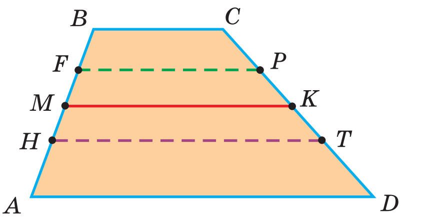


Рис. 250

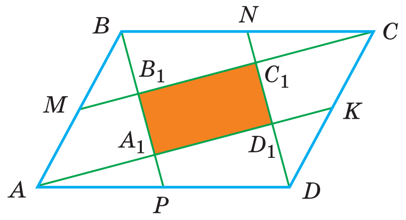


Рис. 251

267. При помощи циркуля и линейки разделите данный отрезок в отношении: а) $2 : 3$; б) $3 : 5$ (для проведения параллельных прямых можно использовать чертежный треугольник).

268. В трапеции $ABCD$ (рис. 250) проведены отрезки FP и HT, параллельные основаниям, MK — средняя линия трапеции, $CD = 60$ см. Если $MF : FB = 2 : 3$, $MH : HA = 1 : 2$, то чему равна длина отрезка PT?

269. В треугольнике ABC проведена медиана BM, точка F — ее середина. Прямая CF пересекает сторону AB в точке K. Площадь четырехугольника $AKFM$ равна 50 см^2. Найдите площадь треугольника ABC.

270. Точки M, N, K и P — середины сторон параллелограмма $ABCD$ (рис. 251). Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 120 см^2. Найдите площадь четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$.

271. Даны отрезки a и b. Составьте алгоритм построения при помощи циркуля и линейки отрезка x, если $x = \frac{a^2}{b}$.

§ 20. Подобие треугольников

Подобными являются фигуры одинаковой формы, но разных размеров. Например, подобны две окружности (252, *а*) разного радиуса, два квадрата с разной длиной стороны (рис. 252, *б*) и вообще две фигуры F_1 и F_2, каждая из которых представляет собой уменьшенную или увеличенную копию другой, например как на рисунке 252, *в*).

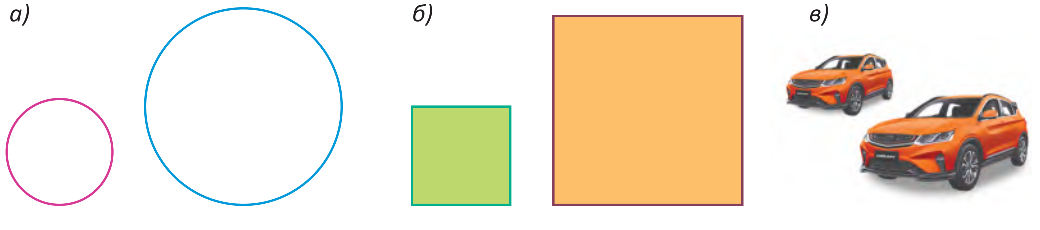


Рис. 252

Для указания подобия фигур F_1 и F_2 используется знак «$\sim$». Пишут $F_1 \sim F_2$.

Определение. Два треугольника называются **подобными**, если у них углы соответственно равны, а соответствующие стороны пропорциональны.

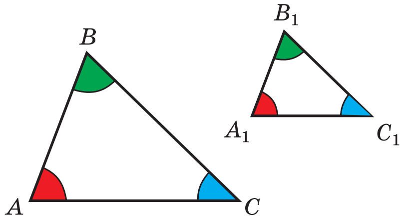


Рис. 253

Соответствующими (*сходственными*) сторонами подобных треугольников называются стороны, лежащие против соответственно равных углов этих треугольников.

Другими словами, если для треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 253) выполняются два условия:

1) $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$;

2) $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$,

то треугольники подобны.

Для удобства подобные треугольники обычно записывают и называют в порядке следования соответствующих вершин. Так, если $\triangle ABC \sim \triangle MNK$, то вершины A и M, B и N, C и K — соответствующие.

Отношение соответствующих сторон подобных треугольников называется *коэффициентом подобия треугольников*. Если $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, то $\dfrac{AB}{A_1B_1} = k$ — коэффициент подобия.

Для определения коэффициента подобия находят отношение стороны первого из записанных или названных подобных треугольников к соответствующей стороне второго треугольника. Например, если $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ и $\dfrac{AB}{A_1B_1} = 2$, то $k = 2$. При этом $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ с коэффициентом подобия $k = \dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{1}{2}$.

Можно выделить следующие свойства подобных треугольников:

1. Если $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, а $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$, то $\triangle ABC \sim \triangle A_2B_2C_2$.
2. Если $\triangle ABC \sim \triangle MNK$ и $k = 1$, то $\triangle ABC = \triangle MNK$.

