179. Расстояние от вершины B параллелограмма $ABCD$ до прямой AD равно 6 см, а до прямой AC — 4 см, $\angle CAD = 30°$. Найдите площадь параллелограмма.

180. Площадь параллелограмма равна 112 см^2. Найдите площадь четырехугольника, вершины которого являются серединами сторон данного параллелограмма.

181. Дан параллелограмм $ABCD$, DK — биссектриса угла D (точка K лежит на стороне BC), $\angle BKD = 105°$, $BK = 4$ см, $KC = 12$ см. Найдите площадь параллелограмма.

182. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 48 см, его высоты равны 10 см и 6 см. Найдите площадь параллелограмма.

183. Угол между высотами BK и BM параллелограмма $ABCD$ равен 45°. Высота BK делит сторону AD в отношении $1 : 2$, считая от точки A. Средняя линия трапеции $KBCD$ равна 7,5 см. Найдите площадь параллелограмма.

184. Точки M, N, P, K — середины сторон четырехугольника $ABCD$ (рис. 168). Площадь четырехугольника $MNPK$ равна 144 см^2. Известно, что $BD = 24$ см, $NH \perp MK$. Докажите, что $\angle NHP = \angle NPH$.

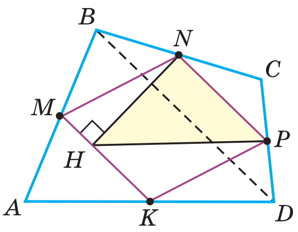


Рис. 168

§ 15. Площадь треугольника, прямоугольного треугольника, ромба

Теорема. **Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту, то есть $S_{\triangle} = \frac{1}{2}ah_a$.**

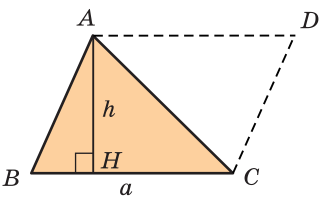


Рис. 169

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC сторона $BC = a$, высота $AH = h$. Проведем $AD \parallel BC$, $CD \parallel AB$ и достроим треугольник ABC до параллелограмма $BADC$ (рис. 169). Основание a и высота h у параллелограмма те же, что у треугольника ABC. $\triangle ABC = \triangle CDA$, значит, $S_{ABC} = S_{CDA}$. Тогда площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма $BADC$, т. е. $S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{BADC} = \frac{1}{2}ah$. Теорема доказана.

Замечание. Принято высоты треугольника, проведенные к сторонам a, b и c, обозначать соответственно h_a, h_b, h_c. Тогда $S_\triangle = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$, откуда $a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}$.

Следствие.

Треугольники, имеющие равные основания и равные высоты, проведенные к этим основаниям, равновелики.

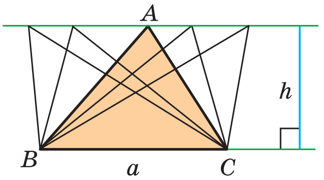


Рис. 170

На рисунке 170 все треугольники, имеющие с треугольником ABC общее основание BC, вершины которых лежат на прямой, проходящей через вершину A параллельно прямой BC, будут равновелики.

Теорема. **Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов, то есть $S = \frac{ab}{2}$.**

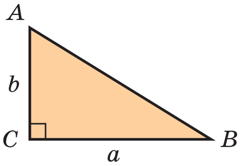


Рис. 171

Доказательство. Катет b прямоугольного треугольника ABC является высотой, а катет a — соответствующим этой высоте основанием (рис. 171). Поэтому площадь прямоугольного треугольника $S = \frac{1}{2}a \cdot b = \frac{ab}{2}$. Теорема доказана.

Площадь ромба можно найти как площадь параллелограмма, то есть как произведение основания на высоту. Однако, учитывая, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны, можно вывести отдельную формулу площади ромба.

