317. Основания трапеции $ABCD$ равны $AD = a$ см и $BC = b$ см. Отрезок KM проходит через точку O пересечения диагоналей трапеции параллельно основаниям, его концы лежат на боковых сторонах трапеции. Докажите, что $KM = \frac{2ab}{a+b}$.

При помощи **Интернета** выясните, как Фалес Милетский определил высоту египетской пирамиды, поразив своими знаниями фараона Амасиса.

Объясните решение Фалеса по нахождению высоты пирамиды. Подумайте, как Фалес нашел длину той части тени, которая находится в основании пирамиды и недоступна для непосредственного измерения.

ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Определение подобных треугольников.
2. Теорему о пропорциональных отрезках (обобщенную теорему Фалеса).
3. Теорему о прямой, параллельной стороне треугольника.
4. Три признака подобия треугольников.
5. Признак подобия прямоугольных треугольников.

Умеем

1. Определять соответствующие стороны подобных треугольников и записывать отношения их длин в виде пропорций.
2. Определять, по какому признаку подобны треугольники.
3. Доказывать три признака подобия треугольников.

§ 22. Свойство биссектрисы треугольника

Теорема. **Биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.**

Дано: $\triangle ABC$, CK — биссектриса.

Доказать: $\frac{BK}{KA} = \frac{BC}{AC}$.

Доказательство. Из точки A проведем луч, параллельный биссектрисе CK до пересечения его в точке D с продолжением стороны BC (рис. 288). $\angle BCK = \angle BDA$ как соответственные при параллельных прямых CK и DA и

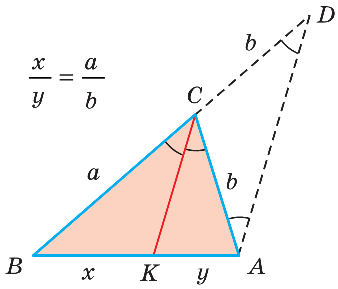


Рис. 288

секущей BD; $\angle KCA = \angle DAC$ как накрест лежащие при параллельных прямых CK и DA и секущей AC. В силу того, что $\angle BCK = \angle KCA$ (CK — биссектриса), получим, что $\angle CDA = \angle CAD$. Тогда треугольник ACD — равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника), $CD = CA$. По обобщенной теореме Фалеса $\frac{BK}{KA} = \frac{BC}{CD}$, откуда $\frac{BK}{KA} = \frac{BC}{AC}$.

Теорема доказана.

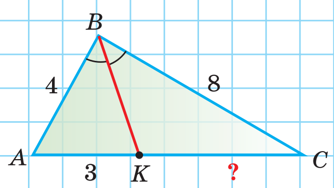
А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

Тест 1

Если $\angle ABK = \angle CBK$, то $KC = \ldots$

а) 6; в) 4;

б) 5; г) 7.



Тест 2

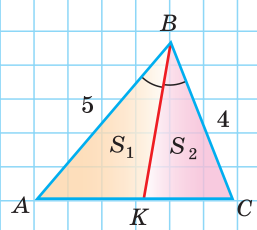
Если BK — биссектриса угла ABC, то $S_1 : S_2 = \ldots$

а) $\frac{25}{16}$;

б) $\frac{5}{4}$;

в) $\frac{4}{5}$;

г) $\frac{2}{1}$.



Задания к § 22

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

ключевые задачи

Задача 1. *Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 8. Найти отрезки, на которые биссектриса прямого угла треугольника делит гипотенузу.*

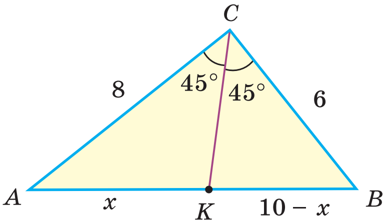


Рис. 289

Решение. Пусть в $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, $BC = 6$, $AC = 8$, CK — биссектриса (рис. 289). По теореме Пифагора $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$. Обозначим $AK = x$, $KB = 10 - x$. По свойству биссектрисы треугольника $\frac{AK}{KB} = \frac{AC}{BC}$, то есть $\frac{x}{10-x} = \frac{8}{6}$, или $\frac{x}{10-x} = \frac{4}{3}$. Тогда $3x = 4(10 - x)$, $7x = 40$, $x = \frac{40}{7}$. Отсюда $10 - x = 10 - \frac{40}{7} = \frac{30}{7}$.

Получили: $AK = 5\frac{5}{7}$, $KB = 4\frac{2}{7}$.

Ответ: $5\frac{5}{7}$; $4\frac{2}{7}$.

Задача 2. *Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает диагональ BD в точке K, а сторону BC — в точке M. Известно, что $MC = 4$, $BK : KD = 1 : 2$. Найти периметр параллелограмма* (рис. 290).