Теорема (о параллельной прямой).
Прямая, параллельная стороне треугольника и пересекающая две другие его стороны, отсекает от него треугольник, подобный данному.

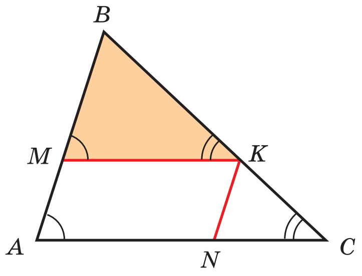


Рис. 254

Дано: $\triangle ABC$, $MK \parallel AC$.

Доказать: $\triangle MBK \sim \triangle ABC$.

Доказательство. У треугольников MBK и ABC углы равны: $\angle BMK = \angle BAC$, $\angle BKM = \angle BCA$ как соответственные при параллельных прямых MK и AC, $\angle B$ — общий (рис. 254).

Докажем, что у треугольников MBK и ABC соответствующие стороны пропорциональны. По обобщенной теореме Фалеса $\frac{BM}{MA} = \frac{BK}{KC}$, откуда $\frac{BM}{AB} = \frac{BK}{BC}$. Проведем $KN \parallel AB$. По обобщенной теореме Фалеса $\frac{AN}{NC} = \frac{BK}{KC}$, откуда $\frac{AN}{AC} = \frac{BK}{BC}$. Но $AMKN$ — параллелограмм ($MK \parallel AC$, $KN \parallel AB$). Поэтому $MK = AN$ и $\frac{MK}{AC} = \frac{BK}{BC}$. Тогда $\frac{BM}{AB} = \frac{BK}{BC} = \frac{MK}{AC}$. Так как у треугольников MBK и ABC углы равны, а стороны пропорциональны, то треугольники подобны.

Теорема доказана.

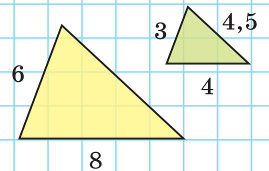
А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

Тест 1

Если желтый и зеленый треугольники подобны, то периметр желтого треугольника равен ...

а) 20; в) 24;

б) 18; г) 23.

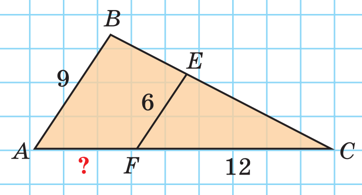


Тест 2

Если $EF \parallel AB$, то $AF = ...$

а) 6; в) 8;

б) 7; г) 6,5.



Задания к § 20

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

Задача 1. *Доказать, что периметры подобных треугольников относятся как их соответствующие стороны.*

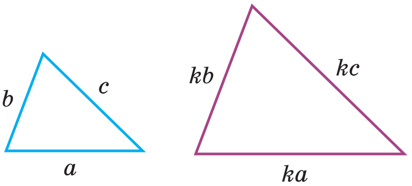


Рис. 255

Доказательство. Пусть стороны одного из подобных треугольников равны a, b и c. Тогда стороны подобного ему треугольника — ka, kb и kc, где k — коэффициент подобия (рис. 255). Отношение периметров

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{ka + kb + kc}{a + b + c} = \frac{k(a + b + c)}{a + b + c} = k.$$

Получили, что отношение периметров равно коэффициенту подобия. А коэффициент подобия равен отношению соответствующих сторон подобных треугольников.

Замечание. У подобных треугольников отношение любых соответствующих линейных элементов (высот, биссектрис, медиан и т. д.) равно коэффициенту подобия.

Задача 2. *Треугольники на рисунке 256 подобны. Причем $\angle A = \angle G$, $\angle B = \angle F$, $AB = 18$ см, $AC = 21$ см, $EF = 10$ см, $EG = 14$ см. Найти длины сторон BC и FG.*

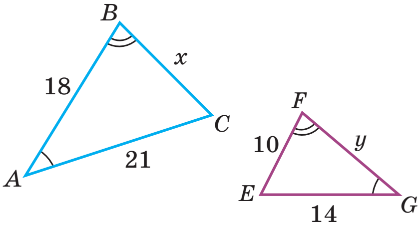


Рис. 256

Решение. Так как $\angle A = \angle G$, $\angle B = \angle F$, то $\angle C = \angle E$. Стороны AC и EG, AB и FG, BC и FE — соответствующие, так как лежат против равных углов. Пусть $BC = x$ см, $FG = y$ см. Поскольку у подобных треугольников соответствующие стороны пропорциональны, то $\frac{BC}{FE} = \frac{AC}{GE}$, или $\frac{x}{10} = \frac{21}{14}$, откуда $x = \frac{10 \cdot 21}{14} = 15$, $BC = 15$ см. Аналогично, $\frac{FG}{BA} = \frac{GE}{AC}$, $\frac{y}{18} = \frac{14}{21}$, $y = \frac{18 \cdot 14}{21} = 12$, $FG = 12$ см.