Теорема. **Площадь ромба равна половине произведения диагоналей, то есть $S_{\text{ромба}} = \frac{d_1 d_2}{2}$.**

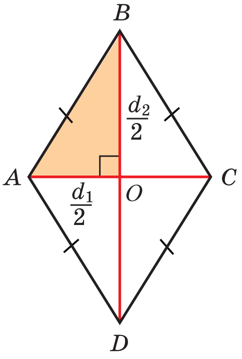


Рис. 172

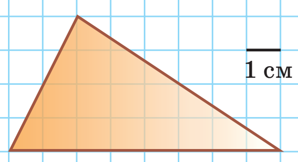
Доказательство. Пусть у ромба $ABCD$ диагонали $AC = d_1$, $BD = d_2$ (рис. 172). Так как диагонали ромба взаимно перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам, то прямоугольные треугольники AOB, BOC, COD, AOD равны по двум катетам. А значит, равны их площади. Поскольку площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов, то $S_{AOB} = \frac{AO \cdot BO}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2}$. Следовательно, $S_{ABCD} = 4S_{AOB} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} = \frac{d_1 d_2}{2}$, т. е. $S_{\text{ромба}} = \frac{d_1 d_2}{2}$. Теорема доказана.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

Тест 1

Найдите площадь треугольника, если размеры одной клетки 1 см × 1 см.

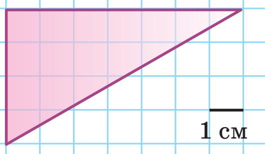
а) 16 см^2; в) 12 см^2;
б) 32 см^2; г) 24 см^2.



Тест 2

Найдите площадь треугольника, если размеры одной клетки 1 см × 1 см.

а) 28 см^2; в) 20 см^2;
б) 16 см^2; г) 14 см^2.



Задача. Доказать свойство: **«Площади треугольников с общей высотой (или равными высотами) относятся как соответствующие этой высоте основания»**.

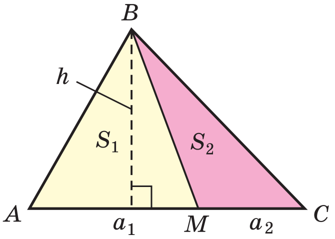


Рис. 173

Доказательство. У треугольников ABM и CBM на рисунке 173 общая высота h, которая проведена из вершины B. Обозначим соответствующие основания $AM = a_1$ и $MC = a_2$. Найдем отношение площадей этих треугольников:

$$\frac{S_{ABM}}{S_{CBM}} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}a_1h}{\frac{1}{2}a_2h} = \frac{a_1}{a_2}.$$

Что и требовалось доказать.

Замечание. Согласно доказанному свойству $\frac{S_{ABM}}{S_{ABC}} = \frac{AM}{AC} = \frac{a_1}{a_1 + a_2}$.

Следствия.

1. *Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.*

2. *Диагонали делят параллелограмм на четыре равновеликих треугольника.*

Докажите эти следствия самостоятельно.

Задания к § 15

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
ключевые задачи

Задача 1. *Доказать, что три медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников.*

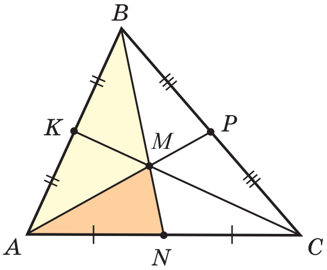


Рис. 174

Решение. Пусть AP, BN и CK — медианы треугольника ABC, площадь которого равна S (рис. 174). Так как медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника, то $S_{ABN} = \frac{1}{2}S$. По свойству медиан $BM : MN = 2 : 1$. Поскольку треугольники ABM и AMN имеют общую высоту, опущенную из вершины A, их площади относятся как $BM : MN$, т. е. $2 : 1$.

Тогда $S_{AMN} = \frac{1}{3}S_{ABN} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}S = \frac{1}{6}S$.

