287. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, коэффициент подобия $k = \frac{2}{3}$. Известно, что $AB + BC = 24$ см, $A_1B_1 - B_1C_1 = 6$ см. Найдите AB.

288. Стороны одного из двух подобных треугольников равны 6 см и 12 см, другого — 12 см и 18 см. Найдите неизвестные стороны каждого из треугольников, если коэффициент подобия второго треугольника первому:

а) целое число;
б) дробное число.

289. На координатной плоскости дан треугольник OAB, где $O(0;\ 0)$, $A(3;\ 5)$, $B(3;\ 0)$. Постройте какой-либо треугольник OA_1B_1, подобный данному, стороны которого в 2 раза больше сторон треугольника OAB. Укажите координаты точек A_1 и B_1.

§ 21. Признаки подобия треугольников

Теорема (1-й признак подобия треугольников).
Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Дано: $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$.
Доказать: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.
Доказательство. Отложим на стороне AC треугольника ABC отрезок AC_2, равный стороне A_1C_1, и проведем $C_2B_2 \parallel CB$ (рис. 265).

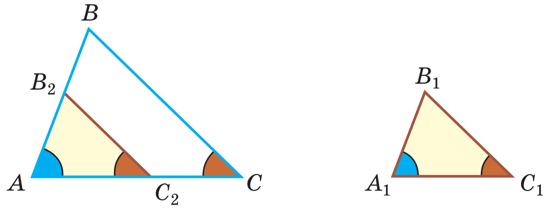


Рис. 265

Получим треугольник AB_2C_2. Так как прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному, то $\triangle AB_2C_2 \sim \triangle ABC$. Поскольку $\angle C_2 = \angle C$ как соответственные при параллельных прямых BC и B_2C_2 и секущей AC, а $\angle C = \angle C_1$ по условию, то $\angle C_2 = \angle C_1$ и $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle AB_2C_2$ по 2-му признаку равенства треугольников. Следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.
Теорема доказана.

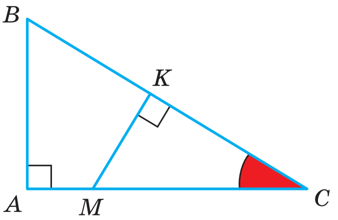


Рис. 266

Следствие.

Если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники подобны. В данном случае говорят, что прямоугольные треугольники подобны по острому углу.

На рисунке 266 прямоугольные треугольники MKC и BAC подобны, так как у них $\angle C$ — общий. Причем $\dfrac{KM}{AB} = \dfrac{KC}{AC} = \dfrac{MC}{BC}$.

Теорема (2-й признак подобия треугольников).
Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

Дано: $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$, $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$, $\angle A = \angle A_1$.

Доказать: $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

Доказательство. Отложим на стороне AC треугольника ABC отрезок AC_2, равный стороне A_1C_1, и проведем $C_2B_2 \parallel CB$ (рис. 267).

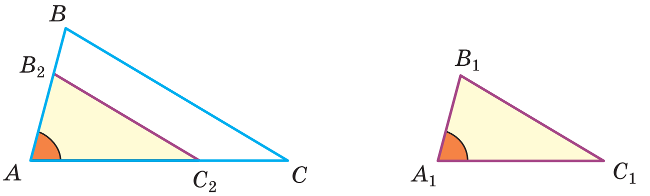


Рис. 267

Получим треугольник AB_2C_2. Так как прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному, то $\triangle AB_2C_2 \backsim \triangle ABC$. Тогда $\dfrac{AB}{AB_2} = \dfrac{AC}{AC_2}$ (1).

По условию $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$.

С учетом $A_1C_1 = AC_2$ получаем $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{AC_2}$ (2).

Сравнивая пропорции (1) и (2), приходим к выводу, что $AB_2 = A_1B_1$. Тогда $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle AB_2C_2$ по 1-му признаку равенства треугольников. Следовательно, $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$. Теорема доказана.

Теорема (3-й признак подобия треугольников).
Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Дано: $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$.

Доказать: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Доказательство. Отложим на стороне AC треугольника ABC отрезок AC_2, равный стороне A_1C_1, и проведем $C_2B_2 \parallel CB$ (рис. 268).

