



При помощи **Интернета** выясните:

- 1) на каком острове жил Пифагор;
- 2) какое отношение Пифагор имел к музыке;
- 3) сколько доказательств теоремы Пифагора известно на сегодняшний день.

Приведем еще одно доказательство теоремы Пифагора.

На рисунке 203, а) незанятая закрашенными прямоугольными треугольниками часть большого квадрата по площади равна c^2 . Совместив треугольники 3 и 1, 4 и 2 гипотенузами (рис. 203, б), получим, что теперь незанятая ими площадь равна $a^2 + b^2$. Отсюда следует, что $c^2 = a^2 + b^2$.

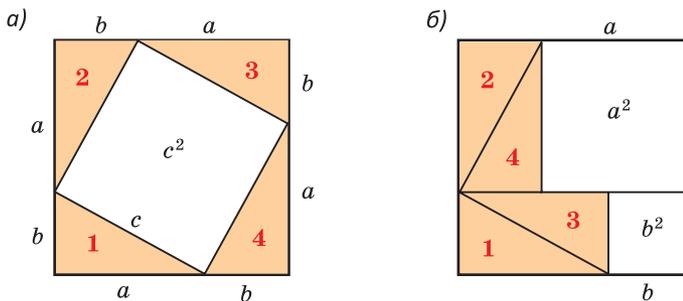


Рис. 203

§ 17. Площадь трапеции

Теорема. Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту, то есть $S_{\text{тр.}} = \frac{a+b}{2} \cdot h$.

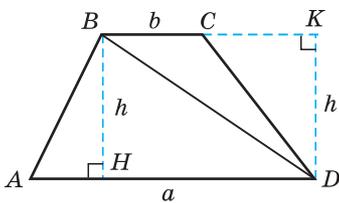


Рис. 204

Доказательство. Диагональ BD разбивает трапецию $ABCD$ на два треугольника: ABD и BCD (рис. 204). Высоты BH и DK этих треугольников равны высоте h трапеции.

Тогда

$$S_{\text{тр.}} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Теорема доказана.

Следствие.

Так как средняя линия трапеции $m = \frac{a+b}{2}$, то площадь трапеции может быть найдена по формуле $S_{\text{тр.}} = mh$.

Задача. Доказать, что площади треугольников, ограниченных двумя диагоналями и боковой стороной трапеции, равны.

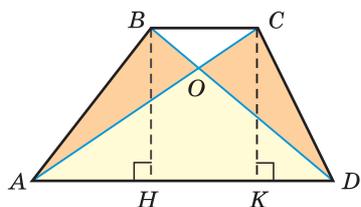


Рис. 205

Доказательство. Нужно доказать, что треугольники AOB и COD равновелики (рис. 205). Заметим, что треугольники ABD и ACD равновелики, так как у них основание AD — общее, а высоты BH и CK равны как расстояния между параллельными прямыми AD и BC . Отняв от площади каждого из этих треугольников площадь треугольника AOD , получим, что $S_{AOB} = S_{COD}$. Что и требовалось доказать.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

Тест 1

Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке.

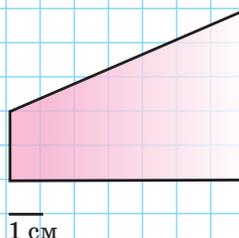
- а) 24 см^2 ; в) 36 см^2 ;
 б) 48 см^2 ; г) 32 см^2 .



Тест 2

Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке.

- а) 49 см^2 ; в) 36 см^2 ;
 б) $24,5 \text{ см}^2$; г) $\frac{49}{2} \text{ см}^2$.



Задания к § 17

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
 ключевые задачи

Задача 1. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ (рис. 206), $BH = 7 \text{ см}$ — высота трапеции, $HD = 10 \text{ см}$. Найти площадь трапеции.

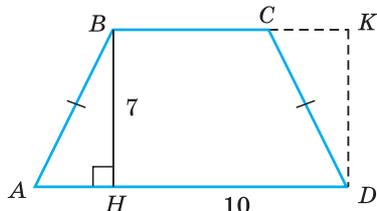


Рис. 206

Решение. *Способ 1.* Перенесем прямоугольный треугольник ABH на место треугольника CKD (см. рис. 206). У четырехугольника $HBKD$ все углы прямые, поэтому это прямоугольник. Площадь прямоугольника $HBKD$ равна площади трапеции $ABCD$, так как прямоугольник и трапеция состоят из равных фигур. Тогда $S_{ABCD} = S_{HBKD} = HD \cdot BH = 10 \cdot 7 = 70 \text{ (см}^2\text{)}$.

Замечание. Подумайте, откуда следует, что $\angle KCD + \angle DCB = 180^\circ$.

Способ 2. Согласно ключевой задаче 2 § 11 для равнобедренной трапеции $HD = \frac{AD + BC}{2}$. То есть отрезок HD равен средней линии трапеции. Тогда

$$S_{ABCD} = HD \cdot BH = 10 \cdot 7 = 70 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 70 см^2 .