Аналогично,

$S_{NMC} = S_{MPC} = S_{BMP} = S_{KMB} = S_{AMK} = \frac{1}{6}S$.

Следствие.

Площадь треугольника, ограниченного двумя медианами и стороной, составляет $\frac{1}{3}$ *площади* S *данного треугольника, то есть*

$S_{AMC} = S_{AMB} = S_{BMC} = \frac{1}{3}S$.

Задача 2. *Найти высоту* h_c *прямоугольного треугольника с катетами* a *и* b *и гипотенузой* c.

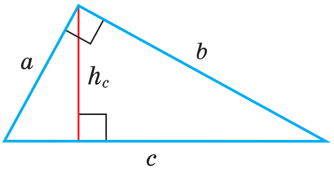


Рис. 175

Решение. С одной стороны, площадь прямоугольного треугольника $S = \frac{1}{2}ch_c$ (рис. 175). С другой стороны, $S = \frac{1}{2}ab$. Отсюда $ch_c = ab$, $h_c = \frac{ab}{c}$.

Пример. Если катеты прямоугольного треугольника равны 6 см и 8 см, а гипотенуза — 10 см, то высота, проведенная к гипотенузе, $h_c = \frac{ab}{c} = \frac{6\cdot 8}{10} = 4{,}8$ (см).

$\boxed{h_c = \frac{ab}{c}}$ — *формула высоты прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе.*

Задача 3. *Площадь треугольника* ABC *равна* 120 *см*^{2}, BM *— медиана треугольника, точка* O *— середина медианы. Прямая* AO *пересекает сторону* BC *в точке* K. *Найти площадь четырехугольника* $MOKC$ (рис. 176).

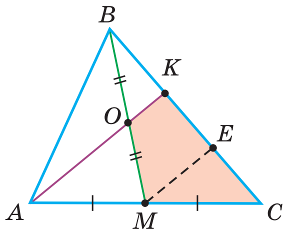


Рис. 176

Решение. Так как медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника, то $S_{ABM} = \frac{1}{2}S_{ABC}$, $S_{AOM} = \frac{1}{2}S_{ABM} = \frac{1}{4}S_{ABC}$. Проведем $ME \parallel AK$. По теореме Фалеса, так как $BO = OM$, то $BK = KE$, так как $AM = MC$, то $KE = EC$. Отсюда $BK = KE = EC$, $BK : KC = 1 : 2$. У треугольников AKB и AKC общая высота, проведенная из вершины A.

Поэтому $\frac{S_{AKB}}{S_{AKC}} = \frac{BK}{KC} = \frac{1}{2}$.

Тогда $S_{AKC} = \frac{2}{3}S_{ABC}$, $S_{MOKC} = S_{AKC} - S_{AOM} =$

$= \frac{2}{3}S_{ABC} - \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{5}{12} \cdot 120 = 50$ (см^2).

Ответ: 50 см^2.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

185. Найдите площади треугольников, изображенных на рисунках 177, *а*)—*в*).

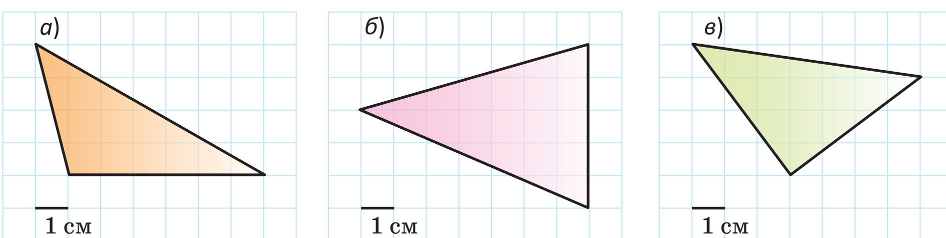


Рис. 177

186. Площадь треугольника MNK равна 80 см^2. Высота MH равна 10 см. Найдите длину стороны NK.