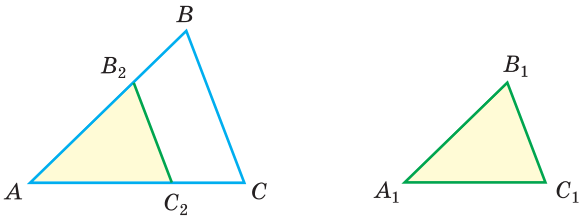


Рис. 268

Получим треугольник AB_2C_2. Так как прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному, то $\triangle AB_2C_2 \sim \triangle ABC$. Тогда $\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2} = \frac{BC}{B_2C_2}$ (1).

По условию $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$.

С учетом $AC_2 = A_1C_1$ получаем $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{AC_2} = \frac{BC}{B_1C_1}$ (2).

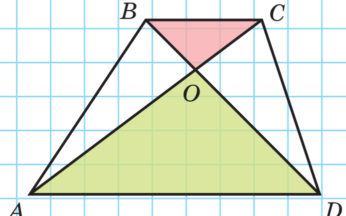
Сравнивая равенства (1) и (2), приходим к выводу, что $AB_2 = A_1B_1$, $B_2C_2 = B_1C_1$. Тогда $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle AB_2C_2$ по 3-му признаку равенства треугольников. Следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Теорема доказана.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

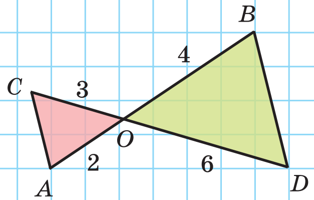
Тест 1

$ABCD$ — трапеция. По какому признаку $\triangle BOC \sim \triangle DOA$?



Тест 2

Подобны ли треугольники AOC и BOD? Если да, то по какому признаку?



Гимнастика ума

В треугольнике провели три высоты (рис. 269). Сколько пар подобных треугольников образовалось при этом?

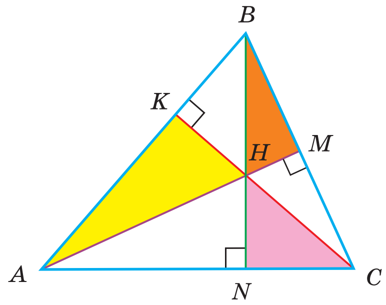


Рис. 269

Задания к § 21

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

Задача 1. *По размерам, указанным на рисунке* 270, *найти длины отрезков AD и DE.*

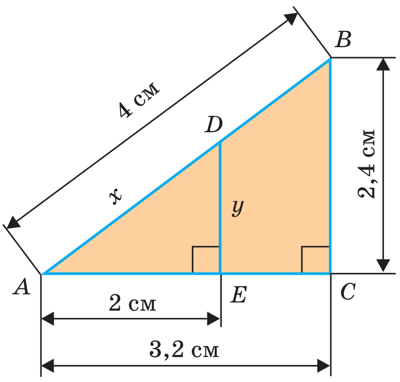


Рис. 270

Решение. Прямоугольные треугольники ABC и ADE подобны по острому углу ($\angle A$ — общий). Поэтому их соответствующие стороны пропорциональны.

Найдем отрезок AD: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$, или $\frac{x}{4} = \frac{2}{3{,}2}$, $x = \frac{4 \cdot 2}{3{,}2} = 2{,}5$ (см).

Найдем отрезок DE: $\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$, или $\frac{y}{2{,}4} = \frac{2}{3{,}2}$, $y = \frac{2{,}4 \cdot 2}{3{,}2} = 1{,}5$ (см).

Ответ: $AD = 2{,}5$ см, $DE = 1{,}5$ см.

Замечание. Условие задачи содержит избыточное данное. Так, для задания прямоугольного треугольника ABC достаточно знать длины только двух его сторон, а третью сторону можно найти по теореме Пифагора.

Задача 2. *ABCD — трапеция, AD = 30 см и BC = 15 см — ее основания, AC = 27 см, BD = 33 см — диагонали трапеции, которые пересекаются в точке O. Найти периметр треугольника AOD* (рис. 271).

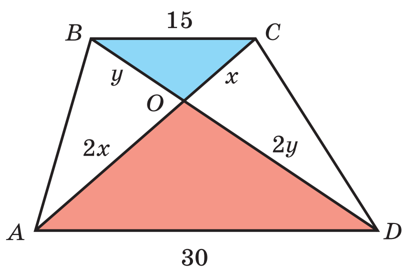


Рис. 271

Решение. Треугольники BOC и DOA подобны по 1-му признаку подобия треугольников: $\angle CBO = \angle ADO$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых AD и BC и секущей BD, $\angle COB = \angle AOD$ как вертикальные. Из подобия треугольников следует: $\frac{OC}{OA} = \frac{OB}{OD} = \frac{BC}{AD} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$.

