# § 13. Площадь квадрата, прямоугольника

Под площадью многоугольника или другой ограниченной плоской фигуры понимают величину части плоскости, которую она занимает. За единицу измерения площади принимают площадь квадрата со стороной, равной единице измерения длины. Единица измерения площади называется квадратной единицей: 1 см$^2$ (квадратный сантиметр), 1 дм$^2$ (квадратный дециметр), 1 м$^2$ (квадратный метр) и т. д.

Для нахождения площади квадрата со стороной 5 см его можно разбить на квадраты со стороной 1 см (рис. 145). В одном горизонтальном ряду будет 5 таких квадратов, а рядов будет тоже 5. Получим $5 \cdot 5 = 5^2 = 25$ малых квадратов. Тогда площадь большого квадрата равна 25 см$^2$. Можно доказать, что если сторона квадрата равна дробному или иррациональному числу $a$, то площадь квадрата также равна $a^2$. То есть $S_{\text{кв.}} = a^2$.

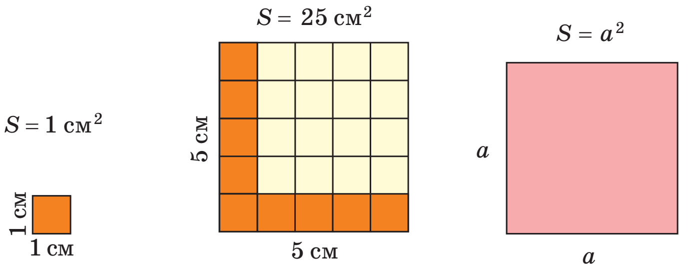



*Рис. 145*

Свойства (аксиомы) площади:

1. *Каждый многоугольник имеет площадь, которая выражается положительным числом.*

Это число показывает, сколько раз единица измерения площади, то есть единичный квадрат и его части, укладывается в данном многоугольнике.

2. *Равные многоугольники имеют равные площади.*

Отметим, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно. То есть если два многоугольника имеют равные площади, то они не обязательно равны между собой как фигуры.

3. *Если многоугольник разбить на несколько многоугольников, то сумма площадей полученных многоугольников будет равна площади данного.*

Так, если прямоугольник с площадью $S$ разбить на два прямоугольника с площадями $S_1$ и $S_2$ (рис. 146), то $S = S_1 + S_2$.

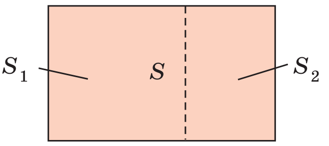



*Рис. 146*

Заметим, что для периметров указанных прямоугольников аналогичное свойство неверно: $P \neq P_1 + P_2$.

**Определение.** Фигуры, площади которых равны, называются **равновеликими.**

Вы уже знаете, что площадь прямоугольника равна произведению его длины и ширины, т. е. произведению его измерений. Прямоугольник со сторонами 4 см и 9 см равновелик квадрату со стороной 6 см (рис. 147).

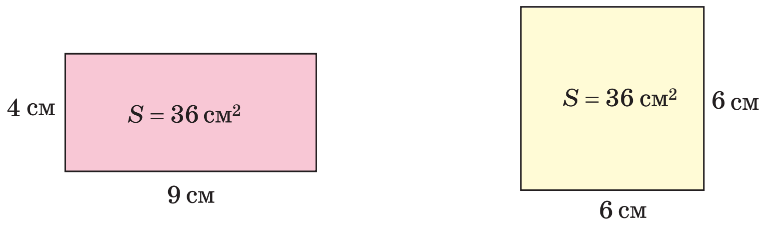



*Рис. 147*

Докажем справедливость формулы площади прямоугольника.

**Теорема. Площадь прямоугольника равна произведению его соседних сторон, то есть $S_{пр.} = ab$.**

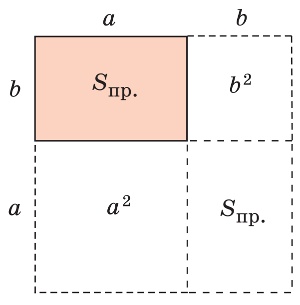



*Рис. 148*

Доказательство. Достроим прямоугольник со сторонами $a$ и $b$ до квадрата со стороной, равной $a + b$, как показано на рисунке 148. Площадь этого квадрата равна $(a + b)^2$. Построенный квадрат состоит из двух равных прямоугольников с площадью $S_{пр.}$ и двух квадратов: одного со стороной $a$ и площадью $a^2$, другого со стороной $b$ и площадью $b^2$.

Так как площадь многоугольника равна сумме площадей его частей, то

$2S_{пр.} + a^2 + b^2 = (a + b)^2$,
$2S_{пр.} + a^2 + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
$S_{пр.} = ab$.