Задача 2. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC $AD = 18 \text{ см}$, $BC = 8 \text{ см}$, $AB = 13 \text{ см}$. Найти площадь трапеции.

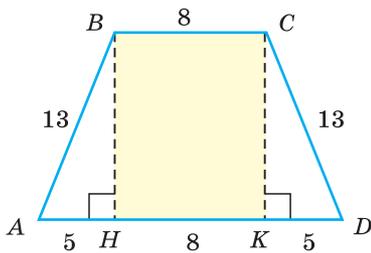


Рис. 207

Решение. Способ 1. Проведем высоты BH и CK (рис. 207). Треугольники ABH и DCK равны по катету ($BH = CK$) и гипотенузе ($AB = CD$). Откуда $AH = KD$. У четырехугольника $HBCK$ все углы прямые, поэтому это — прямоугольник.

Тогда $HK = BC = 8 \text{ см}$,

$$AH = \frac{1}{2}(AD - HK) = \frac{1}{2}(18 - 8) = 5 \text{ (см)}.$$

Из треугольника ABH по теореме Пифагора $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ (см)}$.
Площадь трапеции

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH = \frac{18 + 8}{2} \cdot 12 = 156 \text{ (см}^2\text{)}.$$

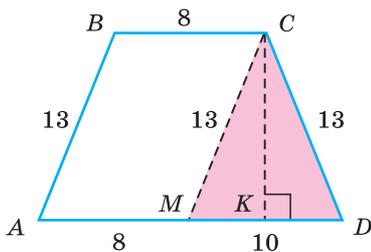


Рис. 208

Способ 2. Проведем $CM \parallel AB$ (рис. 208). Так как $BC \parallel AM$, то $ABCM$ — параллелограмм. У параллелограмма противоположные стороны равны, откуда $AM = BC = 8 \text{ см}$, $CM = AB = 13 \text{ см}$. Тогда $MD = AD - AM = 10 \text{ см}$. Треугольник MCD — равнобедренный. Его высота CK будет и высотой трапеции. Так как высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является и медианой, то $KD = MK = 5 \text{ см}$. Из прямоугольного треугольника CKD по теореме Пифагора

$$CK = \sqrt{CD^2 - KD^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ (см)}.$$

Получаем

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CK = \frac{18 + 8}{2} \cdot 12 = 156 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 156 см^2 .

Задача 3. Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ (рис. 209, а) перпендикулярны и равны 8 см и 10 см соответственно. Найдите площадь трапеции.

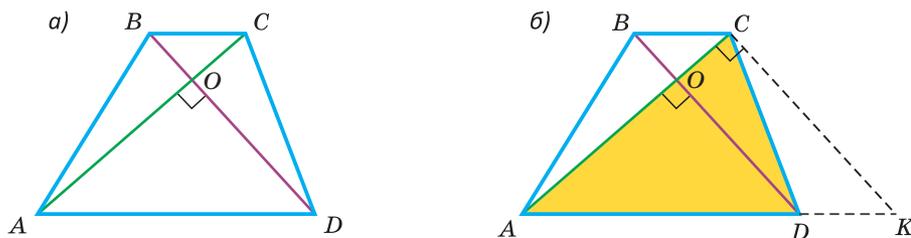


Рис. 209

Решение. *Способ 1.* Проведем $CK \parallel BD$ (рис. 209, б). Так как $BC \parallel DK$, то $DBCK$ — параллелограмм. Поэтому $DK = BC$, $CK = BD = 8$ см. Кроме того, $\angle ACK = \angle AOD = 90^\circ$ как соответственные углы при $BD \parallel CK$ и секущей AC . Заметим, что площадь трапеции $ABCD$ равна площади треугольника ACK . Действительно, треугольник ACD для этих фигур является общим, а треугольники ABC и CDK равновелики, так как у них равны основания BC и DK и высоты, проведенные к ним.

$$S_{ABCD} = S_{ACK} = \frac{AC \cdot CK}{2} = \frac{10 \cdot 8}{2} = 40 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Способ 2. $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2}AC \cdot BO + \frac{1}{2}AC \cdot OD = \frac{1}{2}AC(BO + OD) = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 = 40 \text{ (см}^2\text{)}$. То есть площадь выпуклого четырехугольника, у которого диагонали перпендикулярны, равна половине произведения диагоналей.

Ответ: 40 см².



РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

- 228.** а) Найдите площадь трапеции с основаниями 14 см и 9 см и высотой 6 см.
 б) Найдите высоту трапеции с площадью 96 см² и основаниями, равными 5 см и 11 см.
 в) Меньшее основание трапеции равно 6 см, высота — 8 см, площадь — 80 см². Найдите большее основание трапеции.
- 229.** Найдите площадь прямоугольной трапеции, у которой:
- а) основания равны 32 см и 18 см, меньшая боковая сторона — 14 см;
 б) основания равны 2 см и 6 см, большая боковая сторона — 5 см.

