323. В треугольнике ABC $AC = 48$ см, $BC = 36$ см. На стороне AB отмечена точка D такая, что $AD : DB = 4 : 3$, $\angle BDC + \angle ACD = 104°$. Найдите угол ABC.

324. Дан прямоугольник $ABCD$, у которого $AB = 15$ см, $AD = 30$ см. Точка M лежит на диагонали BD и равноудалена от сторон BC и CD. Найдите площадь треугольника CMD.

325. Биссектриса внешнего угла треугольника ABC при вершине B пересекает прямую AC в точке K. Докажите, что $AK : CK = AB : BC$.

§ 23. Свойство площадей подобных треугольников

Часто школьникам задают «провокационный» вопрос: «Если стороны квадрата увеличить в 2 раза, то во сколько раз увеличится площадь квадрата?» При этом часто получают ответ: «В 2 раза!», который является неправильным.

Убедимся в этом. На рисунке 292 сторона малого квадрата равна 2 см, а площадь — 4 см^2. Увеличив все стороны квадрата в 2 раза, получим большой квадрат со стороной 4 см и площадью 16 см^2. Как видим, площадь квадрата увеличилась в 4 раза!

Легко понять, что если стороны квадрата увеличить в 3 раза, то его площадь увеличится в 3^2 раз, то есть в 9 раз.

Аналогичное утверждение справедливо и для треугольников. Сформулируем его в виде следующей теоремы.

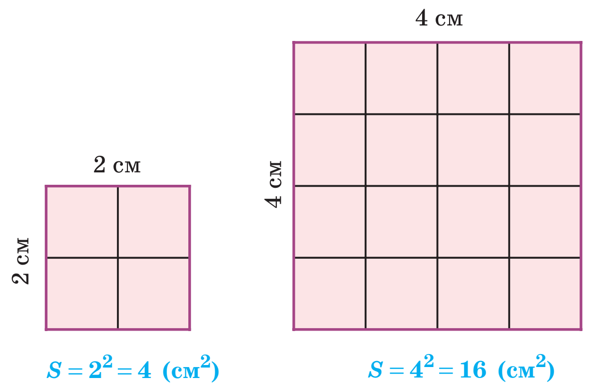


Рис. 292

Теорема (о площадях подобных треугольников). **Площади подобных треугольников относятся как квадраты соответствующих сторон.**

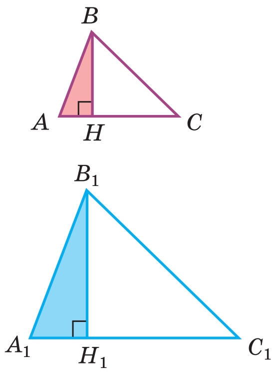


Рис. 293

Дано: $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ (рис. 293).

Доказать: $\dfrac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \dfrac{A_1C_1^2}{AC^2}$.

Доказательство. Пусть k — коэффициент подобия треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC, где $\angle A$ — острый. Тогда $A_1B_1 = k \cdot AB$, $A_1C_1 = k \cdot AC$. Проведем высоты BH и B_1H_1 данных треугольников. Так как $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$, то $\angle A_1 = \angle A$. Прямоугольные треугольники $A_1B_1H_1$ и ABH подобны по острому углу. Отсюда $\dfrac{B_1H_1}{BH} = \dfrac{A_1B_1}{AB} = k$, $B_1H_1 = k \cdot BH$.

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}A_1C_1 \cdot B_1H_1}{\frac{1}{2}AC \cdot BH} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (k \cdot AC) \cdot (k \cdot BH)}{\frac{1}{2}AC \cdot BH} = k^2 = \left(\frac{A_1C_1}{AC}\right)^2 = \frac{A_1C_1^2}{AC^2}.$$

Теорема доказана.

Существует и другая формулировка этой теоремы.

Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Задания к § 23

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
ключевые задачи

Задача 1. *Доказать, что средняя линия треугольника отсекает от него треугольник, площадь которого составляет* $\frac{1}{4}$ *площади данного.*

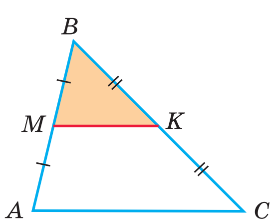


Рис. 294

Доказательство. Пусть MK — средняя линия треугольника ABC (рис. 294). Средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине, то есть $MK \parallel AC$ и $MK = \frac{1}{2}AC$. Прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному. Тогда $\triangle MBK \sim \triangle ABC$. Так как площади подобных треугольников относятся как квадраты соответствующих сторон, то $\dfrac{S_{MBK}}{S_{ABC}} = \dfrac{MK^2}{AC^2} = \left(\dfrac{MK}{AC}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$, то есть $S_{MBK} = \frac{1}{4}S_{ABC}$. Что и требовалось доказать.

Задача 2. *Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC* (рис. 295). *Диагонали трапеции пересекаются в точке O, $S_{BOC} = 4$ см^2, $S_{AOB} = 12$ см^2. Найти площадь трапеции.*

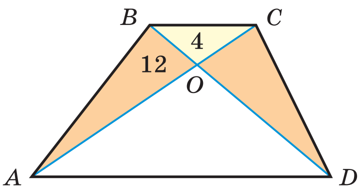


Рис. 295

Р е ш е н и е. *Способ* 1. Диагонали трапеции делят ее на 4 треугольника. Ранее нами доказано, что треугольники, прилежащие к боковым сторонам, равновелики, а прилежащие к основаниям — подобны. То есть $S_{AOB} = S_{DOC}$, $\triangle BOC \backsim \triangle DOA$. Отсюда $S_{DOC} = 12$ см^2.

Далее заметим, что треугольники BOC и AOB имеют общую высоту, опущенную из вершины B. Поэтому их площади относятся как соответствующие этой высоте основания: $\frac{S_{BOC}}{S_{AOB}} = \frac{CO}{AO}$. То есть $\frac{CO}{AO} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Стороны CO и AO являются соответствующими сторонами подобных треугольников BOC и DOA (они лежат против равных углов OBC и ODA). По теореме о площадях подобных треугольников $\frac{S_{BOC}}{S_{DOA}} = \frac{CO^2}{AO^2} = \left(\frac{CO}{AO}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$. Отсюда $S_{DOA} = 9S_{BOC} = 9 \cdot 4 = 36$ (см^2). Искомая площадь трапеции: $S_{ABCD} = 12 + 12 + 4 + 36 = 64$ (см^2).

Способ 2. Треугольники COD и AOD имеют общую высоту, проведенную из вершины D. Тогда их площади относятся как основания CO и AO, то есть $1 : 3$. Значит, $S_{AOD} = 3S_{COD} = 3 \cdot 12 = 36$ (см^2), $S_{ABCD} = 64$ см^2.

О т в е т: 64 см^2.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

326. Как изменится площадь треугольника, если все его стороны:

а) увеличить в 2 раза; в) увеличить в 2,5 раза;
б) увеличить в 3 раза; г) уменьшить в 10 раз?

327. Для $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ выполняется $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = 1{,}5$, $S_{ABC} = 90$ см^2. Найдите $S_{A_1B_1C_1}$.

328. а) Периметры двух подобных треугольников относятся как $2 : 3$. Найдите отношение площадей данных треугольников.

б) Площади двух подобных треугольников относятся как $64 : 25$. Найдите отношение периметров этих треугольников.

329. Найдите отношение площади $\triangle KMN$ к площади $\triangle EPG$ (рис. 296), если $\angle K = \angle E$.

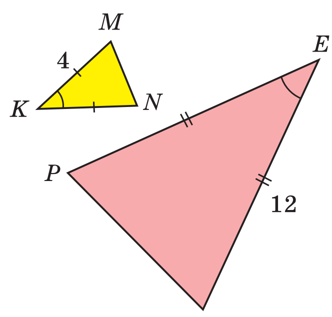


Рис. 296

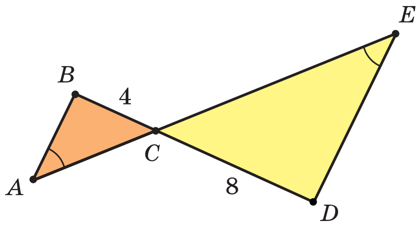


Рис. 297

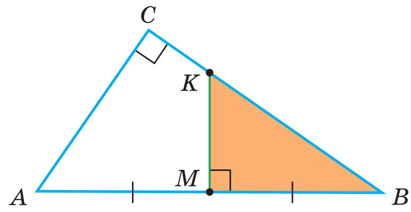


Рис. 298

330. На рисунке 297 $\angle A = \angle E$, $BC = 4$ см, $CD = 8$ см, $S_{ABC} = 10$ см^2. Найдите S_{EDC}.

