Реальная геометрия

Необходимо покрасить дом, изображенный на рисунке. Фундамент дома представляет собой квадрат со стороной 6 м. В доме имеется: 5 малых окон размером 1 м 50 см × 80 см, два больших окна размером 2 м 50 см × 80 см и дверь размером 2 м × 0,8 м.

По размерам, указанным на чертеже (рис. 182), определите:

а) общую площадь той части стен дома, которую нужно покрасить;

б) сколько килограммов краски потребуется, чтобы покрасить стены дома в 2 слоя, если на покраску 1 м^2 в один слой уходит 250 г краски;

в) какое оптимальное число ведер краски необходимо купить, если в строительном магазине имеется нужная краска для фасадов в ведрах массой 5 кг и 11 кг.

Белорусские лакокрасочные материалы экспортируются в страны СНГ, Европы и Азии. Выясните, какие крупнейшие лакокрасочные заводы есть в Беларуси.

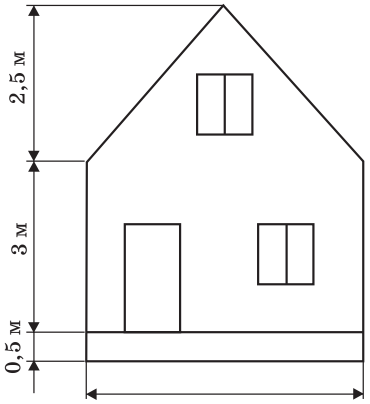


Рис. 182

§ 16. Теорема Пифагора

Теорема Пифагора говорит о связи длин катетов с длиной гипотенузы прямоугольного треугольника. Так, если треугольник ABC прямоугольный и $\angle C = 90°$ (рис. 183), то $AC^2 + BC^2 = AB^2$. Эта теорема позволяет, зная катеты, найти гипотенузу или, зная один из катетов и гипотенузу, найти другой катет. Например, если $AC = 3$ см, $BC = 4$ см, то $AB^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ (см^2), откуда $AB = 5$ см.

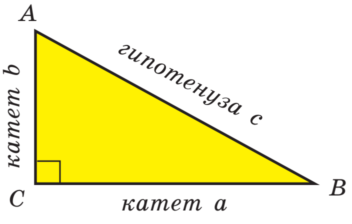


Рис. 183

Катеты, лежащие против углов A и B, будем соответственно обозначать a и b, гипотенузу — c.

> Теорема Пифагора. **В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы, то есть $a^2 + b^2 = c^2$.**

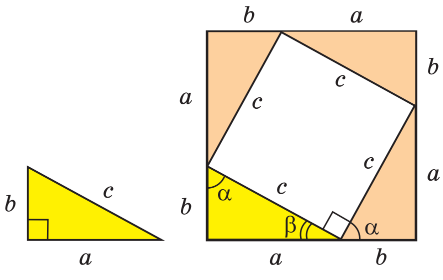


Рис. 184

Доказательство. Достроим прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c до квадрата со стороной $a + b$ (рис. 184). Разобьем этот квадрат, как показано на рисунке, на четыре прямоугольных треугольника и четырехугольник. Прямоугольные треугольники равны по двум катетам. Так как сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°, то $\alpha + \beta = 90°$. Тогда у внутреннего четырехугольника все стороны равны c и все углы прямые. Поэтому это квадрат, и его площадь равна c^2.

Площадь большого квадрата, с одной стороны, равна квадрату его стороны, т. е. $S = (a + b)^2$. С другой стороны, она равна сумме площадей четырех равных прямоугольных треугольников и площади внутреннего квадрата: $S = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2$. Тогда $(a + b)^2 = 2ab + c^2$, $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$, $a^2 + b^2 = c^2$. Теорема доказана.

Следствие.

Из равенства $a^2 + b^2 = c^2$ следует $a^2 = c^2 - b^2$. С учетом $a > 0$ получаем $a = \sqrt{c^2 - b^2}$. Аналогично, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Говорят, что катет равен квадратному корню из разности квадрата гипотенузы и квадрата другого катета.

Пример. Если a и b — катеты, c — гипотенуза и $a = 8$ см, $c = 10$ см, то $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$ (см).