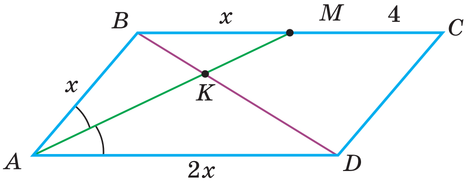


Рис. 290

Решение. Рассмотрим треугольник ABD, AK — его биссектриса. А биссектриса делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам, то есть $\frac{AB}{AD} = \frac{BK}{KD} = \frac{1}{2}$. Пусть $AB = x$, тогда $AD = 2x$. Так как $\angle BAM = \angle DAM$ (AM — биссектриса), а $\angle DAM = \angle AMB$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых AD и BC и секущей AM, то $\angle BAM = \angle BMA$. Тогда треугольник AMB — равнобедренный, $AB = BM = x$, $BC = x + 4$. С другой стороны, $BC = AD = 2x$. Тогда $2x = x + 4$, $x = 4$, $AB = 4$, $AD = 8$, $P_{ABCD} = 2(AB + AD) = 2(4 + 8) = 24$.
Ответ: 24.

Замечание. Для решения задачи можно было воспользоваться подобием треугольников BKM и DKA.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

318. На рисунках 291, *а)*—*в)* в каждом треугольнике проведена биссектриса. Найдите длину отрезка x (все размеры даны в сантиметрах).

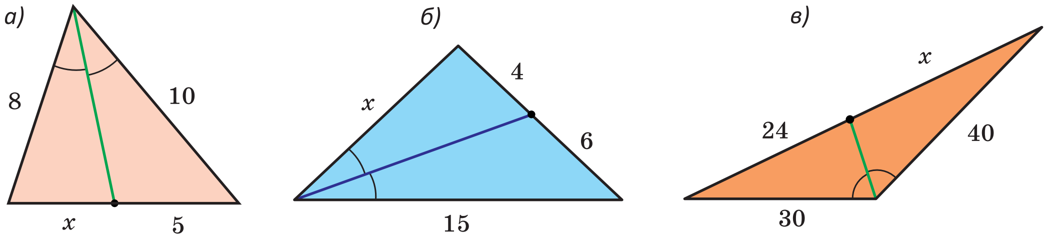


Рис. 291

319. В треугольнике ABC $AC = 8$ см. На стороне BC взята точка F так, что $\angle BAF = \angle CAF$, $BF = 3$ см, $FC = 4$ см. Найдите периметр $\triangle ABC$.

320. В равнобедренном треугольнике ABC, где $AC = BC = 16$ см, проведена биссектриса BK, $AK : KC = 1 : 4$. Найдите основание AB.

321. Стороны треугольника равны 6 см, 7 см и 8 см. Найдите длины отрезков, на которые биссектриса среднего по величине угла треугольника делит противолежащую сторону.

322. Найдите длину биссектрисы AK прямоугольного треугольника ABC, если катет $AC = 6$ см, гипотенуза $AB = 10$ см.

323. В треугольнике ABC $AC = 48$ см, $BC = 36$ см. На стороне AB отмечена точка D такая, что $AD : DB = 4 : 3$, $\angle BDC + \angle ACD = 104°$. Найдите угол ABC.

324. Дан прямоугольник $ABCD$, у которого $AB = 15$ см, $AD = 30$ см. Точка M лежит на диагонали BD и равноудалена от сторон BC и CD. Найдите площадь треугольника CMD.

325. Биссектриса внешнего угла треугольника ABC при вершине B пересекает прямую AC в точке K. Докажите, что $AK : CK = AB : BC$.

§ 23. Свойство площадей подобных треугольников

Часто школьникам задают «провокационный» вопрос: «Если стороны квадрата увеличить в 2 раза, то во сколько раз увеличится площадь квадрата?» При этом часто получают ответ: «В 2 раза!», который является неправильным.

Убедимся в этом. На рисунке 292 сторона малого квадрата равна 2 см, а площадь — 4 см^2. Увеличив все стороны квадрата в 2 раза, получим большой квадрат со стороной 4 см и площадью 16 см^2. Как видим, площадь квадрата увеличилась в 4 раза!

Легко понять, что если стороны квадрата увеличить в 3 раза, то его площадь увеличится в 3^2 раз, то есть в 9 раз.

Аналогичное утверждение справедливо и для треугольников. Сформулируем его в виде следующей теоремы.

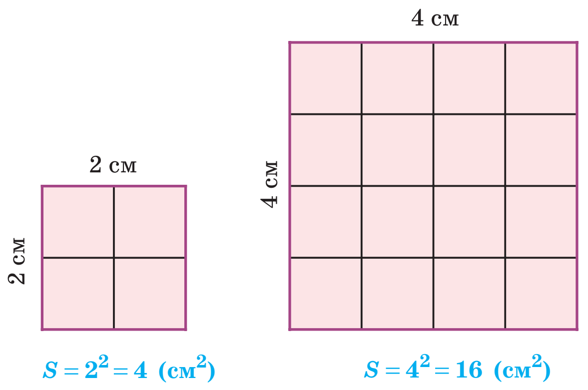


Рис. 292

Теорема (о площадях подобных треугольников).
Площади подобных треугольников относятся как квадраты соответствующих сторон.