Моделирование

Возьмите треугольник, сделанный из фанеры или толстого картона. Пусть девочки, используя метровую линейку, проведут в треугольнике две медианы. Затем пусть мальчики закрепят веревку в точке пересечения медиан (для картона можно использовать скотч).

Поднимите треугольник, лежащий на столе, за веревку. Если все сделано правильно, то треугольник останется в равновесии и его плоскость будет параллельна плоскости стола. Объясните при помощи знаний из курса физики данный эффект.

Центр тяжести тела — это точка приложения силы тяжести тела. Например, центр тяжести тонкого однородного стержня находится в его середине, центр тяжести тонкого однородного квадратного листа — в точке пересечения его диагоналей, центр тяжести тонкой однородной треугольной пластины — в точке пересечения медиан треугольника. При расчетах треугольник можно заменить грузом, который находится в точке пересечения медиан, масса которого равна массе треугольника. Поэтому точка пересечения медиан называется «центром тяжести треугольника».

ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Теорему Фалеса.
2. Определение средней линии треугольника.
3. Свойство средней линии треугольника.
4. Свойство медиан треугольника.

Умеем

1. Доказывать теорему Фалеса.
2. Делить отрезок на n равных частей при помощи циркуля и линейки.
3. Доказывать теорему о свойстве средней линии треугольника.
4. Доказывать теорему о свойстве медиан треугольника.

§ 10. Трапеция. Средняя линия трапеции

Определение. **Трапецией** называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны (*основания трапеции*), а две другие — не параллельны (*боковые стороны трапеции*).

Определение. **Высотой трапеции** называется перпендикуляр, проведенный из точки, взятой на прямой, содержащей одно основание трапеции, к прямой, содержащей другое основание.

Определение. **Средней линией трапеции** называется отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции.

На рисунке 113 изображена трапеция $ABCD$, где AD и BC — основания трапеции, AB и CD — ее боковые стороны, $AD \parallel BC$, $AB \nparallel CD$.

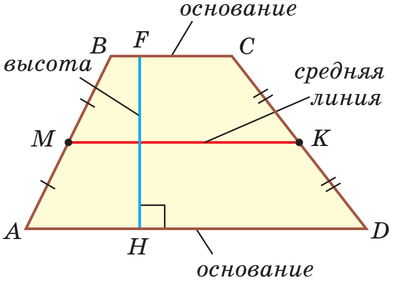

Рис. 113

Перпендикуляр FH (или его длина) — это высота трапеции. Все высоты трапеции равны как расстояния между параллельными прямыми.

Углы трапеции, прилежащие к боковой стороне, в сумме равны 180° как внутренние односторонние углы при параллельных прямых: $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle C + \angle D = 180°$.

Точки M и K — середины боковых сторон AB и CD соответственно, отрезок MK — средняя линия трапеции. Обычно основания трапеции обозначают буквами a и b, боковые стороны — c и d, среднюю линию — буквой m.

Теорема (о средней линии трапеции).
Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме, т. е. $m = \dfrac{a+b}{2}$.

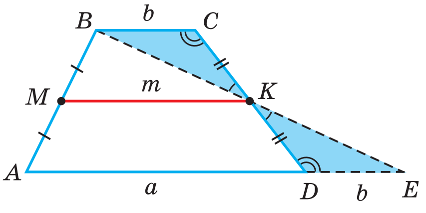

Рис. 114

Дано: $ABCD$ — трапеция, $AD = a$, $BC = b$ — ее основания, $MK = m$ — средняя линия (рис. 114).

Доказать: $m \parallel a$, $m \parallel b$, $m = \dfrac{a+b}{2}$.