Если дан равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом a и гипотенузой c, то по теореме Пифагора $c^2 = a^2 + a^2$, $c^2 = 2a^2$, откуда $c = a\sqrt{2}$ или $a = \frac{c}{\sqrt{2}}$.

Полезно запомнить!

Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом a равна $a\sqrt{2}$. Катет равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой c равен $\frac{c}{\sqrt{2}}$ (рис. 185). Диагональ d квадрата со стороной a равна $a\sqrt{2}$, сторона квадрата с диагональю d равна $\frac{d}{\sqrt{2}}$ (рис. 186).

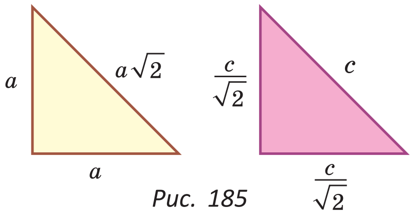


Рис. 185

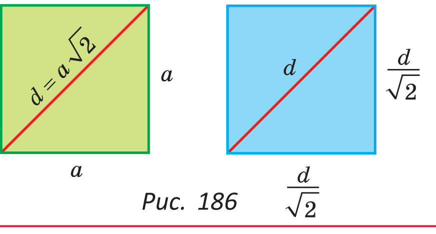


Рис. 186

Правообладатель Адукацыя і выхаванне

Задача. *Найти высоту и площадь равностороннего треугольника ABC со стороной a* (рис. 187).

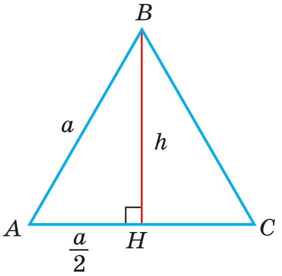


Рис. 187

Решение. Пусть $BH = h$ — высота треугольника. Так как в равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, является и медианой, то из прямоугольного треугольника ABH по теореме Пифагора находим:

$$h = BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} =$$
$$= \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда площадь равностороннего треугольника

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Таким образом, для равностороннего треугольника со стороной a и высотой h справедливы следующие формулы:

$\boxed{h = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$ — *формула высоты равностороннего треугольника;*

$\boxed{S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}}$ — *формула площади равностороннего треугольника.*

Для теоремы Пифагора существует и обратная теорема, которая позволяет по трем данным сторонам треугольника определить, является ли он прямоугольным.

Теорема, обратная теореме Пифагора.

Если в треугольнике сумма квадратов двух сторон равна квадрату третьей стороны, то этот треугольник прямоугольный, т. е. если для сторон треугольника ABC справедливо равенство $a^2 + b^2 = c^2$, то $\angle C = 90°$.

Доказательство. Пусть дан треугольник ABC (рис. 188, *а*) со сторонами $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ и $a^2 + b^2 = c^2$. Нужно доказать, что $\angle C = 90°$. Рассмотрим заведомо прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$ с катетами $B_1C_1 = a$ и $A_1C_1 = b$ (рис. 188, *б*). По теореме Пифагора $A_1B_1^2 = a^2 + b^2$.

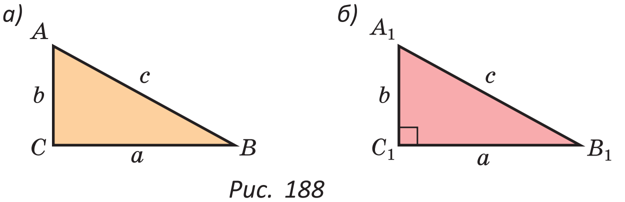
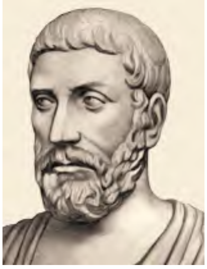


Рис. 188

Но по условию $a^2 + b^2 = c^2$. Откуда $A_1B_1 = c$. Тогда $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по трем сторонам и, следовательно, $\angle C = \angle C_1 = 90°$.
Теорема доказана.



Пифагор Само́сский (IV—V в. до н. э.) — известный древнегреческий философ и математик. Он создал пифагорейскую научную школу, куда входили многие математики того времени.

