§ 19. Обобщенная теорема Фалеса

Под *отношением* отрезков a и b понимают отношение их длин, то есть число $\frac{a}{b}$. Пусть имеются две пары отрезков: a и b, c и d. Говорят, что отрезки a и b *пропорциональны* отрезкам c и d, если их отношения равны, то есть $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Например, отрезки $AB = 5$ см и $CD = 10$ см пропорциональны отрезкам $A_1B_1 = 4$ см и $C_1D_1 = 8$ см, так как $\frac{AB}{CD} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $\frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ и $\frac{AB}{CD} = \frac{A_1B_1}{C_1D_1}$.

Если для отрезков a, b, c и d справедливо равенство $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то по свойству пропорции: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$; $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ (рис. 238).

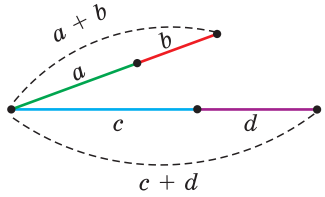


Рис. 238

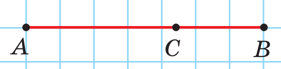
Прибавив единицу к обеим частям последней пропорции, получим: $\frac{b}{a} + 1 = \frac{d}{c} + 1$, $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$.

Понятие пропорциональности рассматривается и для большего числа отрезков. Так, отрезки a, b и c пропорциональны отрезкам m, n и k, если $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{k}$, или по-другому — $a : b : c = m : n : k$.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

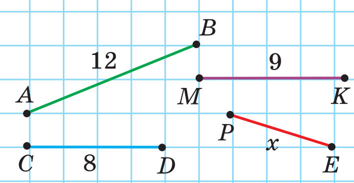
Тест 1

Если $AC : CB = 5 : 3$, то чему равно отношение:
а) $BC : AC$;
б) $AC : AB$?



Тест 2

Если $\frac{AB}{CD} = \frac{MK}{PE}$, то чему равна длина отрезка PE?



В главе I нами доказана теорема Фалеса «*Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие другую сторону угла, то на другой стороне угла отложатся равные между собой отрезки*». Эту теорему можно обобщить на случай произвольных отрезков.

Теорема Фалеса обобщенная (теорема о пропорциональных отрезках).
Если на одной стороне угла отложить несколько отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие другую сторону угла, то на другой стороне угла отложатся отрезки, пропорциональные данным.

Можно использовать сокращенную формулировку теоремы: «*Параллельные прямые отсекают на сторонах угла пропорциональные отрезки*».

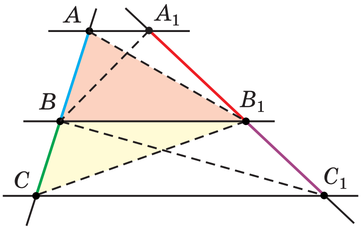


Рис. 239

Дано: $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ (рис. 239).

Доказать: $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$.

Доказательство. Проведем отрезки AB_1, CB_1, A_1B и C_1B. Так как треугольники AB_1B и CB_1B имеют общую высоту, проведенную из вершины B_1, то их площади относятся как основания: $\frac{S_{AB_1B}}{S_{CB_1B}} = \frac{AB}{BC}$. Так как треугольники A_1BB_1 и C_1BB_1 имеют общую высоту, проведенную из вершины B, то $\frac{S_{A_1BB_1}}{S_{C_1BB_1}} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$. Но треугольники AB_1B и A_1BB_1 равновелики: у них общее основание BB_1 и равные высоты, проведенные из вершин A и A_1 (в силу $AA_1 \parallel BB_1$). Также равновелики треугольники CB_1B и C_1BB_1: у них общее основание BB_1 и равные высоты, проведенные из вершин C и C_1 (в силу $CC_1 \parallel BB_1$). Поэтому $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$.
Теорема доказана.

Замечание. Обобщенная теорема Фалеса также справедлива для трех и более отложенных отрезков и не только для сторон угла, но и для произвольных прямых.

Теорема, обратная обобщенной теореме Фалеса.
Если на сторонах угла от его вершины последовательно отложить пропорциональные отрезки, то прямые, проходящие через их соответствующие концы, будут параллельны, т. е. если $\frac{AB}{BC} = \frac{AB_1}{B_1C_1}$, то $BB_1 \parallel CC_1$ (рис. 240).

Докажите данную теорему самостоятельно, используя метод от противного и доказанную выше прямую теорему Фалеса.

Следует иметь в виду, что обратная теорема Фалеса справедлива только для отрезков, отложенных от вершины угла.