187. Найдите площадь треугольника ABC, если:
а) его высота BH делит основание AC на отрезки $AH = 3{,}4$ см, $HC = 6{,}6$ см, $\angle A = 45°$;
б) $AB = 4$ см, $AC = 6$ см, $\angle A = 30°$.

188. а) В треугольнике ABC высота AK равна 9 см, высота CH равна 6 см, $BC = 8$ см. Найдите длину стороны AB.
б) Две стороны треугольника равны 4,5 м и 6 м. Высота, проведенная к меньшей из них, равна 4 м. Найдите высоту, проведенную к большей из этих сторон.

189. Докажите, что средняя линия треугольника отсекает от него треугольник, площадь которого равна $\frac{1}{4}$ площади данного.

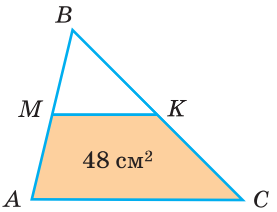


Рис. 178

190. Дан треугольник ABC (рис. 178), MK — средняя линия треугольника. Площадь четырехугольника $AMKC$ равна 48 см^2. Найдите площадь треугольника ABC.

191. а) Найдите площадь прямоугольного треугольника с катетами, равными 8 см и 15 см.
б) В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, AC на 7 см меньше BC, $S_{ABC} = 30$ см^2. Найдите BC.

192. В параллелограмме $ABCD$ O — точка пересечения диагоналей, K — середина стороны AD. Найдите отношение площади четырехугольника $KOCD$ к площади параллелограмма.

193. Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна 24 см. Стороны треугольника относятся как 3 : 4 : 5. Найдите периметр треугольника.

194. Медианы BN и CK треугольника ABC пересекаются в точке M, $S_{ABC} = 60$ см^2. Найдите: а) S_{AKC}; б) S_{KBM}; в) S_{BMC}; г) S_{AKMN}. Докажите, что при любом значении S_{ABC} верно, что $S_{BMC} = S_{AKMN}$.

195. Найдите площадь треугольника (в квадратных единицах), вершины которого имеют координаты (2; 3), (4; 7), (10; 4).

196. а) Площадь ромба равна 450 см^2. Одна из диагоналей ромба равна 60 см. Найдите другую диагональ.
б) Диагонали ромба с площадью 360 см^2 относятся как 4 : 5. Найдите меньшую диагональ ромба.

197. Докажите, что площадь квадрата можно найти по формуле $S = \frac{d^2}{2}$, где d — диагональ квадрата.

198. В окружности, радиус которой равен 8 см, проведены два взаимно перпендикулярных диаметра. Найдите площадь четырехугольника, вершины которого совпадают с концами диаметров.

199. Докажите, что если диагонали d_1 и d_2 выпуклого четырехугольника взаимно перпендикулярны, то его площадь $S = \frac{d_1 d_2}{2}$.

200. Периметр ромба равен 32 см, произведение длин диагоналей ромба равно 96 см^2. Найдите высоту ромба.

201. Высоты треугольника относятся как $h_a : h_b : h_c = 2 : 3 : 4$, периметр равен 260 см. Найдите стороны a, b, c треугольника.

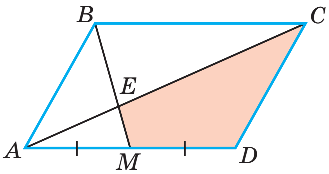


Рис. 179

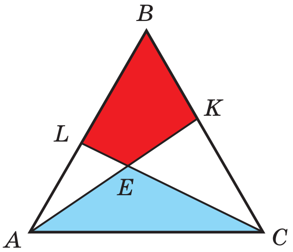


Рис. 180

202. Точка M — середина стороны AD параллелограмма $ABCD$ (рис. 179). Площадь параллелограмма равна 120 см^2. Найдите площадь четырехугольника $MECD$.