Задания к § 16

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
ключевые задачи

Задача 1. *В прямоугольном треугольнике катеты относятся как 3 : 4, гипотенуза равна 30 см. Найти площадь треугольника.*

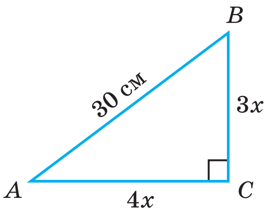


Рис. 189

Решение. Пусть в треугольнике ABC (рис. 189) гипотенуза $AB = 30$ см, $BC : AC = 3 : 4$.
Обозначим $BC = 3x$ см, $AC = 4x$ см. По теореме Пифагора $AC^2 + BC^2 = AB^2$, откуда $(4x)^2 + (3x)^2 = 30^2$, $16x^2 + 9x^2 = 900$, $25x^2 = 900$, $x^2 = 36$, $x = 6$.
Тогда $BC = 3 \cdot 6 = 18$ (см), $AC = 4 \cdot 6 = 24$ (см), $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{18 \cdot 24}{2} = 216$ (см^2).
Ответ: 216 см^2.

Задача 2. *Стороны треугольника равны 7 см, 24 см и 25 см. Найти:*
а) медиану треугольника, проведенную к наибольшей стороне;
б) высоту треугольника, проведенную из вершины наибольшего угла треугольника.

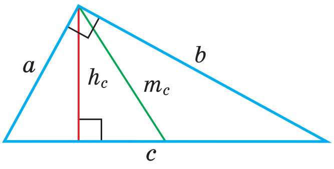


Рис. 190

Решение. Так как $7^2 + 24^2 = 25^2$ $(49 + 576 = 625)$, то по теореме, обратной теореме Пифагора, данный треугольник прямоугольный с катетами $a = 7$ см, $b = 24$ см и гипотенузой $c = 25$ см (рис. 190).
а) Гипотенуза — наибольшая сторона треугольника. А медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы, т. е. $m_c = \frac{c}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5$ (см).

б) Высоту прямоугольного треугольника, проведенную из вершины прямого угла, найдем по известной формуле: $h_c = \frac{ab}{c} = \frac{7 \cdot 24}{25} = 6{,}72$ (см).
Ответ: а) 12,5 см; б) 6,72 см.

Правообладатель Адукацыя і выхаванне

Замечание. Прямоугольный треугольник со сторонами, равными 3, 4 и 5 единиц, был известен еще древним египтянам. Он называется **египетским треугольником**. Сделанный из веревки треугольник со сторонами, равными 3, 4 и 5, натягивали закрепленными в вершинах колышками. Так египтяне строили на местности прямой угол.

Тройки целых чисел, которые являются сторонами прямоугольного треугольника, называются *Пифагоровыми тройками*. Полезно запомнить следующие тройки:

а) 3, 4, 5; в) 7, 24, 25; д) 20, 21, 29.

б) 5, 12, 13; г) 8, 15, 17;

Умножая каждое из чисел Пифагоровой тройки на натуральное число, можно получить бесконечно много Пифагоровых троек. Например, для первой тройки можно получить следующие: (6, 8, 10), (9, 12, 15), (12, 16, 20) и т. д.

Задача 3. *Найти площадь равнобедренного треугольника со сторонами 10 см, 10 см, 12 см.*

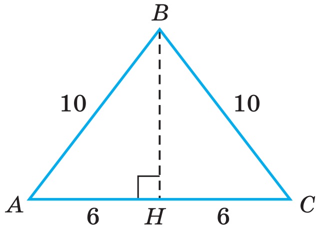


Рис. 191

Решение. Пусть в треугольнике ABC $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см (рис. 191). Проведем высоту BH. Так как высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является медианой, то $AH = HC = 6$ см.

По теореме Пифагора для $\triangle ABH$:

$AH^2 + BH^2 = AB^2$, $6^2 + BH^2 = 10^2$,

$BH = \sqrt{64} = 8$ (см).

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$ (см^2).

Ответ: 48 см^2.

Задача 4. *Найти высоту треугольника со сторонами, равными 7 см, 15 см, 20 см, которая проведена к наибольшей стороне.*

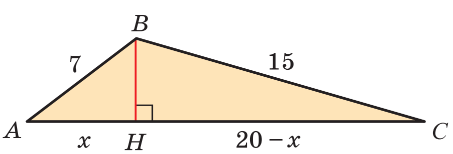


Рис. 192

Решение. В $\triangle ABC$ $AB = 7$ см, $BC = 15$ см, $AC = 20$ см (рис. 192). Опустим высоту BH. Обозначим $AH = x$ см, $HC = (20 - x)$ см.

