Гимнастика ума

На рисунке 158 изображены квадраты со сторонами 10 см, 9 см, 7 см и 4 см. Известно, что сумма площадей двух красных частей равна 112 см^2. Найдите сумму площадей двух зеленых частей.

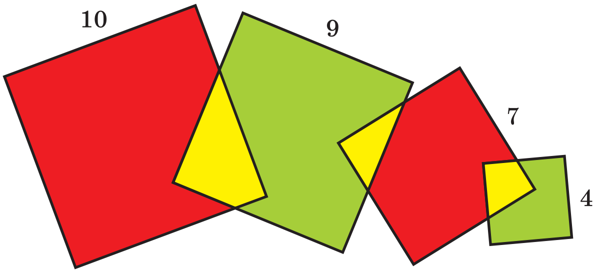


Рис. 158

§ 14. Площадь параллелограмма

Напомним, что сторону параллелограмма, к которой проведена высота, мы называем его основанием.

Теорема. **Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту, то есть $S_{\text{пар.}} = ah$.**

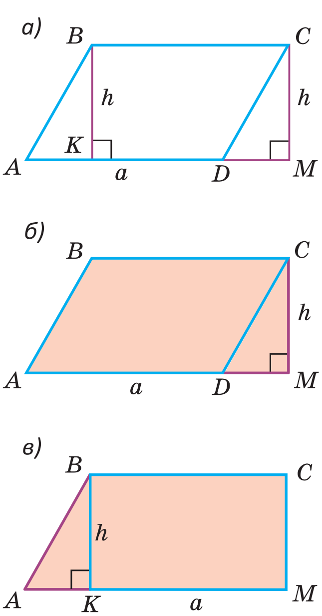


Рис. 159

Доказательство. Пусть $ABCD$ — параллелограмм (рис. 159, *а*), $AD = a$ — основание, $BK = h$ — высота. Проведем в параллелограмме высоту $CM = h$. Четырехугольник $KBCM$ является прямоугольником, так как у него все углы прямые. Прямоугольные треугольники ABK и DCM равны по катету и гипотенузе ($BK = CM$ как высоты, проведенные к одному основанию, $AB = CD$ как противоположные стороны параллелограмма). Значит, равны и их площади.

Рассмотрим трапецию $ABCM$. Площадь трапеции $ABCM$, с одной стороны, равна сумме площадей параллелограмма $ABCD$ и прямоугольного треугольника DCM (рис. 159, *б*). С другой стороны, она равна сумме площадей прямоугольника $KBCM$ и прямоугольного треугольника ABK (рис. 159, *в*).

В силу равенства площадей треугольников ABK и DCM площадь параллелограмма $ABCD$ равна площади прямоугольника $KBCM$. Площадь прямоугольника $S_{KBCM} = BC \cdot BK$, площадь параллелограмма $S_{ABCD} = BC \cdot BK = AD \cdot BK$. То есть $S_{\text{пар.}} = ah$. Теорема доказана.

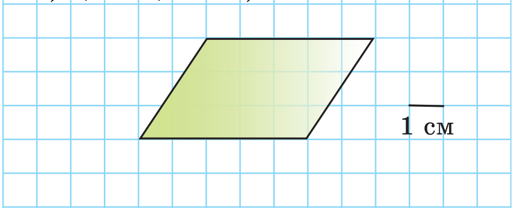
Замечание. Иногда высоту параллелограмма, проведенную к стороне a, обозначают h_a, а высоту, проведенную к стороне b, обозначают h_b. Тогда справедливо равенство $S_{\text{пар.}} = ah_a = bh_b$, откуда $a : b = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b}$.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

Тест 1

Найдите площадь параллелограмма, если размеры одной клетки 1 см × 1 см.

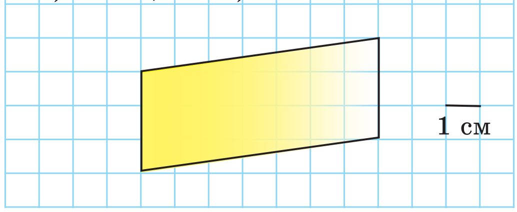
а) 15 см^2; в) 16 см^2;
б) 7,5 см^2; г) 8 см^2.



Тест 2

Найдите площадь параллелограмма, если размеры одной клетки 1 см × 1 см.

а) 42 см^2; в) 21 см^2;
б) 28 см^2; г) 14 см^2.