203. На рисунке 180 треугольник ABC равносторонний, площади красного четырехугольника и синего треугольника равны. Докажите, что $BL = CK$. Найдите величину угла KEC.

204. Найдите геометрическое место вершин треугольников, имеющих общее основание a и равные площади S, если эти вершины противоположны данному основанию.

Гимнастика ума

Как в треугольнике ABC следует провести ломаную $BKMNP$, чтобы он разбился на пять равных по площади треугольников (рис. 181)?

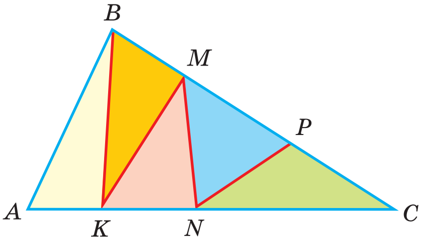


Рис. 181

ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Определение равновеликих фигур.
2. Формулы площади: квадрата, прямоугольника, параллелограмма, треугольника, прямоугольного треугольника, ромба.
3. Формулу высоты прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе.
4. Свойство площадей треугольников с общей высотой.
5. Свойство медианы относительно площади треугольника.

Умеем

1. Выводить формулы площади: прямоугольника, параллелограмма, треугольника, ромба.
2. Выводить формулу высоты прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе.
3. Доказывать, что медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.

Реальная геометрия

Необходимо покрасить дом, изображенный на рисунке. Фундамент дома представляет собой квадрат со стороной 6 м. В доме имеется: 5 малых окон размером 1 м 50 см × 80 см, два больших окна размером 2 м 50 см × 80 см и дверь размером 2 м × 0,8 м.

По размерам, указанным на чертеже (рис. 182), определите:

а) общую площадь той части стен дома, которую нужно покрасить;

б) сколько килограммов краски потребуется, чтобы покрасить стены дома в 2 слоя, если на покраску 1 м^2 в один слой уходит 250 г краски;

в) какое оптимальное число ведер краски необходимо купить, если в строительном магазине имеется нужная краска для фасадов в ведрах массой 5 кг и 11 кг.

Белорусские лакокрасочные материалы экспортируются в страны СНГ, Европы и Азии. Выясните, какие крупнейшие лакокрасочные заводы есть в Беларуси.

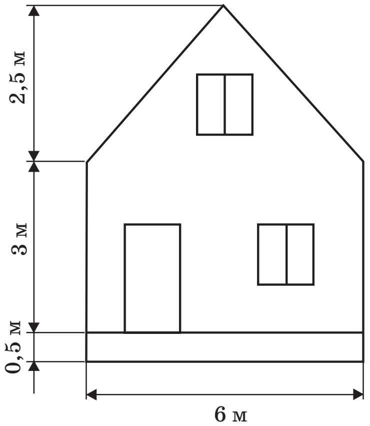


Рис. 182

§ 16. Теорема Пифагора

Теорема Пифагора говорит о связи длин катетов с длиной гипотенузы прямоугольного треугольника. Так, если треугольник ABC прямоугольный и $\angle C = 90°$ (рис. 183), то $AC^2 + BC^2 = AB^2$. Эта теорема позволяет, зная катеты, найти гипотенузу или, зная один из катетов и гипотенузу, найти другой катет. Например, если $AC = 3$ см, $BC = 4$ см, то $AB^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ (см^2), откуда $AB = 5$ см.

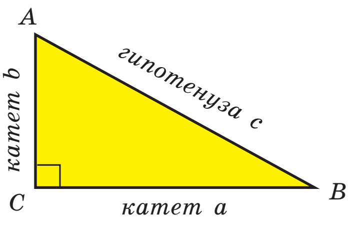


Рис. 183

Катеты, лежащие против углов A и B, будем соответственно обозначать a и b, гипотенузу — c.

> Теорема Пифагора. **В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы, то есть $a^2 + b^2 = c^2$.**