По теореме Пифагора из прямоугольных треугольников ABH и CBH получим:

$BH^2 = AB^2 - AH^2 = 7^2 - x^2$,

$BH^2 = BC^2 - HC^2 = 15^2 - (20 - x)^2$.

Отсюда $7^2 - x^2 = 15^2 - (20 - x)^2$,

$(20 - x)^2 - x^2 = 15^2 - 7^2$.

Решив уравнение, найдем $x = 5{,}6$. Итак, $AH = 5{,}6$ см, $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} =$
$= \sqrt{7^2 - 5{,}6^2} = 4{,}2$ (см).

Ответ: 4,2 см.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

205. Зная катеты a и b прямоугольного треугольника, найдите гипотенузу c:

а) $a = 9$ см, $b = 12$ см;
б) $a = 1$ см, $b = 2$ см;
в) $a = \sqrt{12}$ дм, $b = \sqrt{13}$ дм;
г) $a = \left(\sqrt{7} - 1\right)$ м, $b = \left(\sqrt{7} + 1\right)$ м.

206. Зная катет a и гипотенузу c прямоугольного треугольника, найдите катет b:

а) $a = 6$ см, $c = 10$ см;
б) $a = 24$ м, $c = 25$ м;
в) $a = 3$ см, $c = 6$ см;
г) $a = 3\sqrt{2}$ дм, $c = 2\sqrt{7}$ дм.

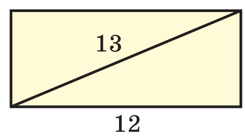


Рис. 193

207. Сторона прямоугольника равна 12 см, а диагональ — 13 см (рис. 193). Найдите площадь прямоугольника.

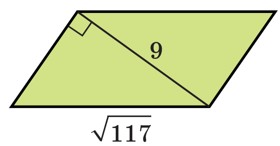


Рис. 194

208. Диагональ параллелограмма равна 9 см и перпендикулярна его стороне. Другая сторона параллелограмма равна $\sqrt{117}$ см (рис. 194). Найдите площадь параллелограмма.

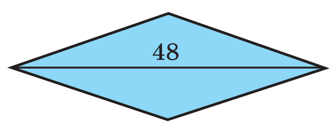


Рис. 195

209. Найдите площадь ромба, если:

а) его периметр равен 100 см, а одна из диагоналей — 48 см (рис. 195);
б) его сторона равна 13 см, а одна из диагоналей — 10 см.

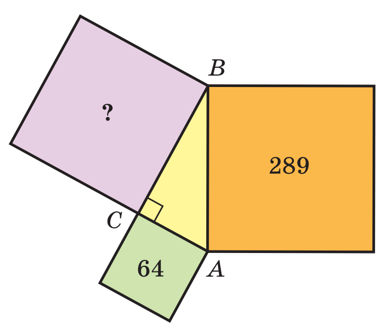


Рис. 196

210. На сторонах прямоугольного треугольника построены квадраты (рис. 196). Площадь квадрата, построенного на одном катете, равна 64 см^2, площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна 289 см^2. Найдите площадь квадрата, построенного на другом катете.

Правообладатель Адукацыя і выхаванне

211. Определите, является ли треугольник прямоугольным, если его стороны равны:

а) 20 мм, 21 мм, 29 мм;
б) 5 м, 6 м, 7 м;
в) $\sqrt{2}$ см, $\sqrt{3}$ см, $\sqrt{5}$ см.

212. Найдите площадь треугольника со сторонами:

а) 6 см, 8 см, 10 см;
б) 1,6 дм, 3 дм, 3,4 дм;
в) $\sqrt{2}$ м, $\sqrt{8}$ м, $\sqrt{10}$ м.

213. Дан равносторонний треугольник. Найдите:

а) высоту и площадь треугольника, если его сторона равна 4 см;
б) периметр и высоту треугольника, если его площадь равна $16\sqrt{3}$ см^2.

214. Найдите площадь равнобедренного треугольника, у которого:

а) основание равно 100 м, а боковая сторона — 130 м;
б) основание равно 14 дм, а боковая сторона — 25 дм;
в) основание равно a, а боковая сторона — b.