331. На рисунке 298 $\angle C = 90°$, $AC = 6$ м, $BC = 8$ м, $AM = MB$, $KM \perp AB$. Найдите площадь треугольника KMB.

332. На рисунке 299 $MN \parallel AC$, $NK \parallel AB$, $MB : AM = 1 : 2$, $S_{ABC} = 360$ см^2. Найдите S_{AMNK}.

333. Площадь трапеции $AMKC$ (рис. 300) равна 80 м^2, $AM : MB = 4 : 3$. Найдите площадь треугольника MBK.

334. На рисунке 301 $AMKE$ — параллелограмм, $S_{MBK} = S_1 = 16$ см^2, $S_{EKC} = S_2 = 9$ см^2.

а) Найдите площадь параллелограмма $AMKE$.

б) Выразите площадь параллелограмма S_{AMKE} через S_1 и S_2.

в) Выразите площадь треугольника ABC через S_1 и S_2.

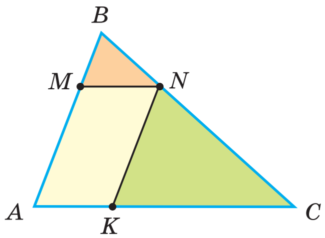


Рис. 299

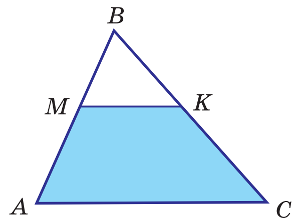


Рис. 300

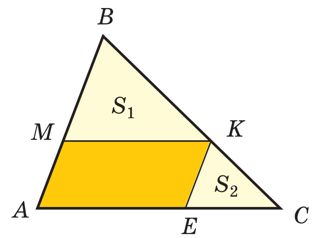


Рис. 301

335. а) В трапеции $ABCD$ (рис. 302) $BC = \frac{1}{3}AD$, $S_1 + S_2 = 60$ см^2. Найдите площадь S трапеции $ABCD$.

б) Выведите формулу зависимости площади S трапеции $ABCD$ от площадей S_1 и S_2 (см. рис. 302).

336. На рисунке 303 треугольник ABC — равносторонний, $MB = 2AM$, $NC = 2BN$, $AK = 2KC$. Если площадь треугольника ABC равна 72 см^2, то чему равна площадь треугольника MNK?

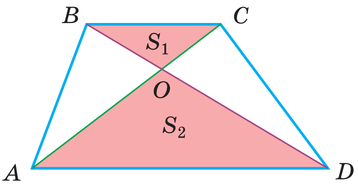


Рис. 302

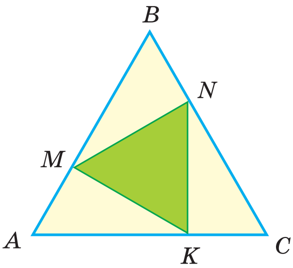


Рис. 303

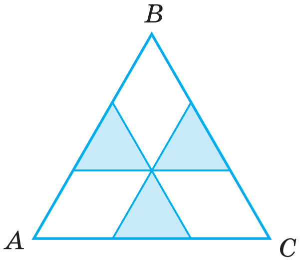


Рис. 304

337. Через центр равностороннего треугольника (точку пересечения медиан) провели прямые, параллельные его сторонам (рис. 304). Какую часть площади треугольника ABC занимает часть, занятая голубыми треугольниками?

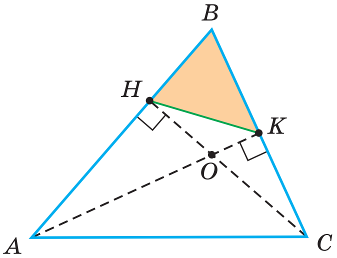


Рис. 305

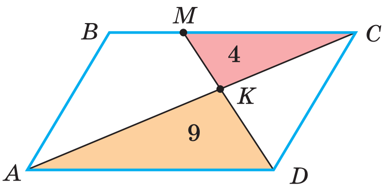


Рис. 306

338. AK и CH — высоты треугольника ABC (рис. 305), $BK : AB = 2 : 5$, $S_{ABC} = 50$ см^2. Найдите площадь треугольника HBK.