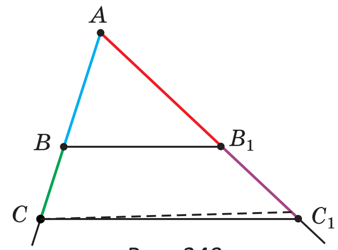
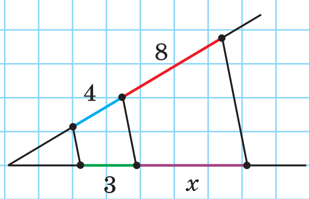


Рис. 240

А теперь выполните **Тест 3** и **Тест 4**.

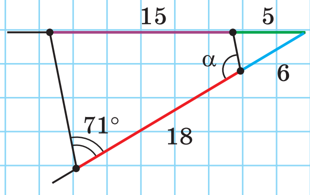
Тест 3

Стороны угла пересечены параллельными прямыми. Найдите длину отрезка x.



Тест 4

По размерам, данным на рисунке, найдите величину угла α.



Задания к § 19

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
ключевые задачи

Задача 1. *В трапеции проведены отрезки p и k, параллельные основаниям a и b трапеции* (рис. 241). *Найти x и y по размерам, указанным на рисунке. В ответе указать значение xy.*

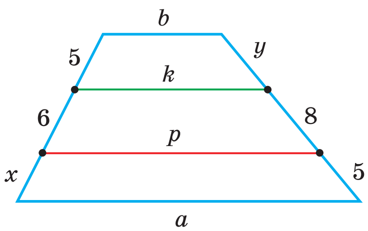


Рис. 241

Решение. По обобщенной теореме Фалеса

$\frac{x}{6} = \frac{5}{8}$ и $\frac{y}{8} = \frac{5}{6}$.

Тогда $x = \frac{6 \cdot 5}{8} = 3\frac{3}{4}$, $y = \frac{8 \cdot 5}{6} = 6\frac{2}{3}$,

$xy = \frac{6 \cdot 5}{8} \cdot \frac{8 \cdot 5}{6} = 25.$

Ответ: 25.

Задача 2. *В равнобедренном треугольнике ABC (AB = BC) проведена высота BH. Точка K делит высоту BH в отношении 1 : 3, считая от основания AC. Прямая AK пересекает сторону BC в точке M. Найти отношение* $\frac{BM}{MC}$.

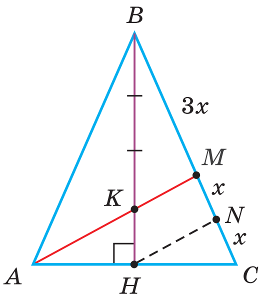


Рис. 242

Решение. В равнобедренном треугольнике ABC высота BH будет и медианой, поэтому $AH = HC$. Проведем $HN \parallel AM$ (рис. 242). По теореме Фалеса (для угла C) $\frac{MN}{NC} = \frac{AH}{HC}$, откуда $MN = NC = x$. Так как $\frac{KH}{BK} = \frac{1}{3}$ (по условию) и $HN \parallel KM$, то по обобщенной теореме Фалеса (для угла HBC) $\frac{MN}{BM} = \frac{KH}{BK} = \frac{1}{3}$. Тогда $BM = 3MN = 3x$, $\frac{BM}{MC} = \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$.

Ответ: 3 : 2.

Задача 3. *При помощи циркуля и линейки: а) разделить данный отрезок a в отношении $m : n$; б) по данным отрезкам a, b и c построить отрезок x, который является четвертым членом пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ (построение четвертого пропорционального отрезка).*

Решение. а) Пусть дан отрезок $AB = a$ и отрезки m и n (рис. 243). Из точки A проводим произвольный луч AK и откладываем на нем отрезки $AC = m$ и $CD = n$. Проводим отрезок BD. Строим $CM \parallel BD$. По обобщенной теореме Фалеса $AM : MB = AC : CD = m : n$.

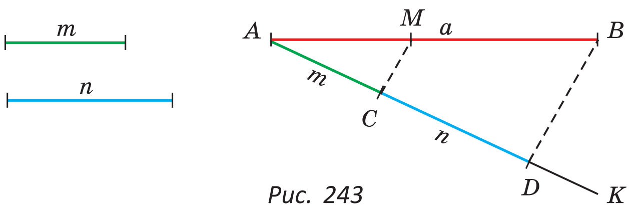


Рис. 243

Замечание. Если отношение отрезков дано в виде отношения натуральных чисел m и n, на луче AK откладывают последовательно m произвольных равных отрезков, а затем n таких же отрезков. Дальнейшее построение совпадает.

