

- 138.** Основания трапеции равны 16 см и 10 см. Углы при большем основании равны 40° и 50° . Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований.
- 139.** Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC , $AB = BC = CD$, $\angle ACD = 90^\circ$. Найдите углы трапеции.
- 140.** Докажите, что:
- разность оснований трапеции меньше суммы ее боковых сторон;
 - сумма оснований трапеции меньше суммы ее диагоналей.
- 141.** В трапеции $ABCD$ основание BC равно боковой стороне AB и в 2 раза меньше основания AD . Найдите градусную меру угла ACD .
- 142.** Составьте алгоритм построения с помощью циркуля и линейки трапеции:
- по основаниям и боковым сторонам;
 - по основаниям и диагоналям.
- При каких соотношениях заданных элементов решение существует?

§ 11. Равнобедренная и прямоугольная трапеции

Определение. Трапеция, у которой боковые стороны равны, называется **равнобедренной**.

Теорема (свойства равнобедренной трапеции).

- У равнобедренной трапеции углы при основании равны.
- У равнобедренной трапеции диагонали равны.

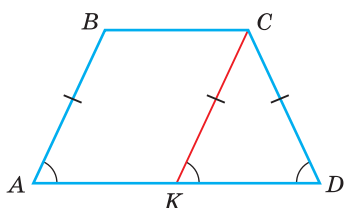


Рис. 123

Дано: $ABCD$ — трапеция, $AB = CD$.

Доказать: 1) $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$; 2) $AC = BD$.

Доказательство. 1) Проведем $CK \parallel AB$, $K \in AD$ (рис. 123). Четырехугольник $ABCK$ — параллелограмм (у него противоположные стороны параллельны). Так как у параллелограмма противоположные стороны равны, то $CK = AB$. Отсюда следует, что треугольник KCD — равнобедренный. Тогда $\angle K = \angle D$ как углы при основании равнобедренного треугольника. Но $\angle A = \angle K$ как соответственные углы при $AB \parallel CK$ и секущей AD . Поэтому $\angle A = \angle D$. Поскольку сумма углов трапеции, прилежащих к боковой стороне, равна 180° , то и $\angle B = \angle C$.

Поскольку сумма углов трапеции, прилежащих к боковой стороне, равна 180° , то и $\angle B = \angle C$.

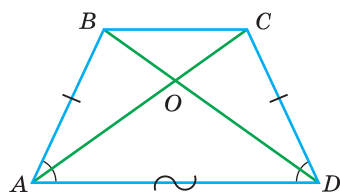


Рис. 124

2) Рассмотрим треугольники ACD и DBA (рис. 124). У них сторона AD — общая, $AB = CD$ по условию, $\angle CDA = \angle BAD$ как углы при основании равнобедренной трапеции. $\triangle ACD = \triangle DBA$ по 1-му признаку равенства треугольников. Отсюда $AC = BD$, то есть диагонали равнобедренной трапеции равны. Теорема доказана.

Следствие.

В равнобедренной трапеции $\angle ADB = \angle DAC$, $AO = DO$ и $BO = CO$ (см. рис. 124).

Используя рисунок 123, докажите признак равнобедренной трапеции: «Если углы при основании трапеции равны, то она — равнобедренная».

Определение. Трапеция, у которой есть прямой угол, называется **прямоугольной трапецией**.

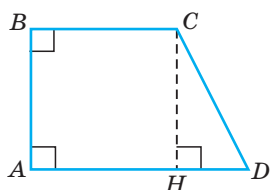


Рис. 125

На рисунке 125 изображена прямоугольная трапеция $ABCD$, у которой $\angle A = 90^\circ$. Так как $\angle A + \angle B = 180^\circ$, то $\angle B = 90^\circ$. Высота CH трапеции равна меньшей боковой стороне AB . В прямоугольном треугольнике CHD катет CH меньше гипотенузы CD . Поэтому боковая сторона AB — меньшая, а CD — большая. Следовательно, высота прямоугольной трапеции равна ее меньшей боковой стороне.



Задания к § 11

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

Задача 1. Доказать признак равнобедренной трапеции: «Если у трапеции диагонали равны, то она — равнобедренная».