215. а) Сумма катетов прямоугольного треугольника равна 21 м, а гипотенуза — 15 м. Найдите катеты.

б) Один из катетов прямоугольного треугольника на 2 см больше другого катета и на 2 см меньше гипотенузы. Найдите площадь треугольника.

216. $ABCD$ — трапеция (рис. 197). Найдите:

а) высоту трапеции; б) диагональ AC.

217. $ABCD$ — параллелограмм (рис. 198), $KD = 12$. Найдите:

а) площадь параллелограмма;
б) высоту, проведенную к стороне CD.

218. При помощи теоремы Пифагора, используя рисунок 199, докажите, что если из одной точки к прямой проведены две наклонные CA и CB, то равным наклонным соответствуют равные проекции, большей наклонной соответствует большая проекция.

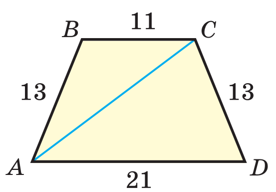


Рис. 197

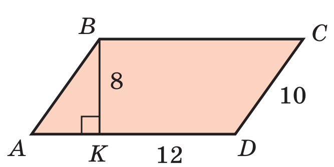


Рис. 198

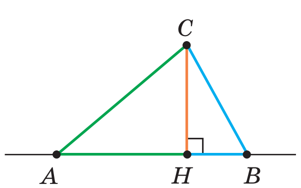


Рис. 199

219. а) Найдите площадь квадрата с диагональю, равной 4 см.
б) Найдите диагональ квадрата, площадь которого равна 50 $см^2$.

220. Дан треугольник со сторонами 13 см, 14 см, 15 см. Найдите наименьшую высоту этого треугольника.

221. Медианы треугольника ABC, проведенные к сторонам AB и BC, взаимно перпендикулярны и равны 9 см и 12 см. Найдите длину третьей медианы.

222. Дан отрезок a. Используя циркуль и линейку, постройте отрезок x, равный $a\sqrt{2}$.

223. Найдите площадь треугольника ABC, у которого $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, медиана $BM = 5$ см.

224. Найдите площадь треугольника, медианы которого равны 3 см, 4 см и 5 см.

225. По гипотенузе прямоугольного треугольника со сторонами 12 см, 16 см, 20 см перемещается точка. Найдите, при каком положении точки сумма квадратов расстояний от этой точки до катетов будет наименьшей. Определите расстояние от этого положения точки до вершины прямого угла.

226. Найдите длину отрезка AB, изображенного на координатной плоскости (рис. 200), где $A(2;\ 4)$, $B(6;\ 7)$.

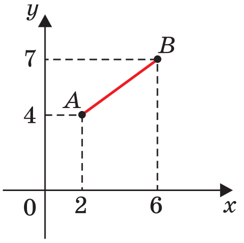


Рис. 200

227. Даны отрезки m и n, где $m > n$. При помощи циркуля и линейки постройте отрезок x, если:

а) $x = \sqrt{m^2 + n^2}$; б) $x = \sqrt{m^2 - n^2}$.

Реальная геометрия

Определите примерную длину лестницы, которая идет к окну второго этажа дома, изображенного на рисунке, если расстояние от этого окна до земли равно 6 м, а расстояние от фундамента дома до основания лестницы — 3 м.

Подсчитайте, сколько примерно погонных метров бруска пойдет на изготовление такой лестницы, если у нее 18 ступенек и ширина лестницы равна 50 см.

Интересно знать. В Беларуси широко развита деревообрабатывающая промышленность. Около 40 крупнейших организаций, производящих товары из древесины и бумаги, входят в государственный концерн «Беллесбумпром». Около 80 % произведенной этими предприятиями продукции реализуется на внешних рынках. География экспортных поставок предприятий концерна охватывает 65 стран.

Правообладатель Адукацыя і выхаванне

Геометрия 3D

На рисунке 201 изображена прямая треугольная призма, основанием которой является равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами, равными по 4 см, и развертка этой призмы. Бóльшая по площади боковая грань призмы является квадратом.

Изготовьте из плотной бумаги указанную развертку и сложите из нее данную призму. Скрепите соединяемые края полосками бумаги.

Найдите площадь боковой поверхности призмы (она равна сумме площадей боковых граней). Найдите площадь основания призмы. Чему равна площадь всей поверхности призмы (*полная поверхность призмы*)?