То есть $\frac{OC}{OA} = \frac{1}{2}$ и $\frac{OB}{OD} = \frac{1}{2}$.

Если $OC = x$ см, то $OA = 2x$ см. Отсюда $2x + x = 27$, $x = 9$, $OC = 9$ см, $OA = 18$ см. Если $OB = y$ см, то $OD = 2y$ см. Отсюда $y + 2y = 33$, $y = 11$, $OB = 11$ см, $OD = 22$ см. $P_{AOD} = AO + OD + AD = 18 + 22 + 30 = 70$ (см).
Ответ: 70 см.

Задача 3. *В треугольнике ABC проведен отрезок BK так, что $\angle ABK = \angle ACB$, $AK = 9$ см, $KC = 7$ см. Найти сторону AB* (рис. 272).

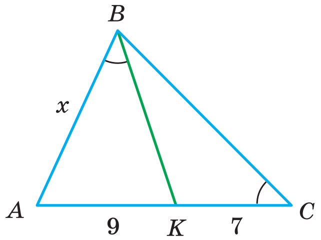


Рис. 272

Решение. У треугольников ABC и AKB угол A — общий, $\angle ABK = \angle ACB$ по условию. Поэтому $\triangle ABC \sim \triangle AKB$ по двум углам. Из подобия треугольников следует, что $\angle ABC = \angle AKB$ и $\frac{AB}{AC} = \frac{AK}{AB}$.

Если $AB = x$ см, то $\frac{x}{16} = \frac{9}{x}$, $x^2 = 9 \cdot 16$, $x = \sqrt{9 \cdot 16} = 3 \cdot 4 = 12$, $AB = 12$ см.

Ответ: 12 см.

Замечание. Когда речь идет о двух парах соответствующих сторон подобных треугольников, удобно составлять отношение двух сторон одного треугольника и приравнивать его к отношению двух соответствующих сторон другого треугольника.

Задача 4. *Дана трапеция ABCD, AD = 18 и BC = 4,5 — ее основания, диагональ AC = 9. Если $\alpha + \beta = 64°$, то чему равен угол α* (рис. 273)?

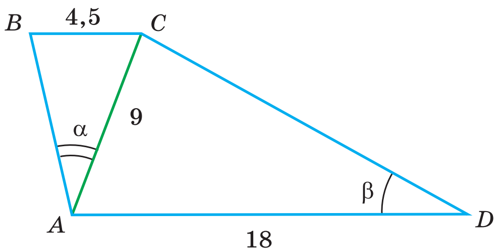


Рис. 273

Решение. Рассмотрим треугольники ABC и DCA:
$\frac{BC}{AC} = \frac{4,5}{9} = \frac{1}{2}$, $\frac{AC}{AD} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$, $\angle ACB = \angle CAD$ (как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей AC). Значит, $\triangle ABC \sim \triangle DCA$ по двум сторонам и углу между ними (по 2-му признаку подобия треугольников). Тогда $\angle BAC = \angle ADC$ как соответственные углы в подобных треугольниках, т. е. $\alpha = \beta$. Отсюда $\alpha = \frac{64°}{2} = 32°$.

Ответ: 32°.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

290. Изобразите произвольный треугольник ABC. На луче AB за точку B отложите отрезок BB_1, в 2 раза больший отрезка AB, на луче AC за точку C отложите отрезок CC_1, в 2 раза больший отрезка AC.

Объясните, почему подобны треугольники AB_1C_1 и ABC. Чему равен коэффициент подобия?

291. Найдите, при какой длине стороны A_1C_1 треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ будут подобны (рис. 274). Укажите признак подобия.

292. Какие из треугольников, изображенных на рисунке 275, подобны и почему?

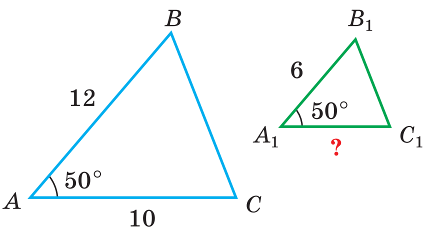


Рис. 274

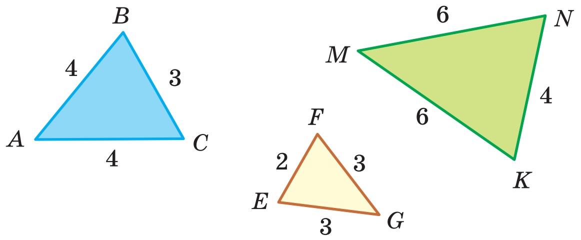


Рис. 275

293. По данным на рисунках 276, *а*), *б*) докажите подобие треугольников. Найдите длину стороны, обозначенной знаком вопроса (все размеры даны в сантиметрах).

