§ 24. Решение задач по теме «Подобие треугольников»

Задача 1. *В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и CN, которые пересекаются в точке H* (рис. 314). *Доказать, что:*
а) $AH \cdot KH = CH \cdot NH$; *б)* $\triangle KBN \sim \triangle ABC$; *в)* $\angle NKB = \angle CAB$.

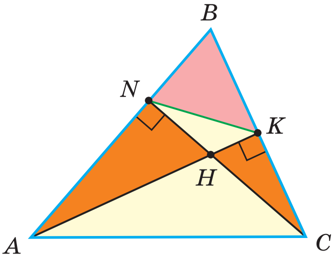


Рис. 314

Доказательство. а) $\triangle AHN \sim \triangle CHK$ по острому углу ($\angle AHN = \angle CHK$ как вертикальные). Отсюда $\frac{NH}{AH} = \frac{KH}{CH}$, $AH \cdot KH = CH \cdot NH$.

б) $\triangle ABK \sim \triangle CBN$ по острому углу ($\angle B$ — общий). Поэтому $\frac{BK}{AB} = \frac{BN}{BC}$. Тогда $\triangle KBN \sim \triangle ABC$ по двум сторонам и углу между ними.

в) Так как $\frac{BK}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{KN}{AC}$, то $\angle NKB = \angle CAB$.

Следствие.

Треугольник NKM (рис. 315) *с вершинами в основаниях высот данного остроугольного треугольника ABC имеет углы, равные* $180° - 2\angle A$, $180° - 2\angle B$, $180° - 2\angle C$. *Его биссектрисы лежат на высотах треугольника ABC.*

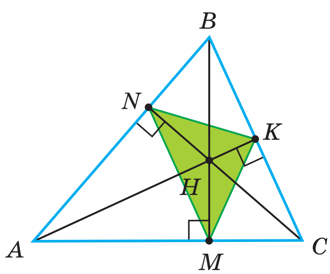


Рис. 315

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

344. На рисунке 316 $KH = 2$, $HC = 10$, $AH = 5$. Найдите HM.

345. На рисунке 317 $CH = 12$, $BH \cdot HK = 108$. Найдите CN.

346. На рисунке 318 $BP = 4$, $BC = 10$, $PF = 6$. Найдите AC.

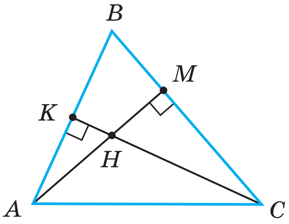


Рис. 316

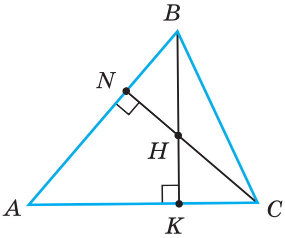


Рис. 317

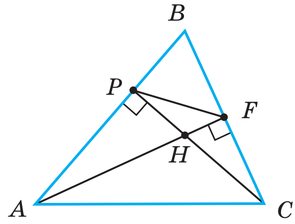


Рис. 318

Задача 2. *а) Доказать, что точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции и середины оснований лежат на одной прямой.*
б) Доказать, что точка пересечения диагоналей трапеции и середины оснований лежат на одной прямой.

Доказательство.
а) Пусть K — середина основания AD трапеции $ABCD$, P — точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции и прямая PK пересекает отрезок BC в точке M. Докажем, что M — середина BC (рис. 319, *а*).

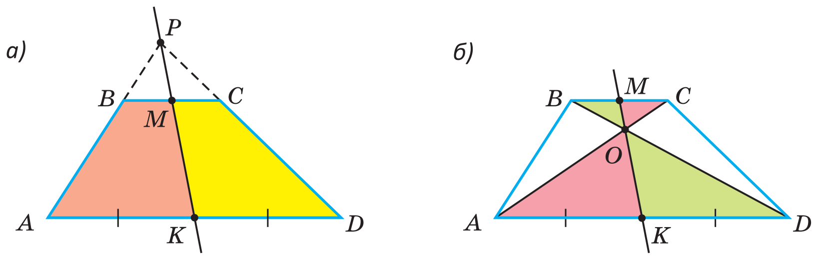


Рис. 319

Так как $\triangle BPM \sim \triangle APK$ ($BC \parallel AD$), то $\frac{BM}{AK} = \frac{PM}{PK}$. Аналогично, так как $\triangle CPM \sim \triangle DPK$, то $\frac{CM}{DK} = \frac{PM}{PK}$. Отсюда $\frac{BM}{AK} = \frac{CM}{DK}$ или $\frac{BM}{CM} = \frac{AK}{DK}$. Но $\frac{AK}{DK} = 1$, откуда $\frac{BM}{CM} = 1$, $BM = MC$, точка M — середина BC.

