§ 25. Касательная к окружности

Окружность — это фигура, состоящая из всех точек плоскости, находящихся на одинаковом расстоянии от ее центра, которое равно радиусу окружности. Если расстояние от центра до точки больше радиуса окружности, то говорят, что точка находится *вне* окружности, а если меньше радиуса, то — *внутри* окружности. Все точки плоскости, находящиеся от центра окружности на расстоянии, меньшем или равном радиусу, образуют *круг*.

На рисунке 321 точки A, E, D принадлежат окружности с радиусом R и центром O, точка B находится внутри окружности (внутри круга), точка C — вне окружности (вне круга), $OA = OE = OD = R$, $OB < R$, $OC > R$.

Можно установить, что прямая и окружность могут иметь только три различных взаимных положения (рис. 322): прямая и окружность не имеют общих точек (прямая a), имеют одну общую точку (прямая b), имеют две общие точки (прямая c).

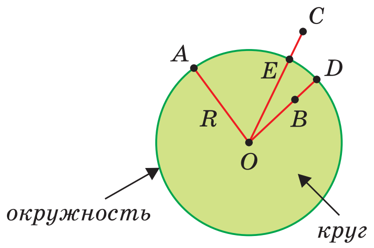


Рис. 321

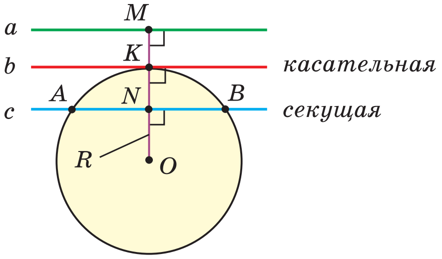


Рис. 322

В первом случае расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса ($OM > R$), во втором — равно радиусу ($OK = R$), в третьем — меньше радиуса ($ON < R$). Говорят, что прямая b касается окружности в точке K, а прямая c пересекает окружность в точках A и B.

Определение. Прямая, проходящая через две точки окружности, называется **секущей** к окружности.

Определение. Прямая, которая имеет с окружностью только одну общую точку, называется **касательной** к окружности.

Теорема (признак касательной).
Если прямая проходит через точку окружности и перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку, то она является касательной к окружности.

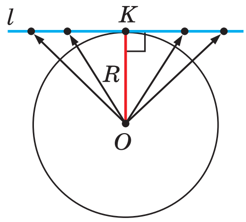


Рис. 323

Доказательство. Пусть OK — радиус окружности, прямая l проходит через точку K и перпендикулярна OK (рис. 323). Нужно доказать, что l — касательная.

Так как наклонная длиннее перпендикуляра, то расстояние от точки O до всех остальных точек прямой l больше радиуса OK. Поэтому все точки прямой, кроме точки K, лежат вне окружности. Следовательно, прямая l и окружность имеют единственную общую точку K, и прямая l по определению является касательной. Теорема доказана.

Доказанная теорема гарантирует, что касательная к окружности существует в каждой ее точке, и дает способ построения касательной.

Теорема (свойство касательной).
Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

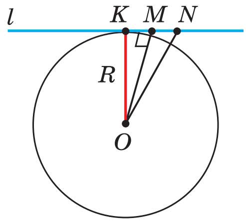


Рис. 324

Доказательство. Пусть l — касательная к окружности с центром в точке O, где K — точка касания, OK — радиус (рис. 324). Нужно доказать, что $OK \perp l$.

Пусть радиус OK не перпендикулярен l, а перпендикуляром является отрезок OM. На прямой l отложим $MN = KM$. Получим равные прямоугольные треугольники OMK и OMN (по двум катетам), откуда $ON = OK$. Так как отрезок ON равен радиусу, то точка N принадлежит окружности. Тогда прямая l и окружность имеют, по крайней мере, две общие точки, что противоречит определению касательной. Следовательно, $OK \perp l$.

Теорема доказана.

Заметим, что из точки вне окружности к одной окружности можно провести ровно две касательные, которые обладают следующим свойством.

Теорема (о касательных, проведенных из одной точки).
Отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности (соединяющих данную точку и точку касания), равны между собой.

Доказательство. Пусть AB и AC — касательные к окружности, где B и C — точки касания. Нужно доказать, что $AB = AC$ (рис. 325). Проведем

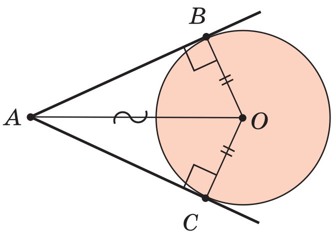


Рис. 325

отрезок AO и радиусы OB и OC. Так как радиус окружности, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной, то $OB \perp AB$, $OC \perp AC$. Прямоугольные треугольники ABO и ACO равны по катету ($OB = OC$ как радиусы) и гипотенузе (гипотенуза AO — общая). Из равенства треугольников следует, что $AB = AC$. Теорема доказана.

Говорят, что окружность касается луча (отрезка), если она касается прямой, содержащей этот луч (отрезок) в точке, принадлежащей лучу (отрезку).

Определение. Если окружность касается сторон угла, то она называется **вписанной в угол.**

Теорема (свойство окружности, вписанной в угол). **Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе угла.**

Докажите эту теорему самостоятельно, используя рисунок 325.

Из теоремы вытекает, что центры всех окружностей, вписанных в угол, лежат на биссектрисе угла (рис. 326).

