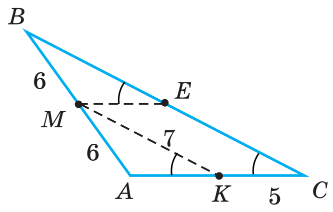


Рис. 94

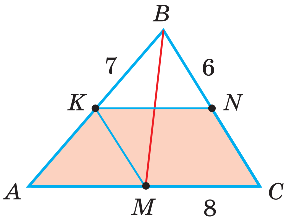


Рис. 95

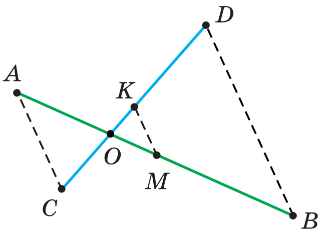


Рис. 96

101. При помощи циркуля и линейки разделите данный отрезок:

а) на 5 равных частей; б) в отношении 2 : 1.

§ 8. Средняя линия треугольника

Определение. **Средней линией треугольника** называется отрезок, который соединяет середины двух сторон треугольника.

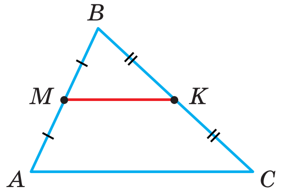


Рис. 97

На рисунке 97 точки M и K — середины сторон AB и BC соответственно треугольника ABC. Отрезок MK — средняя линия треугольника. Третью сторону AC будем называть основанием относительно средней линии MK. Так как у треугольника три стороны, то у него три средних линии.

Теорема (свойство средней линии треугольника).
Средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине.

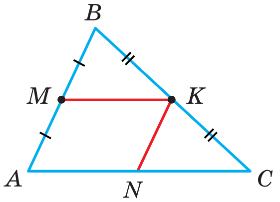


Рис. 98

Дано: $\triangle ABC$, MK — средняя линия (рис. 98).

Доказать: $MK \parallel AC$; $MK = \frac{1}{2}AC$.

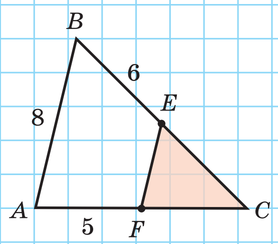
Доказательство. 1) Проведем через точку M прямую, параллельную AC. По теореме Фалеса она пройдет через середину отрезка BC — точку K и будет содержать среднюю линию MK. Тогда $MK \parallel AC$.

2) Через точку K проведем прямую KN (см. рис. 98), параллельную стороне AB ($N \in AC$). По теореме Фалеса $AN = NC$. Четырехугольник $AMKN$ — параллелограмм, так как у него противоположные стороны параллельны. Но у параллелограмма противоположные стороны равны. Поэтому $MK = AN = \frac{1}{2}AC$. Теорема доказана.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

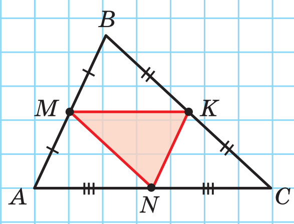
Тест 1

EF — средняя линия $\triangle ABC$.
Найдите P_{EFC}.
а) 12; б) 15; в) 19; г) 20.



Тест 2

$AB = 8$ см, $BC = 10$ см, $AC = 12$ см.
Найдите P_{MKN}.
а) 30 см; б) 24 см; в) 18 см; г) 15 см.



Задания к § 8

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
ключевые задачи

Задача. *Доказать, что середины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма.*

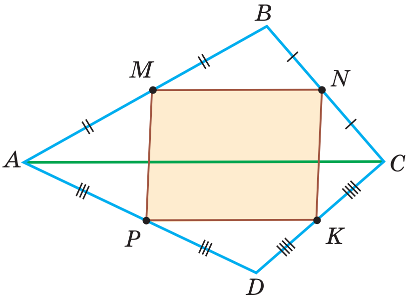


Рис. 99

Доказательство. Пусть точки M, N, K, P — середины сторон четырехугольника $ABCD$ (рис. 99). Отрезок MN — средняя линия треугольника ABC. По свойству средней линии $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$. Отрезок PK — средняя линия треугольника ADC. Поэтому $PK \parallel AC$ и $PK = \frac{1}{2}AC$. Так как у четырехугольника $MNKP$ стороны MN и PK равны и параллельны, то он параллелограмм (по признаку параллелограмма). Что и требовалось доказать.
Докажите указанные следствия самостоятельно.

Следствия

Диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ и отрезки MK и PN (средние линии четырехугольника) связаны определенными соотношениями. Сформулируем их в виде следствий из доказанного в исходной задаче утверждения (рис. 100).