б) Пусть K — середина основания AD трапеции $ABCD$, O — точка пересечения диагоналей, и прямая KO пересекает отрезок BC в точке M. Докажем, что M — середина BC (рис. 319, *б*).

Так как $\triangle BOM \sim \triangle DOK$ (по двум углам), то $\frac{BM}{DK} = \frac{MO}{KO}$. Аналогично, так как $\triangle COM \sim \triangle AOK$, то $\frac{CM}{AK} = \frac{MO}{KO}$. Отсюда $\frac{BM}{DK} = \frac{CM}{AK}$ или $\frac{BM}{CM} = \frac{DK}{AK}$. Но $\frac{DK}{AK} = 1$, откуда $\frac{BM}{CM} = 1$, $BM = MC$, точка M — середина BC.

Следствия.

1. *Точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции, точка пересечения диагоналей и середины оснований трапеции лежат на одной прямой.*

2. *В треугольнике медиана делит пополам любой отрезок с концами на сторонах треугольника, паралельный стороне, к которой проведена медиана.*

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

347. В трапеции $ABCD$ основания $AD = 20$, $BC = 12$, $\angle A = 65°$, $\angle D = 25°$. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований.

348. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны и равны 6 и 8. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований.

Метод подобия

Если при решении геометрической задачи, которая может быть решена разными способами, используют подобие треугольников, то говорят, что задача решена *методом подобия*.

Задача 3. *Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$), высоты BK и AM пересекаются в точке H* (рис. 320). *Найти высоту BK, если $AH = 5$, $HM = 3$.*

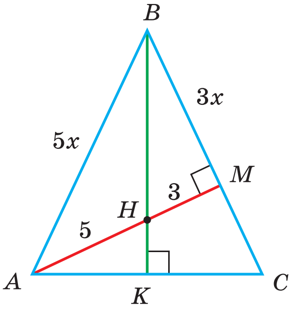


Рис. 320

Решение. Так как высота BK будет и биссектрисой, то BH — биссектриса треугольника ABM. По свойству биссектрисы треугольника получим: $\frac{AB}{BM} = \frac{AH}{HM} = \frac{5}{3}$. Пусть $AB = 5x$, $BM = 3x$.

По теореме Пифагора для треугольника AMB: $AB^2 = AM^2 + BM^2$, $(5x)^2 = (3x)^2 + 8^2$, $x^2 = 4$, $x = 2$. Тогда $AB = 5 \cdot 2 = 10$, $BM = 3 \cdot 2 = 6$, $BC = 10$.

По теореме Пифагора для треугольника HMB:

$$BH = \sqrt{BM^2 + HM^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

Треугольники BKC и BMH подобны по острому углу ($\angle KBC$ — общий). Из подобия следует, что $\frac{BK}{BC} = \frac{BM}{BH}$, то есть $\frac{BK}{10} = \frac{6}{3\sqrt{5}}$. Отсюда $BK = \frac{10 \cdot 6}{3\sqrt{5}} = \frac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}$.

Ответ: $4\sqrt{5}$.

Замечание. Найти BK можно и не используя подобие. *Способ* 2: $MC = 4$, $AC = \sqrt{AM^2 + MC^2} = 4\sqrt{5}$, $KC = 2\sqrt{5}$, $BK = \sqrt{BC^2 - KC^2} = 4\sqrt{5}$. *Способ* 3 (*метод площадей*): $MC = 4$, $AC = 4\sqrt{5}$, $2S_{ABC} = AC \cdot BK = BC \cdot AM$, $4\sqrt{5} \cdot BK = 10 \cdot 8$, $BK = 4\sqrt{5}$.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

349. Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC = 20$. Площадь треугольника равна 160. Высоты BK и AM пересекаются в точке H. Найдите площадь треугольника ABH.

350. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) высоты BE и AK пересекаются в точке M, $BM = 4$, $ME = 2$. Найдите площадь треугольника ABC.

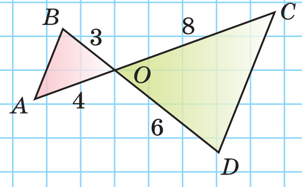
ЗАПОМИНАЕМ

1. У подобных треугольников соответствующие углы равны, а стороны пропорциональны.
2. Параллельные прямые отсекают на сторонах угла пропорциональные отрезки.
3. Прямая, параллельная стороне треугольника и пересекающая две другие его стороны, отсекает от него треугольник, подобный данному.
4. Признаки подобия треугольников:
   1) по двум углам;
   2) по двум сторонам и углу между ними;
   3) по трем сторонам.
5. Прямоугольные треугольники подобны по острому углу.
6. Биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.
7. Площади подобных треугольников относятся как квадраты соответствующих сторон.