б) Строим произвольный угол A (рис. 244). На одной его стороне откладываем отрезки $AB = a$, $BC = b$. На другой стороне — отрезок $AD = c$. Прово-

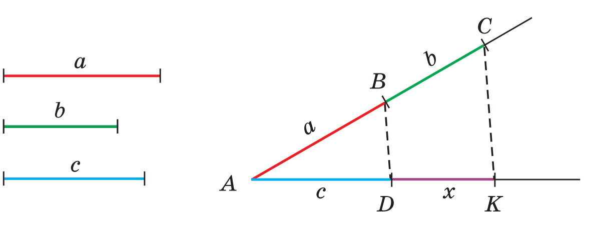


Рис. 244

дим отрезок BD. Строим $CK \parallel BD$, $K \in AD$. Отрезок $DK = x$ — искомый, так как из обобщенной теоремы Фалеса следует $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

Задача 4. *Площадь треугольника ABC равна 36 см^2, $BM = \frac{1}{3}AB$, $MK \parallel AC$. Найти площади S_1, S_2 и S_3 треугольников MBK, AMK и AKC* (рис. 245).

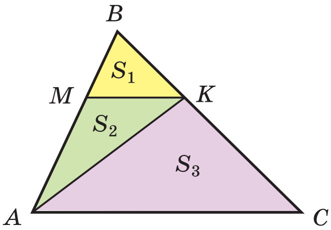


Рис. 245

Решение. Из условия следует $BM : AB = 1 : 3$. Так как BM содержит 1 часть, AB — 3 части, то MA содержит 2 части. Отсюда $BM : MA = 1 : 2$. По теореме о пропорциональных отрезках $BK : KC = BM : MA = 1 : 2$. Так как треугольники AKC и ABK имеют общую высоту, проведенную из вершины A, то их площади относятся как основания BK и KC, то есть $1 : 2$.

Тогда $S_3 = \frac{2}{3}S_{ABC} = \frac{2}{3} \cdot 36 = 24$ (см^2),

$S_{ABK} = \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 36 = 12$ (см^2).

Так как треугольники MBK и AMK имеют общую высоту, опущенную из вершины K, то их площади относятся как основания BM и MA, то есть $1 : 2$. Тогда $S_1 = \frac{1}{3}S_{ABK} = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$ (см^2),

$S_2 = \frac{2}{3}S_{ABK} = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8$ (см^2).

Ответ: 4 см^2, 8 см^2, 24 см^2.

Замечание. Решение можно сократить:

1) $S_{ABK} = \frac{1}{3}S_{ABC}$, $S_{MBK} = \frac{1}{3}S_{ABK} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{9}S_{ABC} = \frac{1}{9} \cdot 36 = 4$ (см^2).

2) $S_{AMK} = 2S_{MBK} = 2 \cdot 4 = 8$ (см^2). $S_{AKC} = 36 - 4 - 8 = 24$ (см^2).

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

261. Даны два отрезка: $a = 3$ см, $b = 4$ см. Какие из следующих пар отрезков пропорциональны отрезкам a и b:

а) $m = 6$ мм, $n = 8$ мм;

б) $c = 1\frac{1}{2}$ км, $p = 2$ км;

в) $k = 9$ см, $p = 16$ см;

г) $l = 3{,}6$ м, $g = 180$ см?

262. На рисунках 246, *а*)—*в*) $m \parallel n \parallel k$. Найдите длину отрезка x (все размеры даны в сантиметрах).

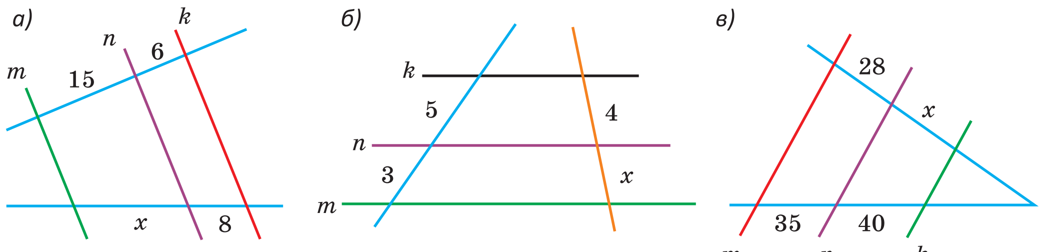


Рис. 246

263. На рисунке 247 отрезки MN и PK параллельны отрезку BC. Найдите:

а) отрезки AN и KC;
б) периметр треугольника ABC (все размеры даны в сантиметрах).