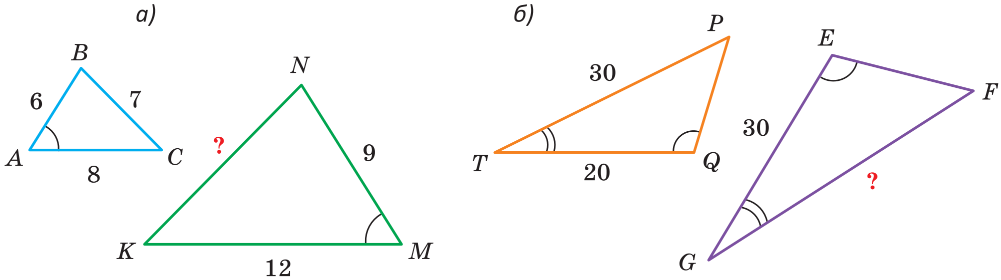


Рис. 276

294. Докажите, что если у равнобедренных треугольников равны углы при вершине, то такие треугольники подобны.

295. Докажите, что равнобедренные треугольники на рисунке 277 подобны. Найдите отношение периметров этих треугольников: $P_{ABC} : P_{KNM}$.

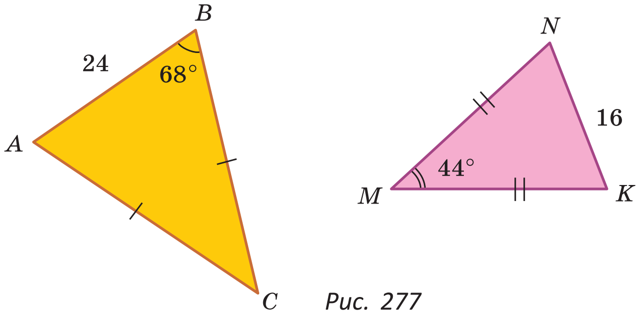


Рис. 277

296. Известно, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.

а) Если $AB = 21$ см, $BC = 27$ см, $B_1C_1 = 9$ см, $A_1C_1 = 10$ см, то чему равен периметр треугольника ABC?
б) Если $A_1B_1 = 4$ см, $B_1C_1 = 6$ см, $A_1C_1 = 8$ см, $P_{ABC} = 27$ см, то чему равна длина наибольшей стороны треугольника ABC?

297. В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 278) $\angle A = 90°$, $AB = 6$ см, $AC = 8$ см. Из середины гипотенузы BC восстановлен перпендикуляр MK. Найдите длину отрезка MK.

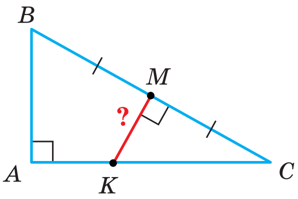


Рис. 278

298. В треугольнике ABC провели средние линии MK, KN и MN, $M \in AB$, $N \in BC$, $K \in AC$. Докажите, что треугольники ABC и NKM падобны.

299. Точки M, N и K — соответственно середины сторон AB, BC и AC треугольника ABC, $MN : KN : MK = 5 : 3 : 4$, $P_{ABC} = 48$ см. Найдите площадь треугольника ABC.

300. а) В трапеции $ABCD$ (рис. 279, *а*) $BC = 9$ см, $AD = 18$ см, $OD = 8$ см. Найдите BO.
б) В прямоугольнике $ABCD$ (рис. 279, *б*) $BC = 18$ см, $AK = 5$ см, $KC = 15$ см. Найдите MD.
в) В параллелограмме $ABCD$ (рис. 279, *в*) $AD = 12$ см, $MC = 4$ см, $KM = 6$ см. Найдите AK.