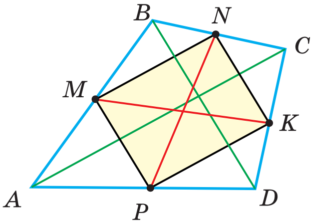


Рис. 100

1. *Если диагонали AC и BD равны, то MNKP — ромб и отрезки MK и PN взаимно перпендикулярны.*
2. *Если отрезки MK и PN взаимно перпендикулярны, то MNKP — ромб и диагонали AC и BD равны.*
3. *Если диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны, то MNKP — прямоугольник, и отрезки MK и PN равны.*
4. *Если отрезки MK и PN равны, то MNKP — прямоугольник и диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны.*

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

102. На рисунке 101 NM — средняя линия треугольника ABC. По размерам, указанным на рисунке в сантиметрах, найдите периметр треугольника ABC.

103. На рисунке 102 точки M и K — середины сторон BC и AC треугольника ABC. По данным на рисунке найдите величину угла C.

104. На рисунке 103 точки M, K, N — середины сторон треугольника ABC. Периметр треугольника ABC равен 44 см, $BK = 6$ см, $AM = 7$ см. Найдите длину отрезка MK и периметр четырехугольника $AMKN$.

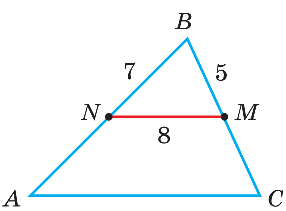


Рис. 101

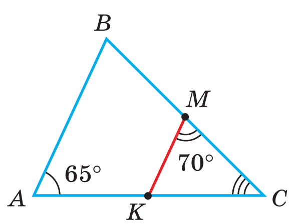


Рис. 102

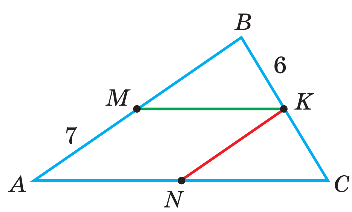


Рис. 103

105. а) Средние линии треугольника равны 3 м, 4 м и 5 м. Найдите периметр треугольника.
б) Периметр треугольника равен 210 м, его средние линии относятся как 3 : 5 : 7. Найдите наибольшую сторону данного треугольника.

106. Вершины треугольника $A_1B_1C_1$ являются серединами сторон треугольника ABC. Докажите, что $P_{ABC} = 2P_{A_1B_1C_1}$.

107. Докажите, что три средние линии треугольника разбивают его на четыре равных треугольника.

108. а) Докажите, что в треугольнике ABC средняя линия KM и медиана BN точкой пересечения O делятся пополам (рис. 104).

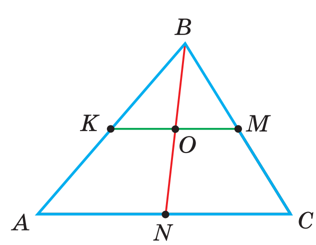


Рис. 104

б) Докажите, что средняя линия KM ($K \in AB$, $M \in BC$) треугольника ABC делит пополам любой отрезок BF, где точка $F \in AC$.

109. В треугольнике ABC средняя линия KM ($K \in AB$, $M \in BC$) и медиана BN пересекаются в точке O, $P_{AKON} = 80$ см, $P_{KBO} = 48$ см. Найдите длину стороны AC.

110. На рисунке 105 точки P, M, N и K — середины сторон четырехугольника $ABCD$. Найдите:

а) периметр четырехугольника $PMNK$, если $AC = 12$ см, $BD = 10$ см;

б) угол между прямыми AC и BD, если $AC = BD$ и $\angle KPN = 32°$.

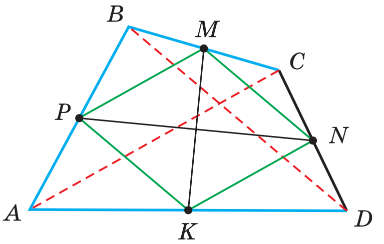


Рис. 105

111. Докажите, что середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.

112. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки M, N, K и P — середины сторон AB, BC, CD, AD соответственно. Периметр треугольника MNP равен периметру треугольника MKP. Докажите, что $AC \perp BD$.

113. Сторона AC треугольника ABC равна 24 см. Найдите длину отрезка, соединяющего середины медиан AK и CM.

114. В треугольнике ABC проведен отрезок BD так, что точка D лежит на стороне AC и $CD = AB$. Точка M — середина отрезка AD, точка N — середина отрезка BC. Найдите величину угла NMC, если $\angle BAC = 72°$.

§ 9. Свойство медиан треугольника

Вы уже знаете, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка является одной из замечательных точек треугольника.

> Теорема (свойство медиан треугольника).
> **Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершины.**

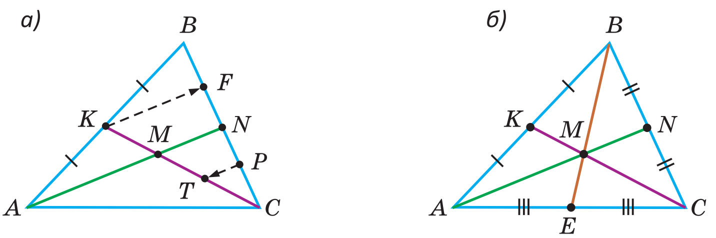


Рис. 106