Теорема доказана.

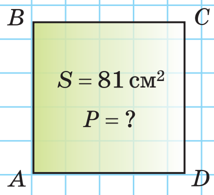
*Замечание.* Так как каждая сторона прямоугольника является его высотой относительно соседней стороны как основания, то можно говорить, что площадь прямоугольника равна произведению основания на высоту.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

### Тест 1

Площадь квадрата равна 81 см$^2$. Найдите периметр квадрата.

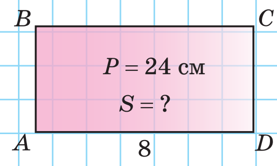
а) 9 см; в) 24 см;
б) 18 см; г) 36 см.




### Тест 2

Периметр прямоугольника равен 24 см, одна из его сторон — 8 см. Найдите площадь прямоугольника.

а) 128 см$^2$; в) 36 см$^2$;
б) 28 см$^2$; г) 32 см$^2$.




## Задания к § 13

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
### ключевые задачи

**Задача 1.** *Найти периметр квадрата, равновеликого прямоугольнику со сторонами* 9 *см и* 16 *см* (рис. 149).

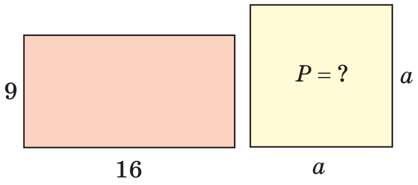



*Рис. 149*

Решение. Площадь прямоугольника равна произведению его соседних сторон, т. е. $S_{пр.} = 9 \cdot 16 = 144$ (см$^2$). Так как квадрат равновелик данному прямоугольнику, то $S_{кв.} = 144$ см$^2$. Но площадь квадрата равна квадрату длины его стороны, т. е. $S_{кв.} = a^2$. Отсюда $a^2 = 144$, $a = \sqrt{144} = 12$ (см) — сторона квадрата.

Периметр квадрата $P_{кв.} = 4a = 4 \cdot 12 = 48$ (см).

Ответ: 48 см.

*Замечание.* Уравнение $a^2 = 144$, вообще говоря, имеет два корня: –12 и 12. Считая, что длина стороны квадрата — величина положительная, мы сразу записали $a = \sqrt{144}$, а корень $a = -\sqrt{144}$ отбросили как посторонний.

**Задача 2.** *Из квадрата ABCD вырезали треугольник BOC, где O — точка пересечения диагоналей. Площадь многоугольника ABOCD равна* 54 *см*$^2$. *Найти длину стороны квадрата.*

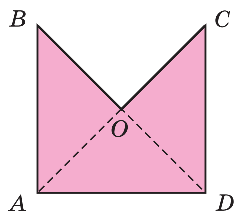



*Рис. 150*

Решение. Диагонали $AC$ и $BD$ делят квадрат $ABCD$ на 4 равных треугольника. Многоугольник $ABOCD$ состоит из трех равных треугольников: $AOD$, $AOB$ и $COD$ (рис. 150). Площадь каждого треугольника равна $54 : 3 = 18$ (см$^2$), а площадь квадрата $ABCD$ равна $18 \cdot 4 = 72$ (см$^2$). Так как площадь квадрата находится по формуле $S = a^2$, где $a$ — сторона квадрата, то $a^2 = 72$, $a = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ (см).

Ответ: $6\sqrt{2}$ см.

**Задача 3.** *Периметр прямоугольника равен 16 см, а его площадь равна 15 см$^2$. Найти стороны прямоугольника.*

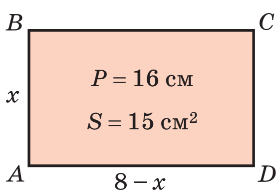



*Рис. 151*

Решение. *Способ* 1. Полупериметр прямоугольника (сумма длин двух соседних сторон) равен 8 см. Если одна его сторона равна $x$ см, то другая сторона равна $(8 - x)$ см (рис. 151). Площадь прямоугольника находится по формуле $S = ab$, где $a$ и $b$ — соседние стороны. По условию $x \cdot (8 - x) = 15$. Решим полученное уравнение:

$-x^2 + 8x = 15$, $x^2 - 8x + 15 = 0$,

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 1 \cdot 15}}{2} = 4 \pm 1; \ x_1 = 3, \ x_2 = 5.$$

Если $x = 3$, то $8 - x = 5$; если $x = 5$, то $8 - x = 3$. Стороны прямоугольника равны 3 см и 5 см.