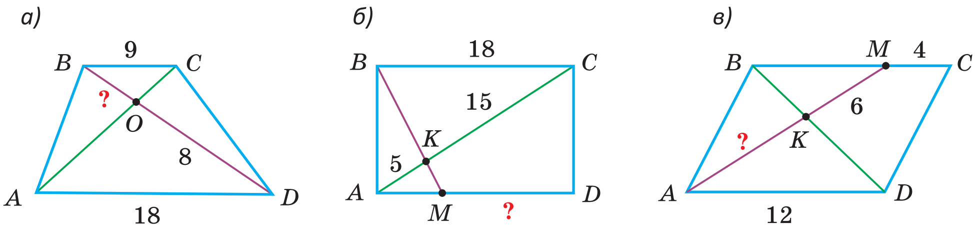


Рис. 279

301. Докажите, что если катет a и гипотенуза c одного прямоугольного треугольника соответственно пропорциональны катету a_1 и гипотенузе c_1 другого прямоугольного треугольника $\left(\frac{a}{a_1} = \frac{c}{c_1}\right)$, то такие треугольники подобны.

302. Докажите, что у подобных треугольников:

а) соответствующие высоты;
б) соответствующие биссектрисы;
в) соответствующие медианы
относятся как соответствующие стороны этих треугольников.

303. Даны треугольники ABC и MNK (рис. 280). По размерам на рисунке найдите площадь треугольника MNK (все размеры даны в сантиметрах).

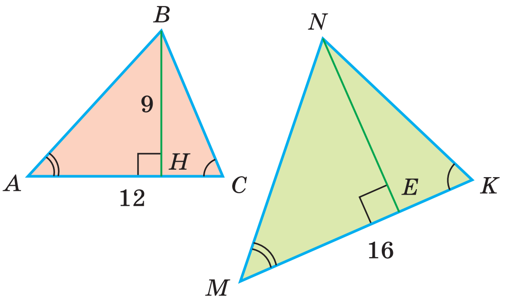


Рис. 280

304. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 21$ см, $BC = 7$ см. Диагонали трапеции $AC = 20$ см, $BD = 16$ см, O — точка пересечения диагоналей. Найдите периметр треугольника AOD.

305. На рисунке 281 $\angle KMC = \angle ABC$, $AM = 4$ см, $MC = 6$ см, $KC = 5$ см. Найдите длину отрезка BK.

306. На рисунке 282 AM и CK — высоты треугольника ABC, $CM = 9$ см, $BM = 3$ см, $BK = 4$ см. Найдите длину отрезка AK.

307. $ABCD$ — трапеция (рис. 283), AK — биссектриса угла BAD, $AB = 12$ см, $BC = 8$ см, $CK : KD = 1 : 5$. Найдите длину основания AD.

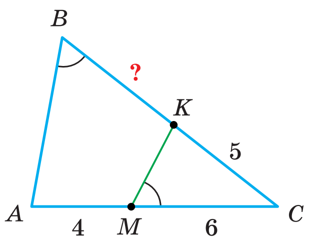


Рис. 281

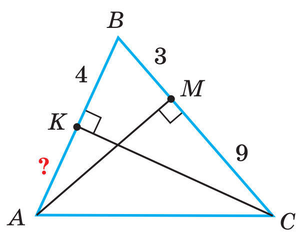


Рис. 282

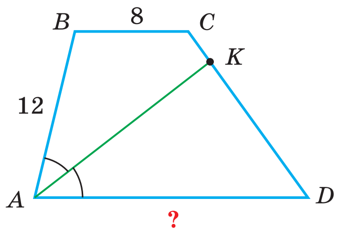


Рис. 283

308. На рисунках 284, *а*)—*в*) изображены параллелограмм, трапеция и прямоугольник. По данным на рисунках найдите длину отрезка x.

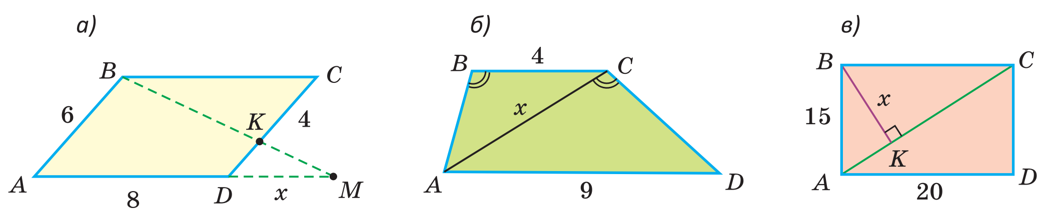


Рис. 284

309. Изобразите прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$), проведите высоту CH. Укажите все пары полученных подобных треугольников и для каждой пары запишите отношение соответствующих сторон.