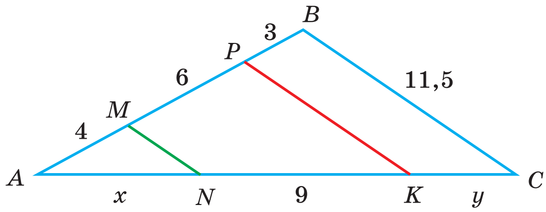


Рис. 247

264. На рисунке 248 $AGFE$ — параллелограмм, $GB = 4$ см, $BF = 5$ см, $FC = 10$ см. Периметр треугольника ABC равен 45 см. Найдите:
а) отрезки AG, AC, AE;
б) периметр параллелограмма $AGFE$.

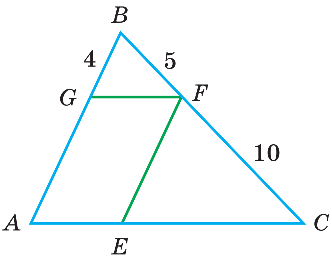


Рис. 248

265. В треугольнике ABC проведена биссектриса AK и отрезок KM, параллельный стороне AC ($M \in AB$); $MB = 6$ см, $BK : KC = 2 : 3$. Найдите:

а) отрезок AM;
б) отрезок MK.

266. На рисунке 249 $MK \parallel AC$. Найдите:

а) MB, если $AB = 32$ см, $BK : KC = 5 : 3$;
б) AB, если $AM = 18$ см, $BC : BK = 3 : 2$;
в) BK, если $BM = 12$ см, $AM : KC = 4 : 5$;
г) BC, если $AM : AB = 2 : 7$,
$BK - KC = 6$ см.

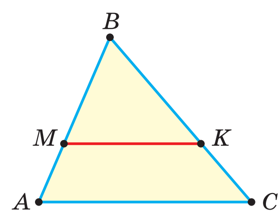


Рис. 249

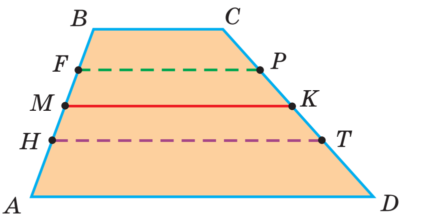


Рис. 250

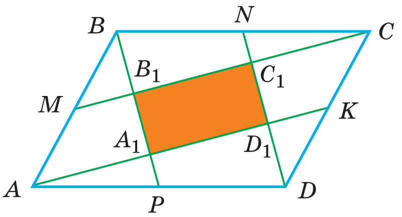


Рис. 251

267. При помощи циркуля и линейки разделите данный отрезок в отношении: а) $2 : 3$; б) $3 : 5$ (для проведения параллельных прямых можно использовать чертежный треугольник).

268. В трапеции $ABCD$ (рис. 250) проведены отрезки FP и HT, параллельные основаниям, MK — средняя линия трапеции, $CD = 60$ см. Если $MF : FB = 2 : 3$, $MH : HA = 1 : 2$, то чему равна длина отрезка PT?

269. В треугольнике ABC проведена медиана BM, точка F — ее середина. Прямая CF пересекает сторону AB в точке K. Площадь четырехугольника $AKFM$ равна 50 см^2. Найдите площадь треугольника ABC.

270. Точки M, N, K и P — середины сторон параллелограмма $ABCD$ (рис. 251). Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 120 см^2. Найдите площадь четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$.

271. Даны отрезки a и b. Составьте алгоритм построения при помощи циркуля и линейки отрезка x, если $x = \frac{a^2}{b}$.

§ 20. Подобие треугольников

Подобными являются фигуры одинаковой формы, но разных размеров. Например, подобны две окружности (252, *а*) разного радиуса, два квадрата с разной длиной стороны (рис. 252, *б*) и вообще две фигуры F_1 и F_2, каждая из которых представляет собой уменьшенную или увеличенную копию другой, например как на рисунке 252, *в*).

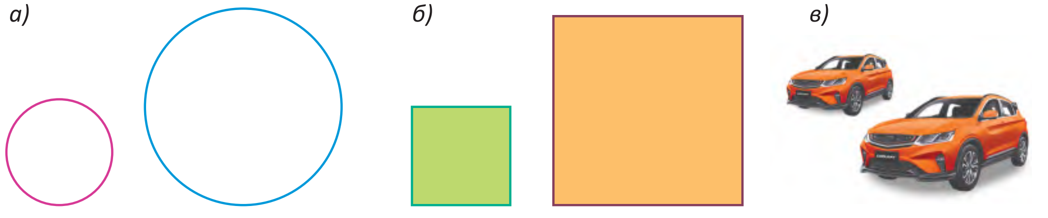


Рис. 252