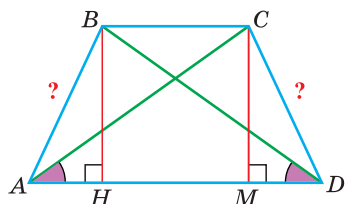


Рис. 126

Доказательство. Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC (рис. 126). Пусть у нее $AC = BD$. Опустим в трапеции высоты BH и CM . $BH = CM$ как расстояния между параллельными прямыми. Прямоугольные треугольники AMC и DHB равны по катету и гипотенузе. Из равенства треугольников следует равенство углов CAD и BDA . Тогда треугольники ACD и DBA равны по двум

сторонам ($AC = DB$, сторона AD — общая) и углу между ними. $AB = DC$ как соответствующие стороны в равных треугольниках. Трапеция $ABCD$ равнобедренная. Что и требовалось доказать.

Задача 2. Доказать, что высота равнобедренной трапеции, проведенная из вершины, принадлежащей меньшему основанию, делит большее основание на отрезки, равные полусумме и полуразности оснований.

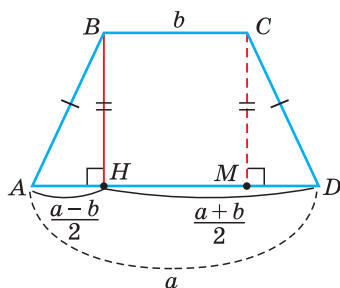


Рис. 127

Доказательство. Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$, у которой $AD = a$, $BC = b$ — основания, BH — высота (рис. 127). Докажем, что $HD = \frac{a+b}{2}$, $AH = \frac{a-b}{2}$. Проведем вторую высоту CM трапеции. Прямоугольные треугольники AHB и DMC равны по катету и гипотенузе. Поэтому $AH = MD$.

Четырехугольник $HBCM$ — прямоугольник, так как у него все углы прямые. Тогда

да $HM = BC = b$. Отсюда $AH = MD = \frac{AD - HM}{2} = \frac{a-b}{2}$, $HD = AD - AH = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$. Что и требовалось доказать.

Задача 3. $ABCD$ — прямоугольная трапеция с основаниями BC и AD . Меньшая боковая сторона трапеции равна ее меньшему основанию, большая боковая сторона равна 42 см и составляет с одной из диагоналей угол, равный 105° . Найти высоту трапеции.

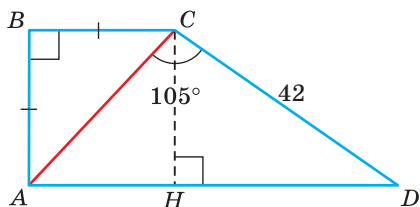


Рис. 128

Решение. Пусть AB — меньшая боковая сторона. Тогда $\angle B = 90^\circ$, $AB = BC$, $CD = 42$ см, $\angle ACD = 105^\circ$ (рис. 128). Треугольник ABC — прямоугольный равнобедренный. Поэтому $\angle ACB = 45^\circ$. Тогда $\angle BCD = 45^\circ + 105^\circ = 150^\circ$, $\angle D = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$. Проведем высоту CH трапеции. В прямоугольном треугольнике CHD катет CH , лежащий против угла в 30° , равен половине гипотенузы CD , то есть $CH = 21$ см.

Ответ: 21 см.



РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

143. На рисунках 129, а)–в) дана равнобедренная трапеция $MNKP$. По данным на рисунках найдите углы, отмеченные знаками вопроса.

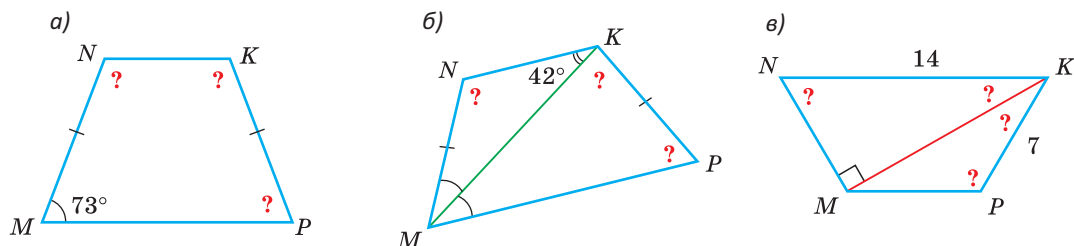


Рис. 129

144. а) BH и CM — высоты равнобедренной трапеции $ABCD$, меньшее основание BC равно 13 м, $MD = 5$ м. Найдите длину средней линии трапеции.