Задания к § 14

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
ключевые задачи

Задача 1. *Стороны параллелограмма равны* 12 *см и* 8 *см. Высота, проведенная к большей стороне, равна* 10 *см. Найти высоту, проведенную к меньшей стороне параллелограмма.*

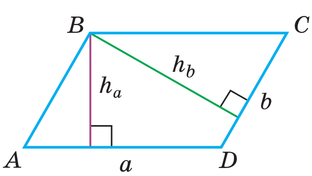


Рис. 160

Решение. Пусть a = 12 см и b = 8 см — стороны параллелограмма $ABCD$, h_a и h_b — его высоты и h_a = 10 см (рис. 160). Так как $S = ah_a$ и $S = bh_b$ — это площадь одного и того же параллелограмма, то $ah_a = bh_b$, то есть $12 \cdot 10 = 8 \cdot h_b$. Отсюда $h_b = \frac{12 \cdot 10}{8} = 15$ (см).

Ответ: 15 см.

Замечание. Из равенства $ah_a = bh_b$ следует, что $\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$. То есть стороны параллелограмма обратно пропорциональны его высотам. К большей стороне параллелограмма проведена меньшая высота, а к меньшей стороне — бо́льшая.

Задача 2. *Площадь параллелограмма ABCD равна 24 см^2, BC = 6 см, ∠ACB = 30°. Найти длину диагонали AC.*

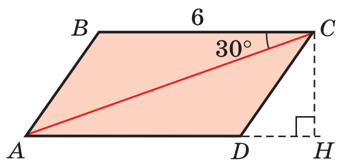


Рис. 161

Решение. Опустим высоту CH на продолжение основания AD (рис. 161). Так как $S_{ABCD} = AD \cdot CH$ и $AD = BC = 6$ см, то $24 = 6 \cdot CH$, $CH = \frac{24}{6} = 4$ (см). Рассмотрим прямоугольный треугольник ACH. Заметим, что $\angle CAH = \angle ACB = 30°$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых AD и BC и секущей AC. Так как катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы, то $AC = 2CH = 8$ см.

Ответ: 8 см.

Задача 3. *На рисунке* 162 $AD \parallel BM$, $AB \parallel DC$, $AK \parallel DM$. *Доказать, что площадь красного четырехугольника равна площади синего.*

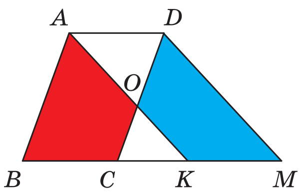


Рис. 162

Доказательство. Параллелограммы $ABCD$ и $AKMD$ равновелики, так как у них сторона AD — общая, а высоты, проведенные к этой стороне, равны как расстояния между параллельными прямыми BM и AD. Параллелограмм $ABCD$ состоит из красного четырехугольника $BAOC$ и треугольника AOD. Параллелограмм $AKMD$ состоит из синего четырехугольника $OKMD$ и треугольника AOD. Следовательно, площади синего и красного четырехугольников равны. Что и требовалось доказать.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

170. По данным на рисунках 163, *а*)—*в*) найдите площадь параллелограмма $ABCD$ (длины отрезков даны в сантиметрах).

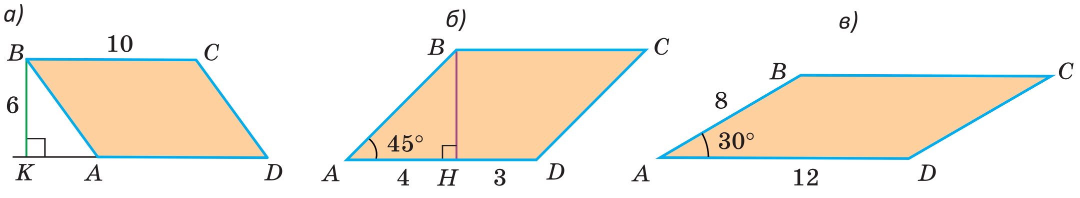


Рис. 163

171. а) Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 100 м^2. Сторона AD равна 20 м. Найдите высоту параллелограмма, проведенную к стороне AD.

б) Высота BH параллелограмма $ABCD$ проведена к стороне AD и равна 8 см, $AH = 3$ см, $HD = 2AH$. Найдите площадь параллелограмма.

172. а) Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 60 см^2. Высота BK, проведенная к стороне CD, равна 10 см, $AD = 12$ см. Найдите периметр параллелограмма.

б) Из вершины B параллелограмма $ABCD$ к стороне CD проведена высота BK, к стороне AD — высота BH. Найдите периметр параллелограмма, если $BH = 5$ см, $BK = 7$ см, $AD = 14$ см.

173. $ABCD$ — параллелограмм (рис. 164), $BC = 10$ см, $CK \perp AD$, $CK = 7$ см. Найдите площадь треугольника ABD.