ПРОВЕРЯЕМ СЕБЯ

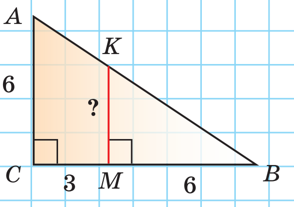
Тест 1

По данным на рисунке докажите, что $AB \parallel CD$.



Тест 2

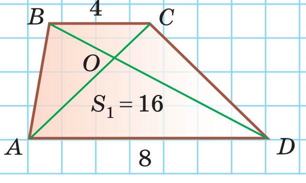
По данным на рисунке найдите длину отрезка KM.



Тест 3

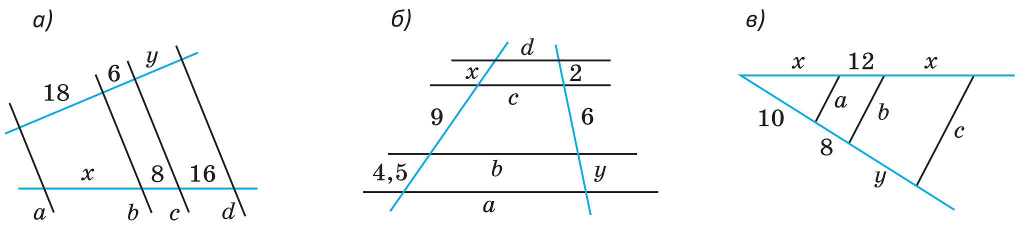
$S_{AOD} = 16$ см^2. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

а) 24 см^2; в) 32 см^2;
б) 28 см^2; г) 36 см^2.



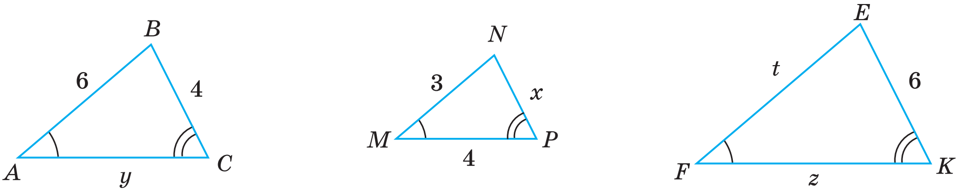
ПОДГОТОВКА К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ 3

1. Найдите значение $x + y$, если $a \parallel b \parallel c \parallel d$.

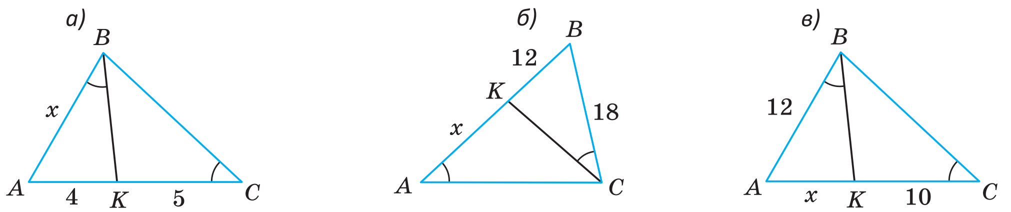


2. $\triangle ABC \sim \triangle MNP$, $\triangle MNP \sim \triangle FEK$. Найдите:

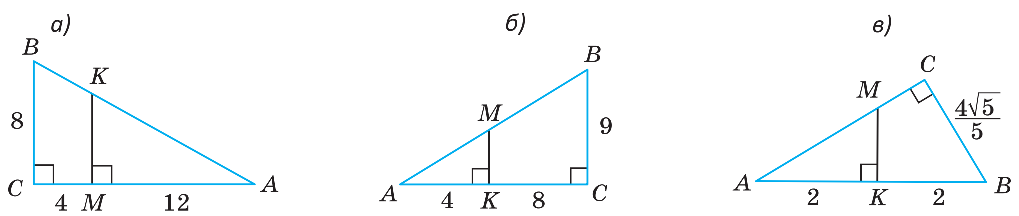
а) x и y; б) t и z; в) $P_{ABC} : P_{FEK}$.



3. Найдите длину отрезка x.



4. Найдите S_{AMK}.



5. Найдите отношение $BC : AD$, если:

а) $S_1 = 4$, $S_2 = 25$; б) $S_1 = 6$, $S_2 = 18$; в) $S_1 = 8$, $S_2 = 16$.