ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Определения: трапеции, высоты трапеции, средней линии трапеции.
2. Свойство средней линии трапеции.
3. Определение прямоугольной и равнобедренной трапеций.
4. Свойства равнобедренной трапеции.
5. Признаки равнобедренной трапеции.

Умеем

1. Доказывать теорему о средней линии трапеции.
2. Доказывать свойства равнобедренной трапеции.

§ 12. Центральная и осевая симметрия

1. Центральная симметрия (симметрия относительно точки)

Точки A и A_1 называются *симметричными* относительно точки O (*центра симметрии*), если точка O является серединой отрезка AA_1 (рис. 131, *а*).

Центр симметрии считается симметричным сам себе.

Две фигуры F и F_1 называются симметричными относительно некоторой точки O, если каждой точке одной фигуры соответствует симметричная ей точка другой фигуры относительно точки O (рис. 131, *б*).

Фигура имеет центр симметрии (является *центрально-симметричной* фигурой), если каждой точке данной фигуры соответствует симметричная ей точка этой же фигуры относительно некоторой точки — центра симметрии (рис. 131, *в*).

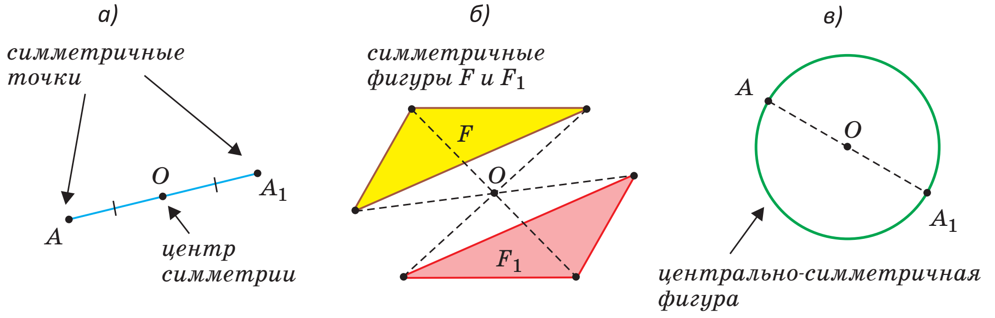


Рис. 131

Примерами центрально-симметричных фигур являются: *отрезок* (центр симметрии лежит в середине отрезка); *окружность* (центр симметрии лежит в центре окружности: концы любого диаметра симметричны относительно центра окружности).

Всякую фигуру F можно совместить с симметричной ей относительно некоторого центра O фигурой F_1 путем поворота ее на $180°$ вокруг точки O. И обратно, если фигуру F можно совместить с другой фигурой F_1 путем поворота на $180°$ вокруг некоторого центра O, то эти фигуры симметричны относительно центра. Следовательно, фигуры, симметричные относительно точки, равны между собой.

Объекты на рисунке 132 имеют центр симметрии.

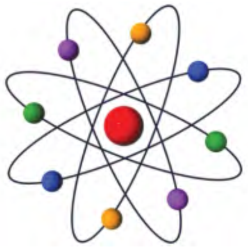


Рис. 132

Задача 1. *Построить фигуру, симметричную прямой BC относительно точки O.*

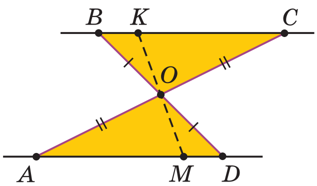


Рис. 133

Решение. Построив точки D и A, симметричные точкам B и C относительно некоторой точки O, получим прямую AD (рис. 133). Из равенства треугольников BOC и DOA следует, что $\angle OCB = \angle OAD$, откуда $BC \parallel AD$. Любая точка K прямой BC имеет симметричную ей относительно точки O точку M на прямой AD и наоборот, что следует из равенства треугольников COK и AOM.

Следовательно, фигура, симметричная данной прямой относительно не лежащей на ней точки, — это, во-первых, прямая, а во-вторых, это прямая, параллельная данной.

Из решенной задачи вытекают следующие свойства центральной симметрии:

1) *прямые, симметричные относительно точки, параллельны между собой*;
2) *отрезки, симметричные относительно точки, равны и параллельны*;
3) *треугольники, симметричные относительно точки, равны между собой.*

Для построения прямой, симметричной данной относительно данного центра симметрии, достаточно взять две точки на данной прямой, построить две симметричные им точки относительно центра симметрии и провести прямую через построенные точки.

Для построения отрезка, симметричного данному относительно данного центра симметрии, достаточно построить точки, симметричные концам данного отрезка относительно данного центра симметрии, и соединить отрезком построенные точки.