174. На рисунке 165 $AB = CD$, $AD = BC$. Найдите расстояние от точки D до прямой AB, если $S_{ABCD} = 54$ см^2, $AB = 6$ см.

175. На рисунке 166 $a \parallel b$, $c \parallel d$, $MK = 16$, $NK = 24$. Расстояние между прямыми a и b равно 18. Найдите расстояние между прямыми c и d.

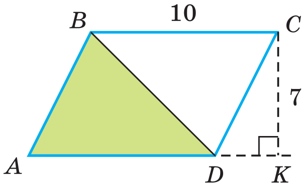


Рис. 164

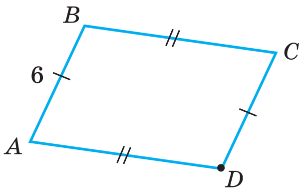


Рис. 165

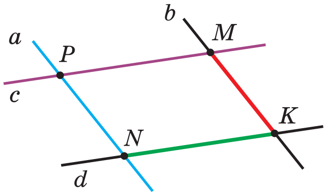


Рис. 166

176. а) Бóльшая сторона параллелограмма равна 18 см, высоты относятся как 1 : 2. Найдите периметр параллелограмма.

б) Периметр параллелограмма равен 48 см, одна из его сторон в 2 раза больше другой. Высота, опущенная на бóльшую сторону, равна 4,5 см. Найдите площадь параллелограмма.

177. Определите, сколько квадратных единиц составляет площадь параллелограмма, изображенного на координатной плоскости (рис. 167).

178. Дан параллелограмм $ABCD$, BK — биссектриса угла B (точка K лежит на стороне AD), $CD = 12$ см, $KD = 5$ см, расстояние от точки K до прямой BC равно 9 см. Найдите площадь параллелограмма.

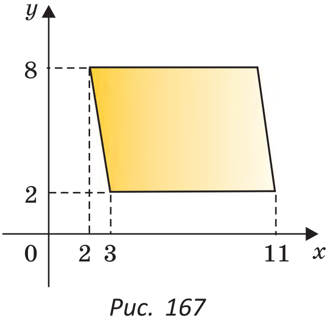


Рис. 167

179. Расстояние от вершины B параллелограмма $ABCD$ до прямой AD равно 6 см, а до прямой AC — 4 см, $\angle CAD = 30°$. Найдите площадь параллелограмма.

180. Площадь параллелограмма равна 112 см^2. Найдите площадь четырехугольника, вершины которого являются серединами сторон данного параллелограмма.

181. Дан параллелограмм $ABCD$, DK — биссектриса угла D (точка K лежит на стороне BC), $\angle BKD = 105°$, $BK = 4$ см, $KC = 12$ см. Найдите площадь параллелограмма.

182. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 48 см, его высоты равны 10 см и 6 см. Найдите площадь параллелограмма.

183. Угол между высотами BK и BM параллелограмма $ABCD$ равен 45°. Высота BK делит сторону AD в отношении 1 : 2, считая от точки A. Средняя линия трапеции $KBCD$ равна 7,5 см. Найдите площадь параллелограмма.

184. Точки M, N, P, K — середины сторон четырехугольника $ABCD$ (рис. 168). Площадь четырехугольника $MNPK$ равна 144 см^2. Известно, что $BD = 24$ см, $NH \perp MK$. Докажите, что $\angle NHP = \angle NPH$.

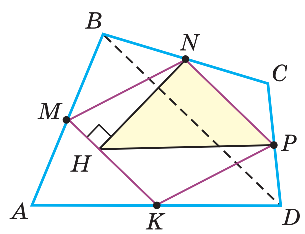


Рис. 168

§ 15. Площадь треугольника, прямоугольного треугольника, ромба

Теорема. **Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту, то есть $S_\triangle = \frac{1}{2}ah_a$.**

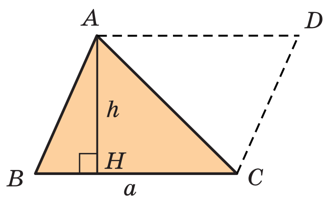


Рис. 169

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC сторона $BC = a$, высота $AH = h$. Проведем $AD \parallel BC$, $CD \parallel AB$ и достроим треугольник ABC до параллелограмма $BADC$ (рис. 169). Основание a и высота h у параллелограмма те же, что у треугольника ABC. $\triangle ABC = \triangle CDA$, значит, $S_{ABC} = S_{CDA}$. Тогда площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма $BADC$, т. е. $S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{BADC} = \frac{1}{2}ah$. Теорема доказана.