Доказательство. Проведем прямую BK до пересечения с прямой AD в точке E. Треугольники BKC и EKD равны по 2-му признаку равенства треугольников ($CK = KD$ по определению средней линии трапеции, $\angle C = \angle D$ как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей CD), $\angle BKC = \angle EKD$ как вертикальные). Из равенства треугольников следует, что $BK = KE$, $DE = BC = b$. Значит, средняя линия MK трапеции $ABCD$ является средней линией треугольника ABE. По свойству средней линии треугольника $MK = \dfrac{1}{2}AE$ и $MK \parallel AE$. Так как $AE = a + b$, то $m = \dfrac{a+b}{2}$ и $m \parallel a$. Так как $a \parallel b$ и $a \parallel m$, то $m \parallel b$ (две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой). Теорема доказана.

Задания к § 10

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
ключевые задачи

Задача 1. *Большее основание AD трапеции $ABCD$ равно 18 см, средняя линия MN — 12 см. Найти меньшее основание BC трапеции.*

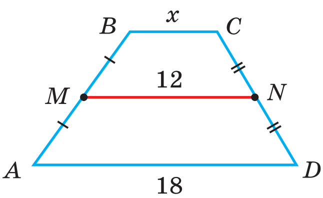

Рис. 115

Решение. Если MN — средняя линия трапеции, то $MN = \frac{AD + BC}{2}$ (рис. 115). Тогда $2MN = AD + BC$, $BC = 2MN - AD = 2 \cdot 12 - 18 = 6$ (см).
Ответ: 6 см.

Замечание. Возможны и другие способы записи решения задачи.
Например:
Пусть $AD = 18$ см, $MN = 12$ см, $BC = x$ см.
Тогда $MN = \frac{AD + BC}{2}$, $12 = \frac{18 + x}{2}$, $x + 18 = 24$, $x = 6$, $BC = 6$ см.

Задача 2. *Точки A и B находятся по одну сторону от прямой a. Расстояние от точки A до прямой a равно 7 см, а от точки B — 11 см. Найти расстояние от середины отрезка AB до прямой a.*

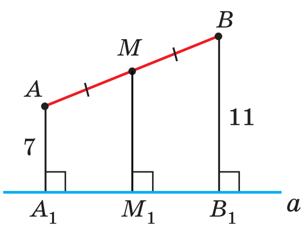

Рис. 116

Решение. Пусть M — середина отрезка AB (рис. 116). Так как расстояние от точки до прямой измеряется длиной перпендикуляра, опущенного из точки на прямую, то перпендикуляры AA_1 и BB_1 равны соответственно 7 см и 11 см. Нужно найти длину перпендикуляра MM_1 к прямой a. Поскольку два перпендикуляра к одной прямой параллельны, то $AA_1 \parallel BB_1$, $MM_1 \parallel AA_1$. По теореме Фалеса $A_1M_1 = M_1B_1$. Тогда A_1ABB_1 — трапеция, MM_1 — ее средняя линия. По теореме о средней линии трапеции $MM_1 = \frac{AA_1 + BB_1}{2} = \frac{7 + 11}{2} = 9$ (см).
Ответ: 9 см.

Задача 3. *Доказать, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен основаниям и равен полуразности оснований.*

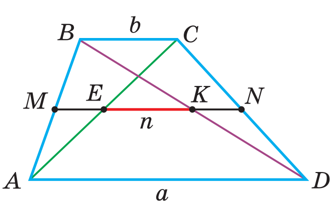

Рис. 117

Решение. Пусть $AD = a$, $BC = b$ — основания трапеции $ABCD$, точки E и K — середины диагоналей AC и BD (рис. 117). Обозначим $EK = n$. Нужно доказать, что $n \parallel a$, $n \parallel b$ и $n = \frac{a - b}{2}$. Так как средняя линия MN трапеции параллельна основаниям a и b, $AM = MB$, то по теореме Фалеса

MN пройдет через середины диагоналей AC и BD, то есть через точки E и K. Поэтому отрезок EK принадлежит средней линии MN. Значит, $n \parallel a$ и $n \parallel b$. Так как EN — средняя линия треугольника ACD, а KN — средняя линия треугольниа BDC, то по свойству средней линии треугольника $EN = \frac{1}{2}AD$, $KN = \frac{1}{2}BC$. Тогда $EK = EN - KN = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a-b}{2}$. Что и требовалось доказать.