*Способ* 2. Пусть $a$ и $b$ — стороны прямоугольника. Так как площадь прямоугольника $S = ab$, то $b = \frac{S}{a}$. По условию $S = 15$ см$^2$. Поэтому $b = \frac{15}{a}$. Периметр прямоугольника $P = 2(a + b) = 2\left(a + \frac{15}{a}\right)$. Из условия $2\left(a + \frac{15}{a}\right) = 16$. Отсюда $a^2 - 8a + 15 = 0$ (где $a \neq 0$). По теореме, обратной теореме Виета, $a_1 = 3$, $a_2 = 5$. Тогда $b_1 = \frac{15}{3} = 5$, $b_2 = \frac{15}{5} = 3$. Получили $a = 3$ (см), $b = 5$ (см) или $a = 5$ (см), $b = 3$ (см). Стороны прямоугольника равны 3 см и 5 см.

Ответ: 3 см и 5 см.

*Замечание.* Часто при решении геометрических задач с помощью уравнений при обозначении длин неизвестных отрезков размерность не ставится: вместо $x$ дм, $a$ см, $R$ м пишут $x$, $a$, $R$. В этом случае размерность указывают в скобках после нахождения корня уравнения: $x = 4$ (дм), $a = 5$ (см), $R = 6$ (м).

## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**154.** Измерьте большой линейкой размеры классной доски. Найдите ее площадь в квадратных метрах, округлив ответ до десятых.

**155.** Найдите площадь квадрата, если его сторона равна:

а) 25 мм; б) 1,2 дм; в) $3\sqrt{2}$ м.

**156.** На рисунках 152, *а)*—*в)* изображены фигуры, которые получены из квадратов, у которых вырезали какую-то часть. По указанным размерам найдите площадь оставшейся части каждого квадрата (все размеры даны в сантиметрах).

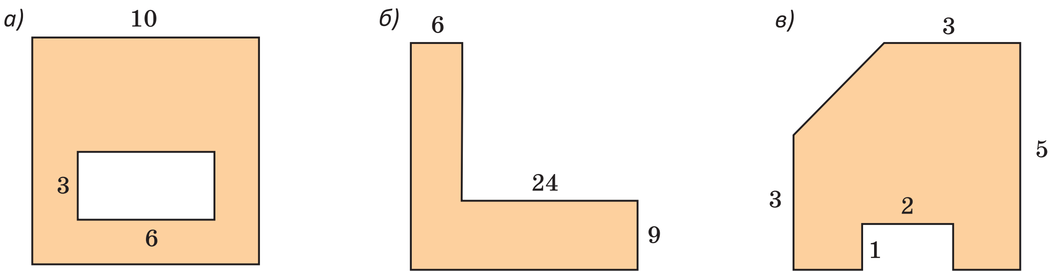



*Рис. 152*

**157.** Площадь прямоугольника равна 24 см². Стороны прямоугольника относятся как 2 : 3. Найдите стороны прямоугольника.

**158.** Дан прямоугольник $ABCD$. Сторону $AD$ продлили за точку $D$ на отрезок $DK$, равный стороне $AD$. Объясните, почему:

а) треугольник $ACK$ равновелик прямоугольнику $ABCD$;
б) треугольник $ABK$ равновелик прямоугольнику $ABCD$.

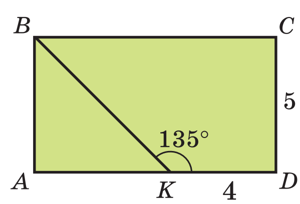



*Рис. 153*

**159.** а) Одна из сторон прямоугольника равна 18 дм, а его площадь равна 90 дм². Найдите периметр прямоугольника.
б) Периметр прямоугольника равен 36 м, а одна из его сторон равна 12 м. Найдите площадь прямоугольника.

**160.** В прямоугольнике $ABCD$ на стороне $AD$ взята точка $K$ (рис. 153), $\angle BKD = 135°$, $KD = 4$ см, $CD = 5$ см. Найдите площадь прямоугольника.

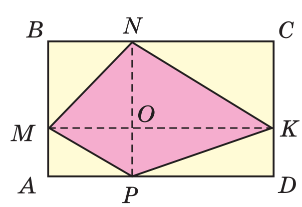



*Рис. 154*

**161.** В прямоугольнике $ABCD$ проведены отрезки $MK \parallel AD$, $NP \parallel AB$ (рис. 154). Докажите, что площадь четырехугольника $MNKP$ равна $\frac{1}{2}$ площади прямоугольника $ABCD$.

**162.** а) Периметр прямоугольника равен 22 см. Одна из сторон на 3 см больше другой. Найдите площадь прямоугольника.
б) Площадь прямоугольника равна 80 см$^2$. Одна из сторон на 11 см меньше другой. Найдите периметр прямоугольника.

**163.** Площадь прямоугольника равна 48 см$^2$. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в серединах сторон этого прямоугольника.