Ответ: $BC = 15$ см, $FG = 12$ см.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

272. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ на рисунках 257, *а*), *б*) подобны. По указанным размерам найдите неизвестные стороны треугольников, обозначенные знаком вопроса (все размеры даны в сантиметрах).

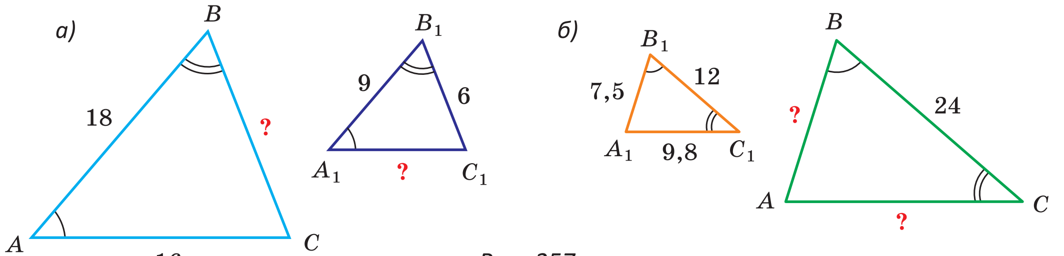


Рис. 257

273. Треугольники ABC и MNK на рисунках 258, *а*), *б*) подобны, $\angle A = \angle M$, $\angle C = \angle K$. Найдите:

а) сумму $AC + MN$;
б) периметр треугольника MNK (размеры даны в сантиметрах).

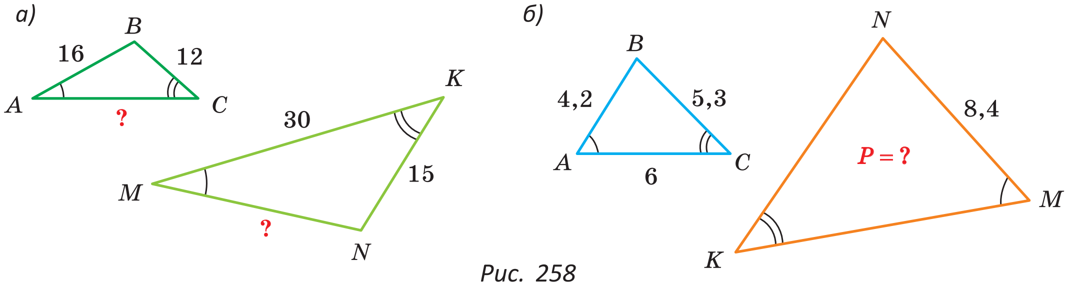


Рис. 258

274. Известно, что $\triangle ABC \sim \triangle MNK$. Найдите:

а) величину угла B, если $\angle M = 80°$, $\angle K = 40°$;
б) величину угла K, если $\angle N = 75°$, $\angle A = \angle B$;
в) длину стороны AB, если $BC = 15$ см, $MN = 21$ см, $NK = 45$ см;
г) площадь треугольника MNK, если $\angle A = 90°$, $BC = 15$ см, $AB = 12$ см, $NK = 5$ см.

275. На рисунке 259 $MK \parallel AC$, $MK = 6$ м, $MB = 4$ м, $AM = 2$ м. Найдите длину AC.

276. На рисунке 260 $\angle BAC = 90°$, $HK \perp AC$, $AK = 4$ см, $KC = 12$ см, $AB = 8$ см. Найдите длину HK.

277. На рисунке 261 $AK = 4$ см, $KB = 8$ см, $EC = 12$ см. Найдите периметр параллелограмма $KBEF$.

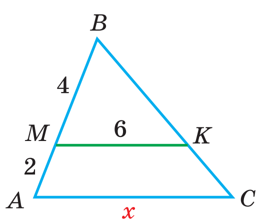


Рис. 259

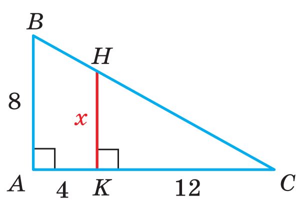


Рис. 260

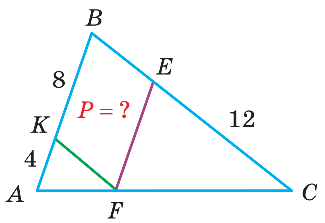


Рис. 261

278. Равнобедренные треугольники на рисунке 262 подобны, $\angle C = 71°$. Найдите величину угла N.

279. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Периметр треугольника ABC равен 24 см, периметр треугольника $A_1B_1C_1$ равен 36 см. Сторона AB равна 8 см. Найдите соответствующую ей сторону A_1B_1.

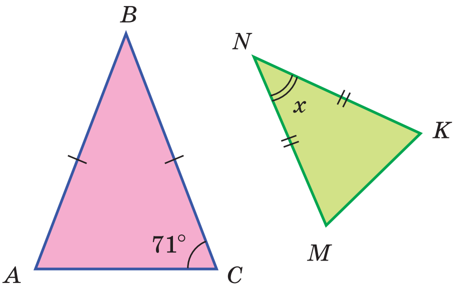


Рис. 262

280. Известно, что $\triangle ABC \sim \triangle MNK$ с коэффициентом подобия $k = 3$ $\left(\frac{AB}{MN} = k\right)$. Найдите периметр треугольника MNK, если $AB = 4$ см, $BC = 5\frac{1}{3}$ см, $AC = 2\frac{2}{3}$ см.

281. Докажите, что средняя линия треугольника отсекает от него треугольник, подобный данному. Найдите коэффициент подобия этих треугольников.

282. Изобразите треугольник ABC. Через его вершины проведите прямые, параллельные противоположным сторонам. Докажите, что образованный ими треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC.

283. Дана трапеция $ABCD$, $AD = 15$ см, $BC = 6$ см — основания трапеции, $AB = 6$ см, $CD = 12$ см. Боковые стороны трапеции продолжены до пересечения в точке K. Найдите длины отрезков BK и CK.

284. Дана трапеция $ABCD$. Точка K принадлежит боковой стороне AB, точка P — боковой стороне CD, $KP \parallel AD$; $BC = 4$ см, $AD = 11$ см, $KP = 6$ см. Найдите отношение $CP : PD$.

285. На рисунке 263 $MBCK$ — трапеция со сторонами, равными 10 м, 15 м, 4 м и 6 м. Найдите отношение периметра треугольника ABC к периметру трапеции.

286. В треугольнике ABC $AB = 4$ см, $AC = 12$ см (рис. 264). Найдите периметр ромба $AMNK$.

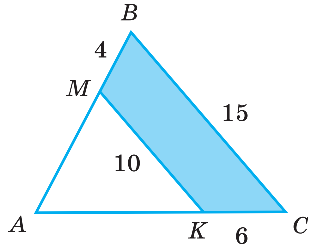


Рис. 263

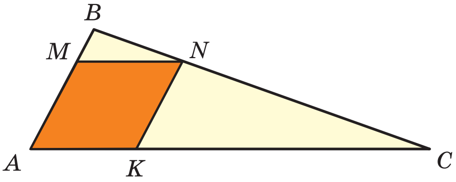


Рис. 264

287. $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, коэффициент подобия $k = \frac{2}{3}$. Известно, что $AB + BC = 24$ см, $A_1B_1 - B_1C_1 = 6$ см. Найдите AB.

288. Стороны одного из двух подобных треугольников равны 6 см и 12 см, другого — 12 см и 18 см. Найдите неизвестные стороны каждого из треугольников, если коэффициент подобия второго треугольника первому:

а) целое число;
б) дробное число.

289. На координатной плоскости дан треугольник OAB, где $O(0;\ 0)$, $A(3;\ 5)$, $B(3;\ 0)$. Постройте какой-либо треугольник OA_1B_1, подобный данному, стороны которого в 2 раза больше сторон треугольника OAB. Укажите координаты точек A_1 и B_1.

§ 21. Признаки подобия треугольников

Теорема (1-й признак подобия треугольников).
Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Дано: $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$.
Доказать: $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.
Доказательство. Отложим на стороне AC треугольника ABC отрезок AC_2, равный стороне A_1C_1, и проведем $C_2B_2 \parallel CB$ (рис. 265).

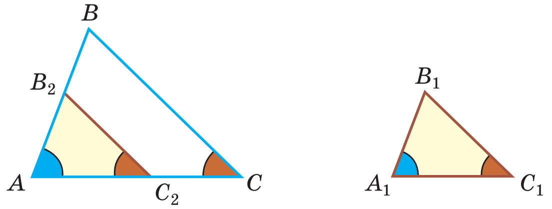


Рис. 265

Получим треугольник AB_2C_2. Так как прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному, то $\triangle AB_2C_2 \backsim \triangle ABC$. Поскольку $\angle C_2 = \angle C$ как соответственные при параллельных прямых BC и B_2C_2 и секущей AC, а $\angle C = \angle C_1$ по условию, то $\angle C_2 = \angle C_1$ и $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle AB_2C_2$ по 2-му признаку равенства треугольников. Следовательно, $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.
Теорема доказана.