Для построения треугольника (многоугольника), симметричного данному относительно данного центра симметрии, достаточно построить точки, симметричные его вершинам относительно этого центра симметрии, и соединить их соответствующими отрезками.

Упражнения

1. Какие из следующих фигур являются центрально-симметричными фигурами и где находится их центр симметрии: а) квадрат; б) параллелограмм; в) угол; г) прямая; д) равносторонний треугольник?

2. Изобразите отрезок AB и точку M вне прямой AB. Постройте отрезок A_1B_1, симметричный отрезку AB относительно точки M.

3. Изобразите треугольник ABC. Постройте треугольник, симметричный треугольнику ABC: а) относительно вершины C; б) относительно точки пересечения медиан.

4. На координатной плоскости изобразите график функции $y = 2x + 4$. Постройте прямую, симметричную этому графику относительно начала координат. Найдите функцию вида $y = kx + b$, которая соответствует построенной прямой.

5. На координатной плоскости изобразите параллелограмм $ABCD$, где $A(3;\ 2)$, $B(2;\ 7)$, $C(6;\ 7)$, $D(7;\ 2)$. Постройте параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$, симметричный параллелограмму $ABCD$ относительно начала координат $O(0;\ 0)$.

6. На доске изображена часть треугольника ABC (рис. 134), где вершина C недоступна. На стороне AB отмечена середина M. При помощи циркуля и линейки нужно построить часть медианы CM, которая помещается на доске.

Выполните это задание, используя свойство центральной симметрии параллелограмма.

Рис. 134

2. Осевая симметрия (симметрия относительно прямой)

Точки A и A_1 называются *симметричными* относительно некоторой прямой l (*оси симметрии*), если прямая l является серединным перпендикуляром к отрезку AA_1 (рис. 135, *а*). Точки, принадлежащие оси симметрии, считаются симметричными сами себе.

Две фигуры F и F_1 называются симметричными относительно некоторой прямой l, если каждой точке одной фигуры соответствует симметричная ей точка другой фигуры относительно прямой l (рис. 135, *б*).

Фигура имеет ось симметрии (является *осесимметричной* фигурой), если каждой точке данной фигуры соответствует симметричная ей точка этой же фигуры относительно некоторой прямой — оси симметрии (рис. 135, *в*).

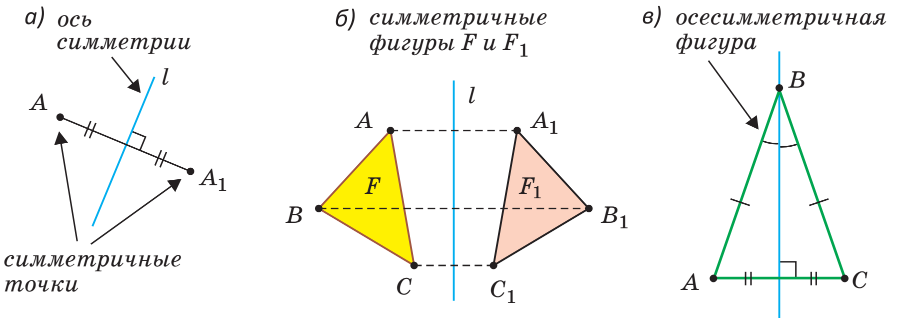


Рис. 135

Примерами фигур, имеющих ось симметрии, являются: *отрезок* (осью симметрии является серединный перпендикуляр к нему), *окружность* (осью симметрии является любая прямая, проходящая через центр окружности), *прямоугольник* (оси симметрии проходят через середины противоположных сторон).

Слово «ось» в словосочетании «ось симметрии» употребляется потому, что если часть плоскости с фигурой F повернуть в пространстве вокруг прямой l на 180° как вокруг оси, то фигура F совпадет с симметричной ей относительно прямой l фигурой F_1. Обратно, если какую-то фигуру F путем вращения вокруг некоторой прямой на 180° можно совместить с фигурой F_1, то фигуры F и F_1 симметричны относительно оси вращения (рис. 136).

Следовательно, на плоскости фигуры, симметричные относительно некоторой оси, равны между собой. То же касается симметричных частей фигуры, которая имеет ось симметрии. Например, если тетрадный лист сложить пополам, а затем развернуть, то получатся две симметричные части листа относительно оси — линии сгиба.

