б) Докажите, что средняя линия KM ($K \in AB$, $M \in BC$) треугольника ABC делит пополам любой отрезок BF, где точка $F \in AC$.

109. В треугольнике ABC средняя линия KM ($K \in AB$, $M \in BC$) и медиана BN пересекаются в точке O, $P_{AKON} = 80$ см, $P_{KBO} = 48$ см. Найдите длину стороны AC.

110. На рисунке 105 точки P, M, N и K — середины сторон четырехугольника $ABCD$. Найдите:
а) периметр четырехугольника $PMNK$, если $AC = 12$ см, $BD = 10$ см;
б) угол между прямыми AC и BD, если $AC = BD$ и $\angle KPN = 32°$.

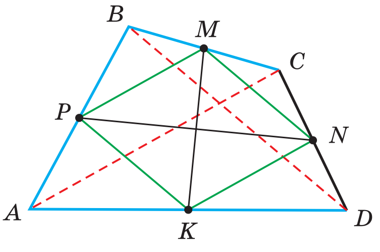


Рис. 105

111. Докажите, что середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.

112. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки M, N, K и P — середины сторон AB, BC, CD, AD соответственно. Периметр треугольника MNP равен периметру треугольника MKP. Докажите, что $AC \perp BD$.

113. Сторона AC треугольника ABC равна 24 см. Найдите длину отрезка, соединяющего середины медиан AK и CM.

114. В треугольнике ABC проведен отрезок BD так, что точка D лежит на стороне AC и $CD = AB$. Точка M — середина отрезка AD, точка N — середина отрезка BC. Найдите величину угла NMC, если $\angle BAC = 72°$.

§ 9. Свойство медиан треугольника

Вы уже знаете, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка является одной из замечательных точек треугольника.

> Теорема (свойство медиан треугольника).
> **Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершины.**

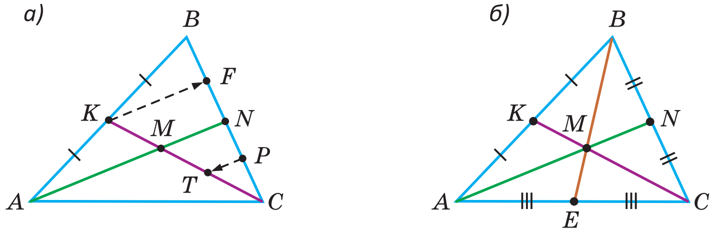


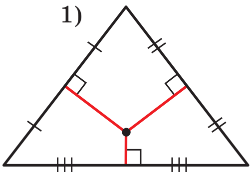
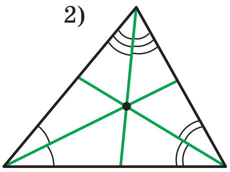
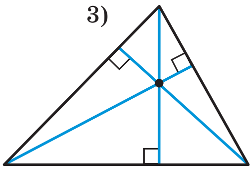
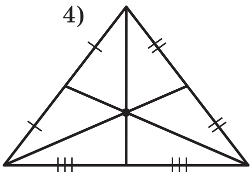
Рис. 106

Доказательство. 1) Вначале докажем, что любая медиана треугольника делится другой медианой в отношении $2 : 1$. Пусть AN и CK — медианы треугольника ABC, которые пересекаются в точке M (рис. 106, *а*). Проведем $KF \parallel AN$. Так как $AK = KB$, то по теореме Фалеса $BF = FN$. Из середины P отрезка NC проведем $PT \parallel AN$. Так как $CP = PN = NF$, то по теореме Фалеса $CT = TM = MK$. Отсюда $CM : MK = 2 : 1$. Аналогично, $AM : MN = 2 : 1$.

2) Теперь докажем, что все три медианы пересекаются в одной точке. Из п. 1 следует, что любая медиана делит другую медиану в отношении $2 : 1$. Тогда третья медиана BE (рис. 106, *б*) должна разделить медиану CK в отношении $2 : 1$, то есть пройти через точку M. Следовательно, все три медианы пересекаются в одной точке. Теорема доказана.

Теперь нами доказаны все утверждения о *четырех замечательных точках треугольника*. В одной точке пересекаются:

1) серединные перпендикуляры; 2) биссектрисы;
3) высоты; 4) медианы треугольника.

1) 
2) 
3) 
4) 

При помощи **Интернета** выясните, почему точку пересечения медиан треугольника называют его *центром тяжести*.

Задания к § 9

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
ключевые задачи

Задача. *Точки M и K — середины сторон AD и CD соответственно параллелограмма $ABCD$. Доказать, что отрезки BM и BK делят диагональ AC на три равные части.*

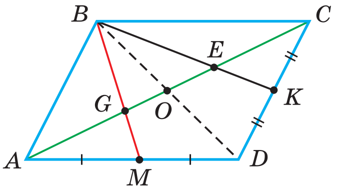


Рис. 107

Решение. Проведем в параллелограмме $ABCD$ диагональ BD (рис. 107). Так как диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам, то $BO = OD$ и тогда AO и BM — медианы треугольника ABD. Поскольку медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении $2 : 1$, то $AG : GO = 2 : 1$. Аналогично в треугольнике BCD CO и BK — медианы, откуда $CE : EO = 2 : 1$. Поскольку $AO = OC$, то $AG = GE = EC$. Что и требовалось доказать.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

115. На рисунке 108 AK и CP — медианы треугольника ABC, $AK = 12$ см, $PM = 3{,}5$ см. Найдите длины отрезков MK, AM, CM и CP.