339. В параллелограмме $ABCD$ проведен отрезок DM (рис. 306), который пересекает диагональ AC в точке K. Известно, что $S_{MCK} = 4$ см^2, $S_{DKA} = 9$ см^2. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

340. В прямоугольном треугольнике ABC к гипотенузе проведена высота BH. Известно, что $S_{ABH} = 4$ см^2, $S_{CBH} = 16$ см^2. Найдите гипотенузу AC.

341. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = 4$ см и $AD = 8$ см и высотой, равной 3 см. Боковые стороны трапеции продлили до пересечения в точке K. Найдите площадь треугольника BKC.

342. Основания трапеции равны a и b. Найдите длину отрезка с концами на боковых сторонах трапеции, параллельного основаниям, который делит трапецию на две равновеликие части.

343. Разделите при помощи циркуля и линейки данный треугольник на две равновеликие части прямой, параллельной его стороне.

ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Свойство биссектрисы треугольника.
2. Теорему об отношении площадей подобных треугольников.
3. Во сколько раз увеличится площадь треугольника, если его стороны увеличить в 2 раза, в 3 раза, в k раз.

Умеем

1. Находить площадь одного из двух подобных треугольников, если известна площадь другого и отношение соответствующих сторон.
2. Доказывать теорему о свойстве биссектрисы треугольника.
3. Доказывать теорему об отношении площадей подобных треугольников.

Геометрия 3D

Как уже говорилось, любые два круга являются подобными (рис. 307, *а*). Подобными также являются любые два квадрата (рис. 307, *б*). Коэффициент подобия в первом случае может быть определен как отношение радиусов кругов, а во втором — как отношение сторон квадратов, то есть $k = \dfrac{R_1}{R_2}$ или $k = \dfrac{a_1}{a_2}$.

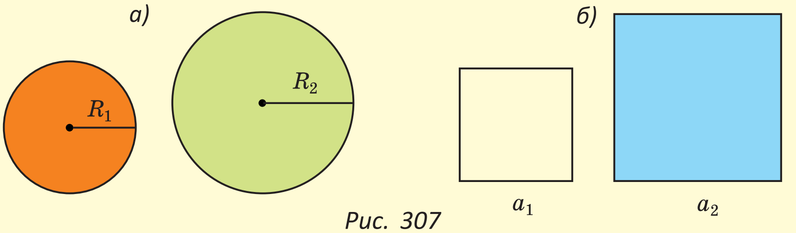


Рис. 307

Два многоугольника называются подобными, если у них углы соответственно равны, а соответствующие стороны пропорциональны (рис. 308, *а*).

Фигуры F и F_1 называются *подобными*, если между их точками можно установить такое соответствие, что для любых пар точек M и N и соответствующих им точек M_1 и N_1 (рис. 308, *б*) выполняется условие $\dfrac{MN}{M_1N_1} = k$. Число k — коэффициент подобия. Можно доказать, что отношение периметров подобных фигур равно k, а отношение их площадей — k^2.

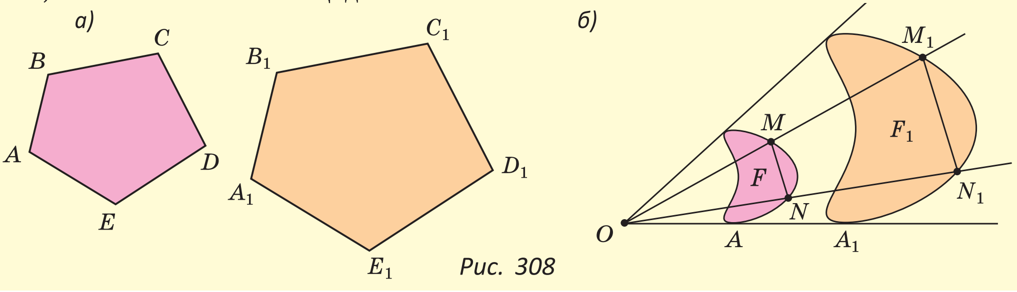


Рис. 308

Подобие также определяется и для пространственных фигур. Так, подобными являются любые два шара или любые два куба (рис. 309).