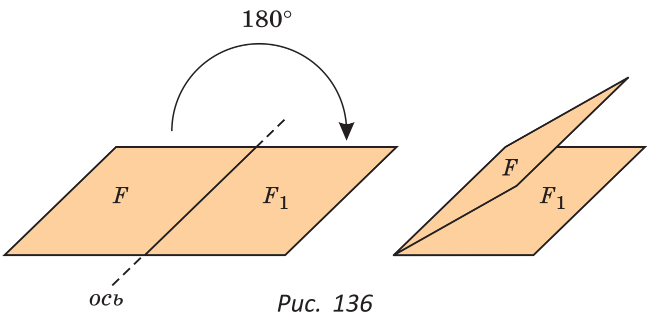


Рис. 136

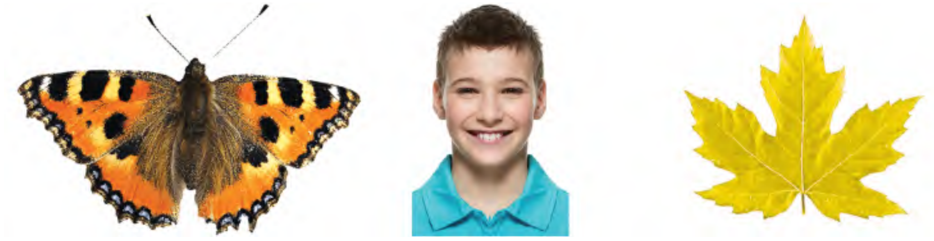


Рис. 137

Изображения на рисунке 137 имеют ось симметрии.

Задача 2. *Доказать, что равнобедренный треугольник имеет ось симметрии, которая содержит его биссектрису, проведенную к основанию.*

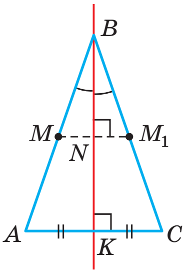


Рис. 138

Доказательство. Пусть BK — биссектриса треугольника ABC с основанием AC (рис. 138). Так как биссектриса BK будет высотой и медианой, то $AC \perp BK$ и $AK = KC$. Точки A и C симметричны относительно прямой BK, точка B симметрична самой себе. Возьмем точку M на стороне AB и проведем прямую MM_1, перпендикулярную прямой BK, где точка M_1 лежит на стороне BC. Так как в треугольнике MBM_1 биссектриса BN будет и высотой, то он — равнобедренный по признаку равнобедренного треугольника, и его биссектриса BN будет и медианой. Отсюда $MN = NM_1$ и, значит, точки M и M_1 симметричны относительно прямой BK. Следовательно, прямая BK — ось симметрии равнобедренного треугольника ABC.

Задача 3. *Доказать, что прямая, проходящая через середины противоположных сторон прямоугольника, является его осью симметрии.*

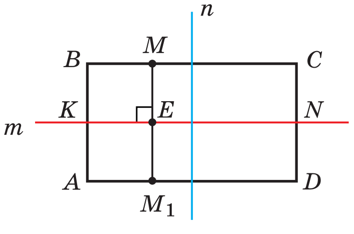


Рис. 139

Доказательство. Пусть $ABCD$ — прямоугольник (рис. 139), m и n — прямые, проходящие через середины его противоположных сторон. Докажем, что для любой точки M, взятой на стороне прямоугольника, найдется точка M_1, симметричная относительно прямой m и принадлежащая стороне прямоугольника. Проведем $MM_1 \perp m$. Докажем, что $ME = EM_1$. В § 4 (ключевая задача 3) мы доказали, что $KBCN$ и $AKND$ — равные прямоугольники. Отсюда следует, что расстояние между параллельными прямыми BC и KN равно расстоянию между параллельными прямыми AD и KN. Значит, $ME = EM_1$, и m — ось симметрии для отрезков AB и CD. Следовательно, прямая m — ось симметрии прямоугольника $ABCD$.

В силу доказанного прямая n, проходящая через середины сторон AD и BC прямоугольника, является второй его осью симметрии.

Выделим некоторые свойства осевой симметрии:

1) *прямые, симметричные относительно оси, пересекаются в точке, лежащей на оси симметрии, либо параллельны между собой*;

2) *отрезки, симметричные относительно оси, равны*;

3) *треугольники, симметричные относительно оси, равны*.

Упражнения

1. Какие из фигур, изображенных на рисунках 140, *а)—г)*, имеют ось симметрии? Перерисуйте эти фигуры в тетрадь и проведите их оси симметрии.