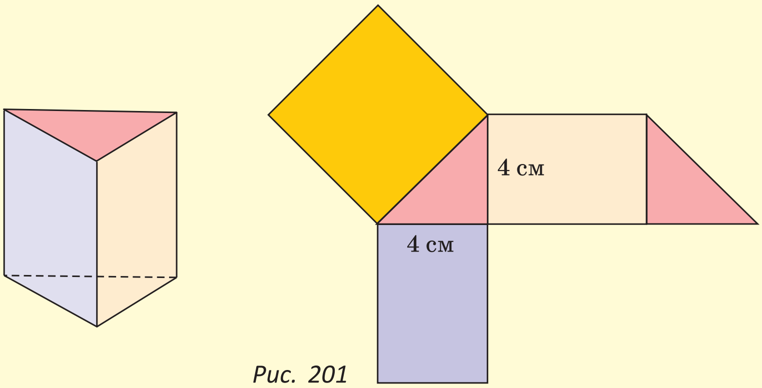


Рис. 201

Моделирование

Интересно знать. Большой теннис является популярным видом спорта в Беларуси. Наши спортсмены Виктория Азаренко и Максим Мирный являются теннисистами мирового уровня, олимпийскими чемпионами. Каких еще известных белорусских теннисистов вы знаете?

Задача. Во время подачи теннисный мяч может достигать скорости 180 км/ч. По размерам, указанным на рисунке 202, определите в секундах время, за которое мяч из точки А попадет в точку Б, двигаясь по прямой с указанной скоростью. При расчетах используйте калькулятор.

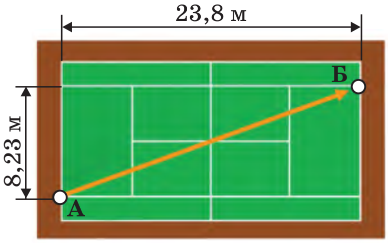


Рис. 202

При помощи **Интернета** выясните:
1) на каком острове жил Пифагор;
2) какое отношение Пифагор имел к музыке;
3) сколько доказательств теоремы Пифагора известно на сегодняшний день.

Приведем еще одно доказательство теоремы Пифагора.

На рисунке 203, *а*) незанятая закрашенными прямоугольными треугольниками часть большого квадрата по площади равна c^2. Совместив треугольники 3 и 1, 4 и 2 гипотенузами (рис. 203, *б*), получим, что теперь незанятая ими площадь равна $a^2 + b^2$. Отсюда следует, что $c^2 = a^2 + b^2$.

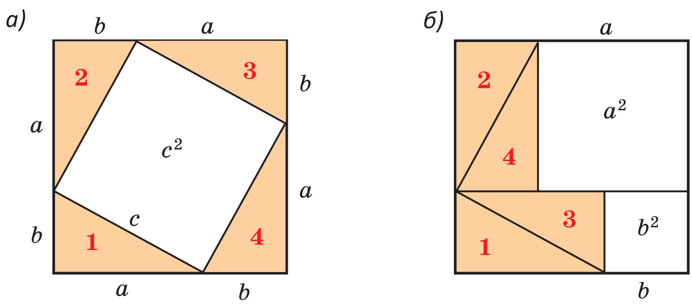


Рис. 203

§ 17. Площадь трапеции

> Теорема. **Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту, то есть** $S_{\text{тр.}} = \dfrac{a+b}{2} \cdot h$.

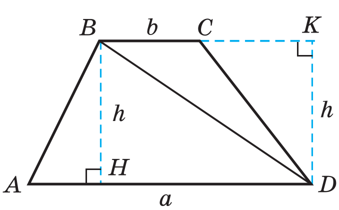


Рис. 204

Доказательство. Диагональ BD разбивает трапецию $ABCD$ на два треугольника: ABD и BCD (рис. 204). Высоты BH и DK этих треугольников равны высоте h трапеции.

Тогда

$$S_{\text{тр.}} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Теорема доказана.

Следствие.

Так как средняя линия трапеции $m = \dfrac{a+b}{2}$, *то площадь трапеции может быть найдена по формуле* $S_{\text{тр.}} = mh$.

Задача. *Доказать, что площади треугольников, ограниченных двумя диагоналями и боковой стороной трапеции, равны.*

Правообладатель Адукацыя і выхаванне