**164.** На координатной плоскости дан прямоугольник $ABCD$, где $A(-3; -2)$, $C(4; 3)$, $D(4; -2)$. Найдите площадь этого прямоугольника, если единичный отрезок равен 1 см.

**165.** а) Каждую сторону квадрата увеличили в 3 раза. Определите, во сколько раз увеличилась площадь квадрата.
б) Определите, во сколько раз нужно уменьшить каждую сторону квадрата, чтобы его площадь уменьшилась в 16 раз.

**166.** Каждую сторону квадрата увеличили на 10 %. На сколько процентов увеличилась площадь квадрата?

**167.** Прямоугольник разбит прямыми, перпендикулярными его сторонам, на четыре части (рис. 155). Площади трех частей равны 8, 10 и 12. Найдите площадь четвертой (незакрашенной) части прямоугольника.

**168.** Два равновеликих четырехугольника $ABCD$ и $MNPK$ совместили, как показано на рисунке 156. Докажите, что сумма площадей зеленых треугольников равна сумме площадей красных треугольников.

**169.** Точки $M$, $N$, $P$, $K$ — середины сторон квадрата $ABCD$ (рис. 157).
а) Какую форму имеет желтый четырехугольник? Обоснуйте ваш ответ.
б) Какую часть составляет его площадь от площади квадрата $ABCD$:

1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{4}$; 4) $\frac{1}{5}$; 5) $\frac{1}{8}$?

Докажите, что ваше утверждение верно.

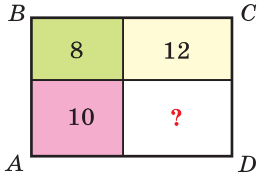



*Рис. 155*

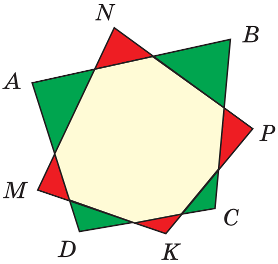



*Рис. 156*

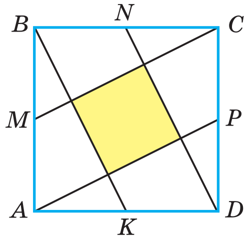



*Рис. 157*

### Гимнастика ума

На рисунке 158 изображены квадраты со сторонами 10 см, 9 см, 7 см и 4 см. Известно, что сумма площадей двух красных частей равна 112 см$^2$. Найдите сумму площадей двух зеленых частей.

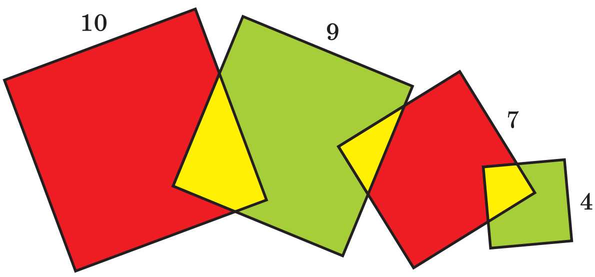



*Рис. 158*

## § 14. Площадь параллелограмма

Напомним, что сторону параллелограмма, к которой проведена высота, мы называем его основанием.

Теорема. **Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту, то есть $S_{\text{пар.}} = ah$.**

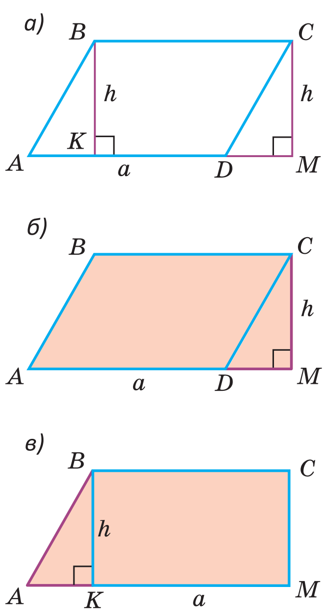



*Рис. 159*

Доказательство. Пусть $ABCD$ — параллелограмм (рис. 159, *а*), $AD = a$ — основание, $BK = h$ — высота. Проведем в параллелограмме высоту $CM = h$. Четырехугольник $KBCM$ является прямоугольником, так как у него все углы прямые. Прямоугольные треугольники $ABK$ и $DCM$ равны по катету и гипотенузе ($BK = CM$ как высоты, проведенные к одному основанию, $AB = CD$ как противоположные стороны параллелограмма). Значит, равны и их площади.

Рассмотрим трапецию $ABCM$. Площадь трапеции $ABCM$, с одной стороны, равна сумме площадей параллелограмма $ABCD$ и прямоугольного треугольника $DCM$ (рис. 159, *б*). С другой стороны, она равна сумме площадей прямоугольника $KBCM$ и прямоугольного треугольника $ABK$ (рис. 159, *в*).