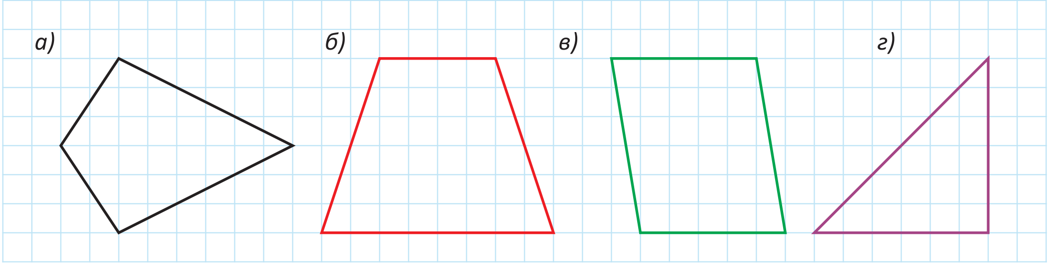


Рис. 140

2. Сколько осей симметрии у прямоугольника, квадрата, ромба, равнобедренной трапеции, равностороннего треугольника?

3. Изобразите отрезок AB и ось l, не пересекающую отрезок AB. Постройте отрезок A_1B_1, симметричный отрезку AB относительно прямой l.

4. Изобразите треугольник ABC. Постройте треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно оси, проходящей через вершину C.

5. На координатной плоскости изобразите параллелограмм $ABCD$, где $A(3; 2)$, $B(2; 7)$, $C(6; 7)$, $D(7; 2)$. Постройте параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$, симметричный параллелограмму $ABCD$ относительно оси Oy.

6. На координатной плоскости изобразите график функции $y = x + 3$. Постройте прямую, симметричную этому графику относительно оси Ox. Найдите формулу, задающую функцию, которая соответствует построенной прямой.

7. Какие из следующих слов-палиндромов имеют ось симметрии?

КАЗАК МАДАМ КОК ШАЛАШ ТОПОТ РАДАР

3. Зеркальная симметрия

Помимо центральной и осевой симметрии существует еще симметрия относительно плоскости. Она называется *зеркальной симметрией*. Точки A и A_1 симметричны относительно плоскости, если плоскость проходит

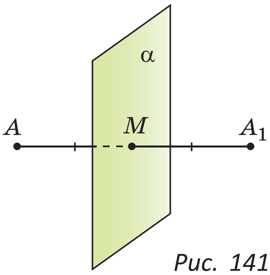


Рис. 141

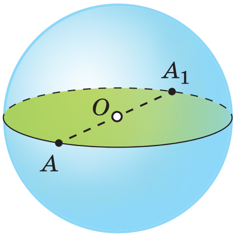


Рис. 142

через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна этому отрезку (рис. 141). То есть $AA_1 \perp \alpha$ и $AM = MA_1$.

В пространстве плоскостью симметрии обладает шар: любая плоскость, проходящая через его центр, делит шар на две части, симметричные относительно этой плоскости (рис. 142).

У прямоугольного параллелепипеда три плоскости симметрии (рис. 143).

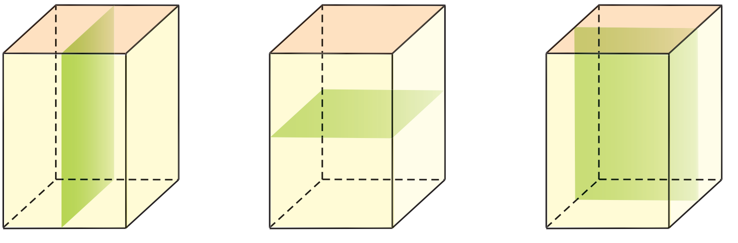


Рис. 143

Многие здания и сооружения обладают плоскостью симметрии (рис. 144). Можно указать плоскость, относительно которой симметрично тело человека или животного.

Название «зеркальная» симметрия объясняется тем, что предмет и его изображение в зеркале симметричны относительно плоскости зеркала. Отражения в воде деревьев, зданий являются примерами зеркальной симметрии.

Интересно знать. Игры стран СНГ — международные спортивные соревнования, которые проводятся с 2021 г. Талисманом II Игр стран СНГ, проходивших с 4 по 14 августа 2023 г. в Минске, стала рысь по имени Рыся.