116. На рисунке 109 BK и AN — медианы треугольника ABC, $AB = 30$ см, $BK = 15$ см, $AN = 36$ см. Найдите периметр треугольника KMN.

117. Точки N и K — середины отрезков AC и AB (рис. 110), $BN = 18$ см, $CK = 21$ см, $AC = 24$ см. Найдите периметр треугольника NMC.

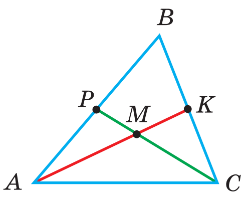


Рис. 108

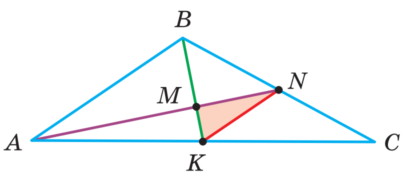


Рис. 109

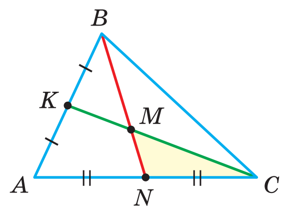


Рис. 110

118. Медианы AK и CL треугольника ABC пересекаются в точке M. Докажите, что периметры треугольников KML и AMC относятся как $1 : 2$.

119. В треугольнике ABC (рис. 111) проведены медианы AK, BN и CL, M — точка их пересечения и $NF \parallel AK$. Найдите периметр треугольника NMF, если $AK = 102$ см, $CL = 81$ см, $BN = 96$ см.

120. Докажите, что если у треугольника две медианы равны, то он равнобедренный.

121. В параллелограмме $ABCD$ (рис. 112) точка M — середина стороны CD. Отрезок AM пересекает диагональ BD в точке K, $AK = 32$ см. Найдите длину отрезка KM.

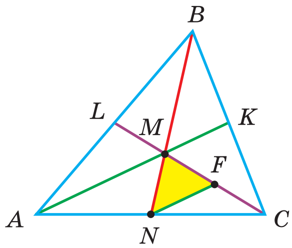


Рис. 111

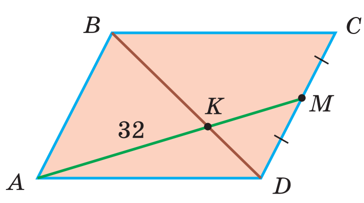


Рис. 112

122. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M. Медиану BN продлили за точку N на треть ее длины. Получили отрезок ND, где $ND = \frac{1}{3}BN$. Периметр треугольника DMC равен 42 см. Найдите периметр треугольника, составленного из медиан треугольника ABC.

123. Медианы AK и CM треугольника ABC взаимно перпендикулярны, $AC = 10$ см. Найдите длину третьей медианы BN.

Моделирование

Возьмите треугольник, сделанный из фанеры или толстого картона. Пусть девочки, используя метровую линейку, проведут в треугольнике две медианы. Затем пусть мальчики закрепят веревку в точке пересечения медиан (для картона можно использовать скотч).

Поднимите треугольник, лежащий на столе, за веревку. Если все сделано правильно, то треугольник останется в равновесии и его плоскость будет параллельна плоскости стола. Объясните при помощи знаний из курса физики данный эффект.

Центр тяжести тела — это точка приложения силы тяжести тела. Например, центр тяжести тонкого однородного стержня находится в его середине, центр тяжести тонкого однородного квадратного листа — в точке пересечения его диагоналей, центр тяжести тонкой однородной треугольной пластины — в точке пересечения медиан треугольника. При расчетах треугольник можно заменить грузом, который находится в точке пересечения медиан, масса которого равна массе треугольника. Поэтому точка пересечения медиан называется «центром тяжести треугольника».

ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Теорему Фалеса.
2. Определение средней линии треугольника.
3. Свойство средней линии треугольника.
4. Свойство медиан треугольника.

Умеем

1. Доказывать теорему Фалеса.
2. Делить отрезок на n равных частей при помощи циркуля и линейки.
3. Доказывать теорему о свойстве средней линии треугольника.
4. Доказывать теорему о свойстве медиан треугольника.

§ 10. Трапеция. Средняя линия трапеции

Определение. **Трапецией** называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны (*основания трапеции*), а две другие — не параллельны (*боковые стороны трапеции*).

Определение. **Высотой трапеции** называется перпендикуляр, проведенный из точки, взятой на прямой, содержащей одно основание трапеции, к прямой, содержащей другое основание.