б) BH — высота равнобедренной трапеции $ABCD$, меньшее основание BC равно 8 см, $HD = 12$ см. Найдите большее основание трапеции.

145. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC углы A и D равны, $AB = 12,4$ см, средняя линия равна 15 см. Найдите периметр трапеции.

146. Докажите, что сумма противоположных углов равнобедренной трапеции равна 180° .

147. Диагонали трапеции $ABCD$ (AD и BC — основания трапеции) пересекаются в точке O , $AO = DO$. Докажите, что трапеция равнобедренная.

148. $ABCD$ — равнобедренная трапеция (рис. 130). По данным на рисунке найдите угол CDB .

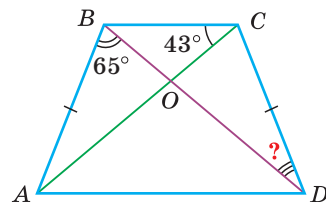


Рис. 130

149. Отрезок BH — высота равнобедренной трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$), DB — биссектриса ее угла D , $AD + BC = 48$, $AH = 8$. Найдите CD .

150. $ABCD$ — прямоугольная трапеция с основаниями AD и BC . Найдите среднюю линию трапеции, если:

а) $\angle A = 90^\circ$, $BC = 7$ см, $CD = 8$ см, $\angle C = 120^\circ$;

б) $\angle D = 90^\circ$, $\angle BAD = 45^\circ$, $AD = 12$ см, $CD = 5$ см;

в) $AB = 6$ см — меньшая боковая сторона, $BC : AD = 2 : 3$, $\angle BCD = 135^\circ$.

151. Диагональ равнобедренной трапеции равна 6 см и образует с основанием угол 60° . Найдите среднюю линию трапеции.

152. В трапеции $ABCD$ $\angle ADB = \angle DAC$, $AC \perp BD$, $AD + BC = 16$ см. Найдите высоту BH .

153. Составьте алгоритм построения равнобедренной трапеции:

а) по двум основаниям и боковой стороне;

б) по диагонали и двум основаниям.



ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Определения: трапеции, высоты трапеции, средней линии трапеции.
2. Свойство средней линии трапеции.
3. Определение прямоугольной и равнобедренной трапеций.
4. Свойства равнобедренной трапеции.
5. Признаки равнобедренной трапеции.

Умеем

1. Доказывать теорему о средней линии трапеции.
2. Доказывать свойства равнобедренной трапеции.

§ 12. Центральная и осевая симметрия

1. Центральная симметрия (симметрия относительно точки)

Точки A и A_1 называются *симметричными* относительно точки O (*центра симметрии*), если точка O является серединой отрезка AA_1 (рис. 131, а).

Центр симметрии считается симметричным сам себе.

Две фигуры F и F_1 называются симметричными относительно некоторой точки O , если каждой точке одной фигуры соответствует симметричная ей точка другой фигуры относительно точки O (рис. 131, б).

Фигура имеет центр симметрии (является *центрально-симметричной* фигурой), если каждой точке данной фигуры соответствует симметричная ей точка этой же фигуры относительно некоторой точки — центра симметрии (рис. 131, в).

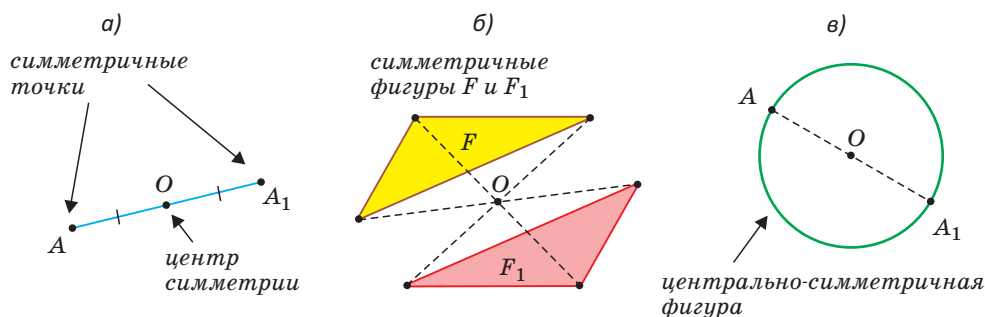


Рис. 131