Рис. 144

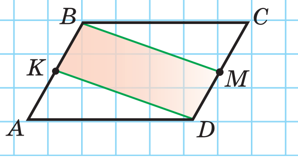
ЗАПОМИНАЕМ

1. **Сумма углов n-угольника равна $180°(n - 2)$.**
2. **Пять свойств параллелограмма:** «У параллелограмма:
   1) сумма соседних углов равна 180°;
   2) диагональ делит его на два равных треугольника;
   3) противоположные стороны равны;
   4) противоположные углы равны;
   5) диагонали точкой пересечения делятся пополам».
3. **Три признака параллелограмма:** «Если у четырехугольника:
   1) две стороны равны и параллельны, или
   2) противоположные стороны равны, или
   3) диагонали точкой пересечения делятся пополам,
   то данный четырехугольник — параллелограмм».
4. **Свойство диагоналей прямоугольника:** «Диагонали прямоугольника равны».
5. **Свойство диагоналей ромба:** «Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и лежат на биссектрисах его углов».
6. **Свойство средней линии треугольника:** «Средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине».
7. **Свойство средней линии трапеции:** «Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме».
8. **Теорема Фалеса:** «Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие другую сторону, то на другой стороне угла отложатся равные между собой отрезки».

ПРОВЕРЯЕМ СЕБЯ

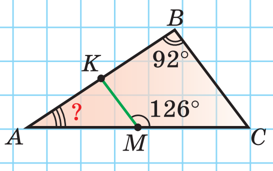
Тест 1

$ABCD$ — параллелограмм, M и K — середины его сторон. Докажите, что $DKBM$ — параллелограмм.



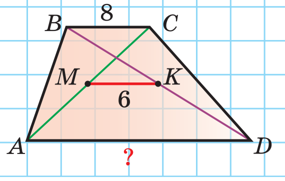
Тест 2

M и K — середины сторон AC и AB. Найдите $\angle A$.



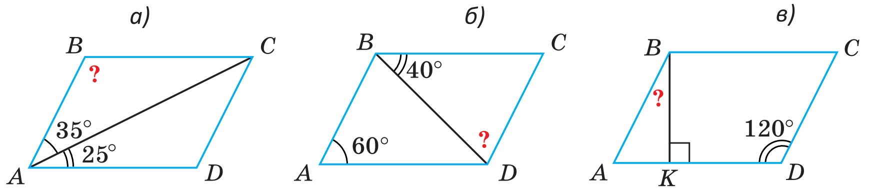
Тест 3

Найдите основание AD трапеции $ABCD$, если M и K — середины ее диагоналей.

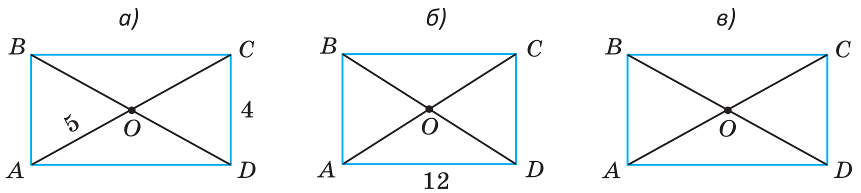


ПОДГОТОВКА К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ 1

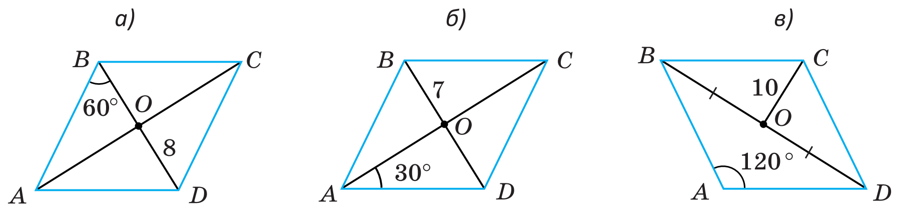
1. $ABCD$ — параллелограмм. Найдите угол, обозначенный знаком вопроса.



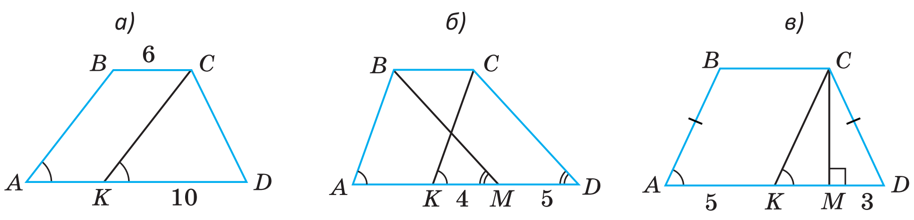
2. $ABCD$ — прямоугольник. Найдите:
а) P_{COD}; б) P_{AOD}, если $BD = 15$; в) AD, если $P_{AOB} = 25$, $P_{ACD} = 40$.



3. $ABCD$ — ромб. Найдите его периметр.



4. Найдите среднюю линию трапеции $ABCD$.



5. MK — средняя линия треугольника ABC. Найдите:
а) P_{ABC}; б) P_{ABC}, если $P_{ABKM} = 28$; в) P_{KBCM}, если $P_{AKM} = 18$.