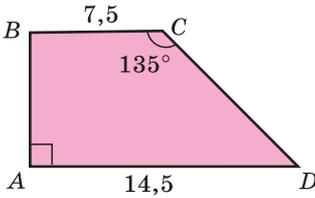


Рис. 210

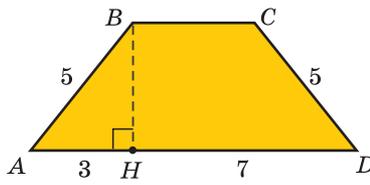


Рис. 211

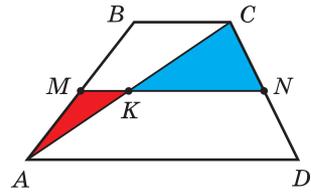


Рис. 212

- 230.** Найдите площадь равнобедренной трапеции $ABCD$ с боковой стороной, равной 17 см, и основаниями 10 см и 26 см.
- 231.** Высота трапеции — h , средняя линия — m , площадь — S .
- а) $h = 12$ см, $S = 72$ см². Найдите m .
 б) $m = 9$ см, $S = 36$ см². Найдите h .
- 232.** У трапеции $ABCD$ (рис. 210) $\angle A = 90^\circ$, $AD = 14,5$ см, $BC = 7,5$ см и $\angle C = 135^\circ$. Найдите площадь трапеции.
- 233.** Боковая сторона равнобедренной трапеции $ABCD$ равна 5 см, ее высота BH делит основание AD на отрезки $AH = 3$ см, $HD = 7$ см (рис. 211). Найдите площадь трапеции.
- 234.** Дана трапеция $ABCD$, MN — ее средняя линия (рис. 212). Сумма площадей треугольников AMK и CKN равна 32 см². Найдите площадь трапеции $ABCD$.
- 235.** Найдите площадь прямоугольной трапеции с углом 60° , если:
- а) основания трапеции равны 4 см и 10 см;
 б) большее основание равно 8 см, высота трапеции равна $4\sqrt{3}$ см.
- 236.** Основания трапеции — a и b , боковые стороны — c и d . Найдите площадь трапеции, если:
- а) $a = 6$ см, $b = 3$ см, $c = 4$ см, $d = 5$ см;
 б) $a = 8$ см, $b = 3$ см, $c = 3$ см, $d = 4$ см.
- 237.** Найдите площадь трапеции с основаниями a и b и диагоналями d_1 и d_2 , если:
- а) $d_1 = d_2 = 15$ см, $a = 8$ см, $b = 12$ см;
 б) $d_1 = 12$ см, $d_2 = 5$ см, $a = 9$ см, $b = 4$ см.

- 238.** Вершины равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD лежат на окружности, AD — диаметр (рис. 213). Найдите высоту и площадь трапеции, если $BC = 12$ см и $AD = 20$ см.

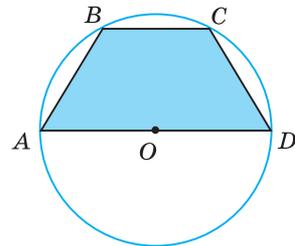


Рис. 213

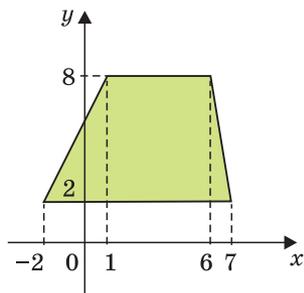


Рис. 214

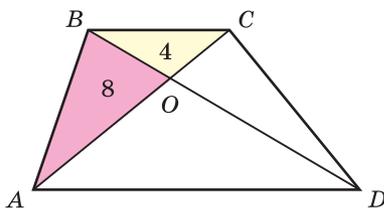


Рис. 215

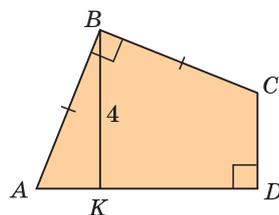


Рис. 216

- 239.** а) Найдите площадь трапеции, изображенной на координатной плоскости (рис. 214).
 б) Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, где $A(1; 0)$, $B(1; 6)$, $C(5; 8)$, $D(10; 5)$.
- 240.** Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O , $S_{BOC} = 4 \text{ см}^2$, $S_{AOB} = 8 \text{ см}^2$ (рис. 215). Найдите площадь трапеции.
- 241.** Боковая сторона равнобедренной трапеции равна 4 см, угол при основании равен 60° , диагональ трапеции перпендикулярна боковой стороне. Найдите отношение площадей треугольников, на которые диагональ делит трапецию (в ответе укажите отношение меньшей площади к большей).
- 242.** В трапеции $ABCD$ боковая сторона $AB = 8$ см, расстояние от середины боковой стороны CD до прямой AB равно 10 см. Найдите площадь трапеции.
- 243.** В четырехугольнике $ABCD$ $AB = BC$, углы B и D — прямые (рис. 216). Перпендикуляр BK к прямой AD равен 4 см. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.



ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Теорему Пифагора.
2. Теорему, обратную теореме Пифагора.
3. Как найти диагональ квадрата по его стороне. Как найти сторону квадрата по его диагонали.
4. Формулу площади трапеции.

Умеем

1. Доказывать теорему Пифагора.
2. Выводить формулу площади трапеции.