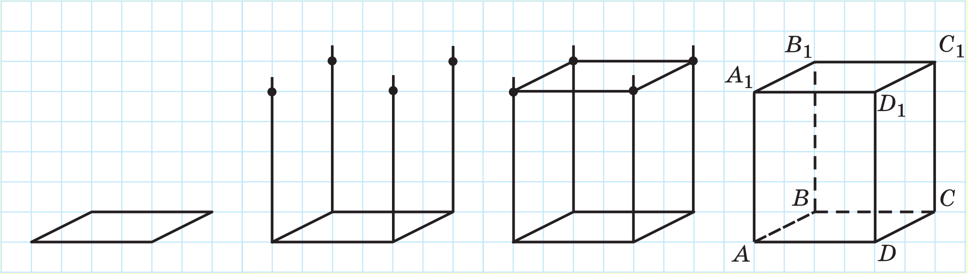


Рис. 86

3. *Три каких-то ребра параллелепипеда равны 3 см, 5 см, 8 см. Найдите сумму длин всех ребер данного параллелепипеда.*

§ 7. Теорема Фалеса

Теорема (теорема Фалеса).
Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие другую сторону угла, то на другой стороне угла отложатся равные отрезки.

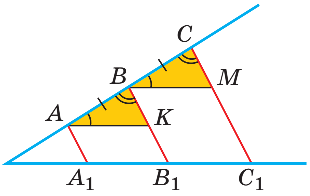


Рис. 87

Дано: $AB = BC$, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ (рис. 87).
Доказать: $A_1B_1 = B_1C_1$.
Доказательство. Проведем $AK \parallel A_1C_1$, $BM \parallel A_1C_1$. Так как две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой, то $AK \parallel BM$. Треугольники ABK и BCM равны по 2-му признаку равенства треугольников ($AB = BC$ по условию, $\angle BAK = \angle CBM$ как соответственные углы при параллельных прямых AK и BM и секущей AC, $\angle ABK = \angle BCM$ как соответственные углы при параллельных прямых BB_1 и CC_1 и секущей AC). Из равенства треугольников следует, что $AK = BM$. Так как четырехугольники AA_1B_1K и BB_1C_1M — параллелограммы (их противоположные стороны параллельны), то $A_1B_1 = AK$, $B_1C_1 = BM$ (как противоположные стороны параллелограмма). Значит, $A_1B_1 = B_1C_1$. Теорема доказана.

Замечания.
1. Отложенных равных отрезков может быть два, три и более.
2. Теорема Фалеса справедлива не только для сторон угла, но и для произвольных прямых.