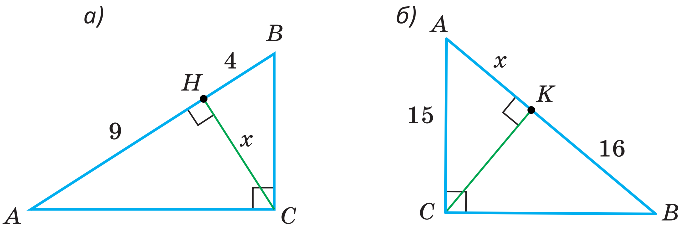


Рис. 285

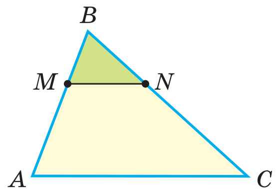


Рис. 286

310. По размерам, данным на рисунках 285, *а*), *б*), найдите:
а) высоту CH;
б) отрезок AK (проекцию катета AC на гипотенузу AB).

311. В равнобедренном треугольнике ABC, у которого $AB = BC$ и $\angle B = 36°$, провели биссектрису AK. Определите, какие из полученных треугольников подобны.

312. Периметр трапеции $AMNC$ равен 22 см (рис. 286), периметр треугольника ABC равен 24 см, периметр треугольника MBN равен 8 см. Найдите:

а) MN; б) AC.

313. а) В треугольнике ABC провели отрезок BM (M лежит на стороне AC), $\angle BMC = \angle ABC$, $AM = 7$ м, $MC = 9$ м. Найдите сторону BC.
б) В треугольнике ABC провели отрезок BM (M лежит на стороне AC), $\angle ABM = \angle ACB$, $AB = 2$ см, $AC = 4$ см. Найдите отрезки AM и MC.
в) В треугольнике ABC провели отрезок BM (M лежит на стороне AC), $\angle ABM = \angle ACB$, $AB = 4$ см, $BC = 6$ см, $BM = 3$ см. Найдите сторону AC.

314. а) В параллелограмме $ABCD$ на стороне BC взята точка M так, что $BM : MC = 5 : 7$. Луч DM пересекает луч AB в точке K. Найдите длину отрезка BK, если $AB = 42$ см.
б) В параллелограмме $ABCD$ на продолжении стороны AB за точку B взята точка M. Прямая DM пересекает диагональ AC в точке K так, что $AK : KC = 11 : 4$. Найдите длину отрезка BM, если $AB = 640$ м.

315. Квадрат вписан в треугольник, как показано на рисунке 287. Если $AC = 70$ см, $BH = 30$ см — высота, то чему равна длина стороны квадрата?

316. Дан прямоугольник $ABCD$ с площадью 210 см^2. На стороне AD взята точка K, на стороне CD — точка M так, что $AK : KD = 2 : 1$, $CM : MD = 2 : 3$. Отрезки AM и BK пересекаются в точке P. Найдите площадь треугольника APK.

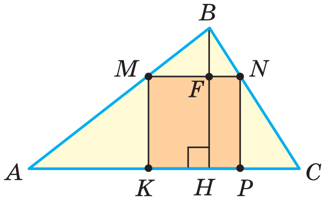


Рис. 287

317. Основания трапеции $ABCD$ равны $AD = a$ см и $BC = b$ см. Отрезок KM проходит через точку O пересечения диагоналей трапеции параллельно основаниям, его концы лежат на боковых сторонах трапеции. Докажите, что $KM = \frac{2ab}{a+b}$.

При помощи **Интернета** выясните, как Фалес Милетский определил высоту египетской пирамиды, поразив своими знаниями фараона Амасиса.

Объясните решение Фалеса по нахождению высоты пирамиды. Подумайте, как Фалес нашел длину той части тени, которая находится в основании пирамиды и недоступна для непосредственного измерения.

ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Определение подобных треугольников.
2. Теорему о пропорциональных отрезках (обобщенную теорему Фалеса).
3. Теорему о прямой, параллельной стороне треугольника.
4. Три признака подобия треугольников.
5. Признак подобия прямоугольных треугольников.

Умеем

1. Определять соответствующие стороны подобных треугольников и записывать отношения их длин в виде пропорций.
2. Определять, по какому признаку подобны треугольники.
3. Доказывать три признака подобия треугольников.

§ 22. Свойство биссектрисы треугольника

Теорема. **Биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.**

Дано: $\triangle ABC$, CK — биссектриса.

Доказать: $\frac{BK}{KA} = \frac{BC}{AC}$.

Доказательство. Из точки A проведем луч, параллельный биссектрисе CK до пересечения его в точке D с продолжением стороны BC (рис. 288). $\angle BCK = \angle BDA$ как соответственные при параллельных прямых CK и DA и