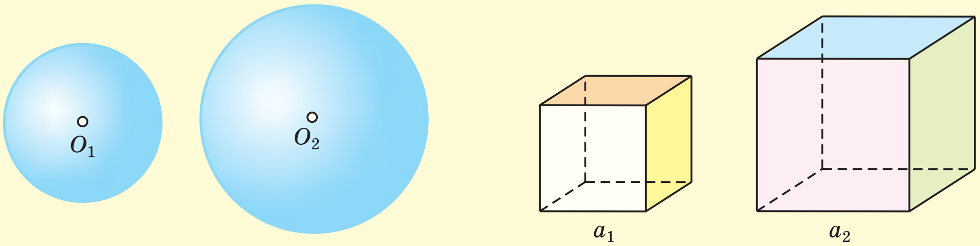


Рис. 309

Увеличив длину всех ребер любого многогранника в одно и то же число раз и сохранив величины всех углов, получим многогранник, подобный данному (рис. 310).

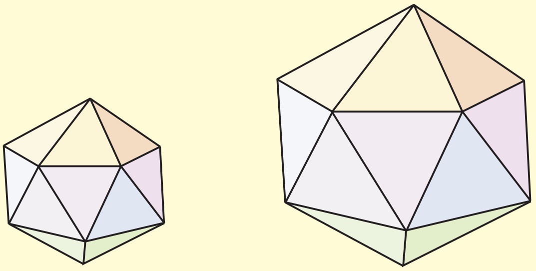


Рис. 310

Мы знаем, что прямая, параллельная основанию треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному. Аналогично в пространстве плоскость, параллельная основанию пирамиды, отсекает от нее пирамиду, подобную данной (рис. 311, *а*, *б*). То есть отсеченная пирамида будет иметь такую же форму, но отличаться размерами. Если отбросить отсеченную пирамиду, то получится усеченная пирамида (рис. 311, *в*).

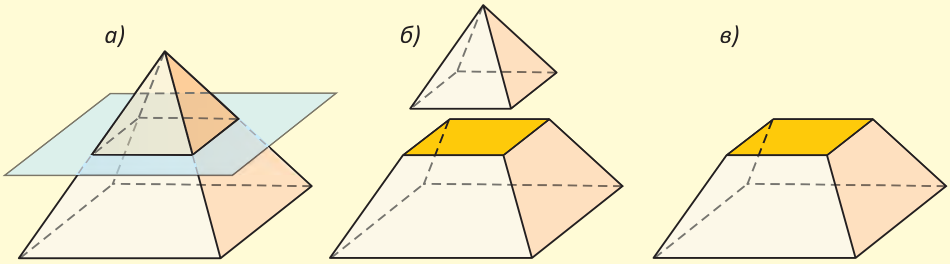


Рис. 311

Усеченная пирамида имеет два основания: верхнее и нижнее, которые являются подобными многоугольниками. Ее боковые грани являются трапециями.

В основании *правильной четырехугольной пирамиды* лежит квадрат, и все ее боковые ребра равны. Если от нее отсечь плоскостью, параллельной основанию, пирамиду, то получится *правильная усеченная пирамида*. Основания ее — квадраты, а боковые грани — равные равнобедренные трапеции.

Задача. *Найдите площадь полной поверхности правильной усеченной четырехугольной пирамиды (рис. 312), у которой стороны оснований равны 20 см и 10 см, а боковое ребро равно 13 см.*

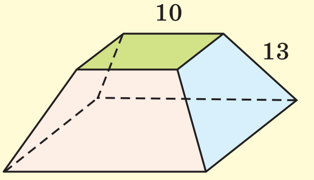


Рис. 312

Моделирование

На рисунке 313 изображен план участка под Не́свижским за́мком в масштабе 1 : 1500. При помощи линейки определите размеры внутреннего двора (отмечен коричневым цветом) и найдите его площадь, используя формулы площади прямоугольника и трапеции. Найдите периметр и площадь реального участка при помощи свойств подобных многоугольников.