Замечание. Полезно запомнить: *«Средняя линия трапеции с основаниями a и b ($b < a$) проходит через середины диагоналей и делится ими на отрезки: $ME = KN = \frac{b}{2}$, $EN = MK = \frac{a}{2}$, $EK = \frac{a-b}{2}$»* (см. рис. 117).

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

124. Изобразите трапецию $ABCD$ с основаниями $AD = 9$ см и $BC = 3$ см, у которой $\angle A = 45°$, высота равна 4 см. Найдите величину угла B трапеции. Проведите среднюю линию трапеции и измерьте ее длину. Найдите длину средней линии по формуле $m = \frac{a+b}{2}$. Сравните результаты.

125. В трапеции $ABCD$ основания $AD = 24$ см, $BC = 14$ см, $\angle A = 70°$, $\angle C = 130°$. Найдите $\angle B$, $\angle D$ и среднюю линию MN трапеции.

126. На рисунке 118 $ABCD$ — трапеция, $\angle A + \angle B + \angle C = 300°$. Найдите $\angle C$.

127. На рисунке 119 $AD \parallel BC$, M и K — середины отрезков AB и CD. Найдите:

а) $\angle MED$, если $\angle C = 125°$, $\angle BDC = 15°$;
б) $ME : EK$, если $AD = 24$ см, $BC = 18$ см.

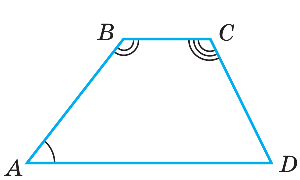

Рис. 118

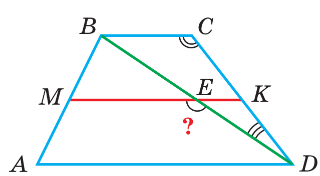

Рис. 119

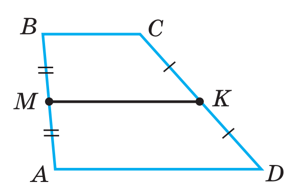

Рис. 120

128. На рисунке 120 отрезок MK — средняя линия трапеции $ABCD$. Найдите:

а) основание AD, если $BC = 24$ см, $MK = 30$ см;
б) сумму периметров четырехугольников $MBCK$ и $AMKD$, если $AD = 20$ см, $AB = 16$ см, $BC = 14$ см, $CD = 18$ см.

129. а) Основания трапеции относятся как 3 : 2, средняя линия трапеции равна 10 см. Найдите основания трапеции.
б) Одно из оснований трапеции на 4 см больше другого, средняя линия трапеции равна 5 см. Найдите основания трапеции.

130. MN — средняя линия трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC ($M \in AB$), $MB = 9$ см, $ND = 8$ см, $MN = 20$ см. Найдите периметр трапеции $ABCD$.

131. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) диагональ AC пересекает среднюю линию MN в точке K ($M \in AB$), а диагональ BD — в точке E, $AD = 38$ см, $BC = 30$ см. Найдите:

а) ME; б) MK; в) KE.

132. а) $ABCD$ — трапеция (рис. 121, *а*), $CK \parallel AB$, $AB = 10$ см, $BC = 6$ см, $CD = 12$ см, $AD = 20$ см. Найдите P_{KCD}.
б) $ABCD$ — трапеция (рис. 121, *б*), $CK \parallel BD$, $AD = 17$ см, $BC = 7$ см, $AC = 16$ см, $BD = 12$ см. Найдите P_{ACK}.