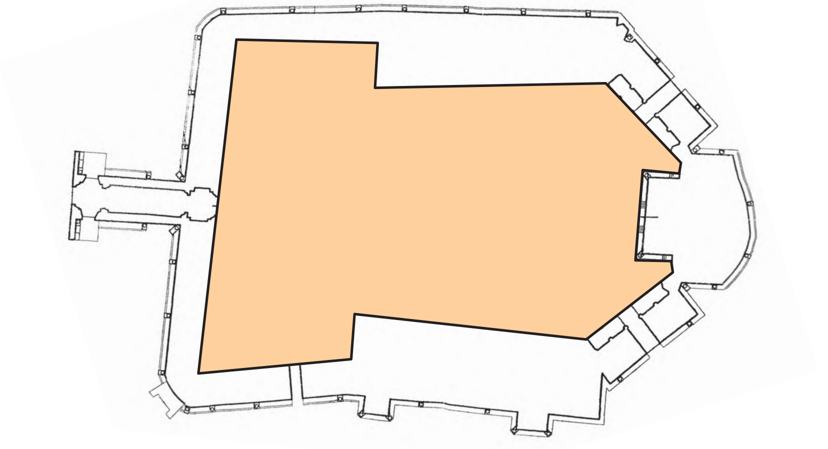


Рис. 313

Интересно знать. Несвижский замок — дворцово-парковый комплекс, находящийся в северо-восточной части г. Несвижа (Минская область). В XVI—XIX вв. — центр резиденции ее владельцев из рода Радзивиллов.

Архитектурный ансамбль Несвижского замка в настоящее время представляет собой историко-культурный музей-заповедник.

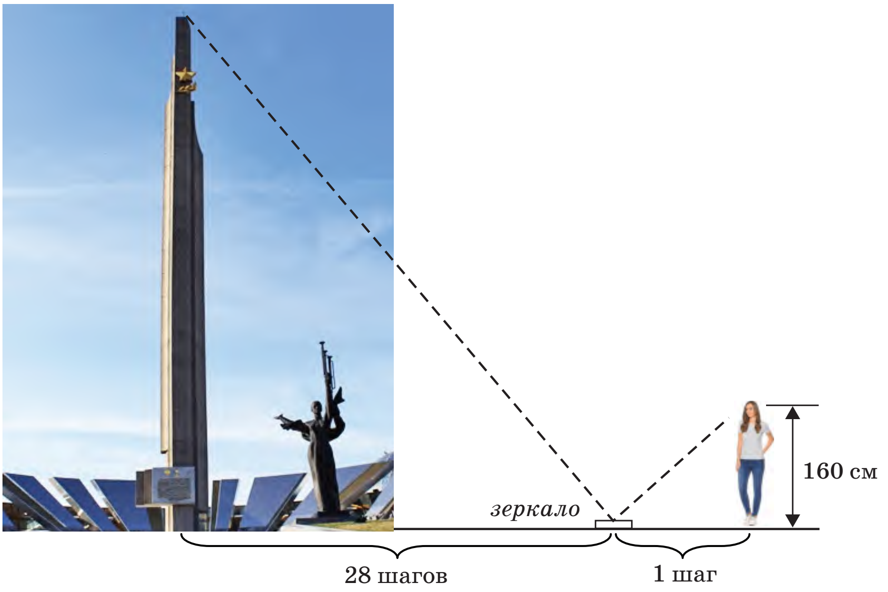
15 июля 2005 г. на сессии Межправительственного комитета по охране всемирного культурного и природного наследия «Несвижский дворцово-парковый комплекс» был включен в список объектов всемирного наследия ЮНЕСКО. Несвижский замок изображен на 100-рублевой купюре.

Реальная геометрия

Задача для девочек. Глядя на рисунок, составьте план, как при помощи зеркала, зная собственный рост, можно определить примерную высоту стелы «Минск — город-герой» — главного символа столицы Беларуси.

Найдите высоту стелы, используя данные на рисунке. При решении задачи учтите закон отражения света: «Угол отражения равен углу падения».

Выясните, в честь какой даты установлена стела «Минск — город-герой».



Задача для мальчиков. В туристических походах учат определять расстояние до объекта при помощи вытянутой руки и линейки. Определите расстояние от туриста до автобуса, если длина части линейки, перекрывающей автобус, равна 5 см, длина руки от плеча до линейки — 50 см и известно, что длина данного автобуса равна 9,17 м.