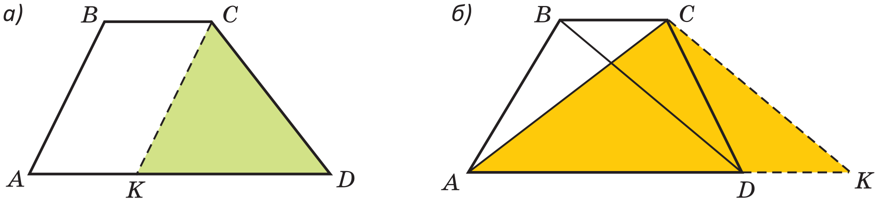

Рис. 121

133. MN — средняя линия трапеции $ABCD$ ($M \in AB$), периметр четырехугольника $MBCN$ равен 30 см, периметр четырехугольника $AMND$ равен 40 см, периметр трапеции $ABCD$ равен 50 см. Найдите MN.

134. Диагональ BD трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, где $BC < AD$, пересекает ее среднюю линию MK в точке N, $MN : NK = 3 : 1$, $AD = 24$ см. Найдите BC.

135. Докажите, что биссектрисы углов трапеции, прилежащих к боковой стороне, взаимно перпендикулярны.

136. Точки A и B лежат по разные стороны от прямой l и удалены от нее на расстояния 5 см и 9 см соответственно (рис. 122). Найдите расстояние от середины M отрезка AB до прямой l.

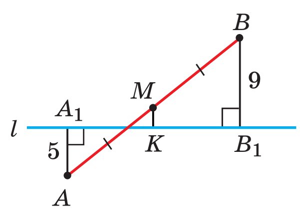

Рис. 122

137. $ABCD$ — трапеция, $BC \parallel AD$, CK и DK — биссектрисы ее углов C и D. Расстояние от точки K до прямой CD равно 4 см. Найдите высоту трапеции.

138. Основания трапеции равны 16 см и 10 см. Углы при большем основании равны 40° и 50°. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований.

139. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC, $AB = BC = CD$, $\angle ACD = 90°$. Найдите углы трапеции.

140. Докажите, что:

а) разность оснований трапеции меньше суммы ее боковых сторон;
б) сумма оснований трапеции меньше суммы ее диагоналей.

141. В трапеции $ABCD$ основание BC равно боковой стороне AB и в 2 раза меньше основания AD. Найдите градусную меру угла ACD.

142. Составьте алгоритм построения с помощью циркуля и линейки трапеции:
а) по основаниям и боковым сторонам;
б) по основаниям и диагоналям.
При каких соотношениях заданных элементов решение существует?

§ 11. Равнобедренная и прямоугольная трапеции

Определение. Трапеция, у которой боковые стороны равны, называется **равнобедренной**.

Теорема (свойства равнобедренной трапеции).
1) У равнобедренной трапеции углы при основании равны.
2) У равнобедренной трапеции диагонали равны.

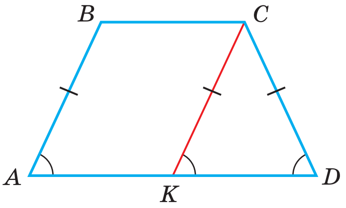

Рис. 123

Дано: $ABCD$ — трапеция, $AB = CD$.
Доказать: 1) $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$; 2) $AC = BD$.
Доказательство. 1) Проведем $CK \parallel AB$, $K \in AD$ (рис. 123). Четырехугольник $ABCK$ — параллелограмм (у него противоположные стороны параллельны). Так как у параллелограмма противоположные стороны равны, то $CK = AB$. Отсюда следует, что треугольник KCD — равнобедренный. Тогда $\angle K = \angle D$ как углы при основании равнобедренного треугольника. Но $\angle A = \angle K$ как соответственные углы при $AB \parallel CK$ и секущей AD. Поэтому $\angle A = \angle D$. Поскольку сумма углов трапеции, прилежащих к боковой стороне, равна 180°, то и $\angle B = \angle C$.