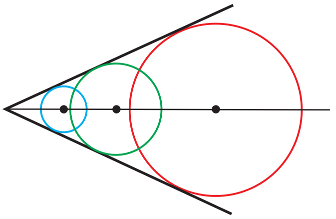


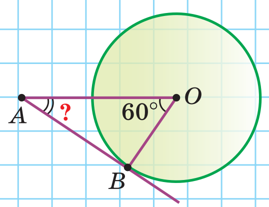
Рис. 326

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

Тест 1

Найдите угол A, если AB — касательная.

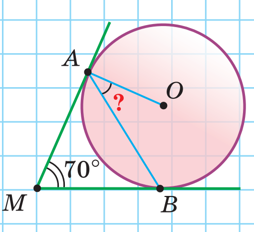
а) $60°$; б) $45°$; в) $30°$; г) $90°$.



Тест 2

A и B — точки касания. Найдите $\angle BAO$.

а) $30°$; б) $35°$; в) $45°$; г) $15°$.



Задания к § 25

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

ключевые задачи

Задача 1. *Из точки A к окружности с центром O проведены две касательные AB и AC, где B и C — точки касания, $OB = 6$ см, $AC = 8$ см. Найти длину отрезка AK* (рис. 327).

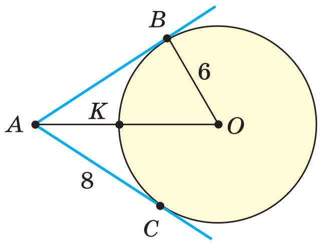


Рис. 327

Решение. Воспользуемся тем, что касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания, и тем, что отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны между собой. Тогда $AB = AC = 8$ см, $OB \perp AB$ и треугольник ABO — прямоугольный. По теореме Пифагора $AO = \sqrt{AB^2 + OB^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ (см). Так как $OK = OB = 6$ см как радиусы одной окружности, то $AK = AO - OK = 10 - 6 = 4$ (см).
Ответ: 4 см.

Задача 2. *В угол A вписана окружность, прямая MN — касательная* (рис. 328). *Найти периметр треугольника AMN, если $AB = 12$ см.*

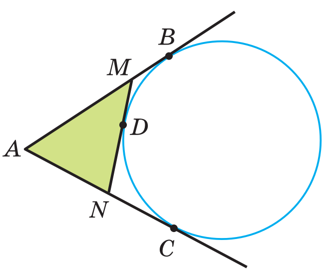


Рис. 328

Решение. Пусть B, C и D — точки касания. Так как отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны между собой, то $AC = AB = 12$ см, $MB = MD$ и $NC = ND$.
Тогда $AM + MD = AM + MB = AB = 12$ см,
$AN + ND = AN + NC = AC = 12$ см,
$P_{AMN} = (AM + MD) + (AN + ND) =$
$= AB + AC = 12 + 12 = 24$ (см).
Ответ: 24 см.

Замечание. Полезно запомнить: $P_{AMN} = 2AB$.

Задача 3. *Построить при помощи циркуля и линейки касательную к данной окружности, проходящую через точку, взятую вне окружности.*

Решение. Пусть дана окружность с заданным центром O и точка M вне окружности (рис. 329, *а*).

Построение.

1-*й шаг*. Проводим отрезок MO и на нем как на диаметре строим окружность (рис. 329, *б*). Для чего отрезок MO делим пополам, находим его середину O_1 и радиусом O_1M строим окружность.

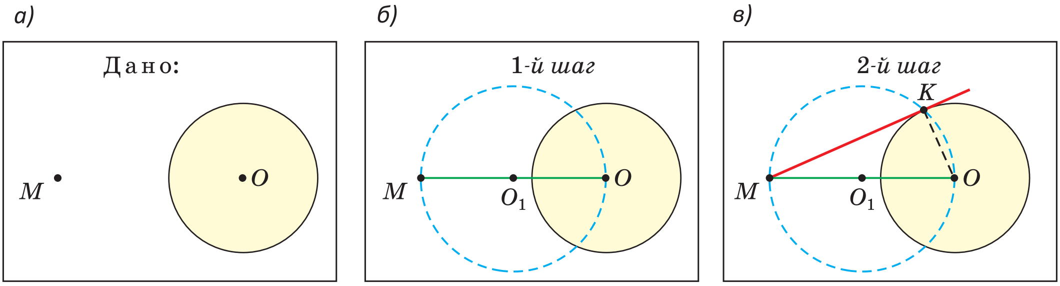


Рис. 329

2-й шаг. Отмечаем точку K пересечения построенной окружности и данной. Проводим прямую MK, которая и будет искомой касательной к данной окружности (рис. 329, *в*).

Доказательство. Угол MKO — прямой, так как его вершина лежит на окружности и он опирается на диаметр (доказано в 7-м классе). Поэтому $OK \perp MK$, и тогда по признаку касательной прямая MK является касательной к окружности.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

351. Изобразите окружность с центром в точке O и радиусом 3 см. Вне окружности отметьте точку A, где $OA = 5$ см. Проведите из точки A касательную к данной окружности. Обозначьте точку касания буквой B. Объясните, почему треугольник AOB — прямоугольный. Проведите другую касательную AC, где C — точка касания. Объясните, откуда следует, что $AB = AC$. Найдите при помощи теоремы Пифагора длину отрезка AB. Проверьте полученный результат измерением.

352. На каждом из рисунков 330, *а*)—*в*) из точки A проведена касательная к окружности с центром в точке O. Найдите величину угла, отмеченного знаком вопроса.

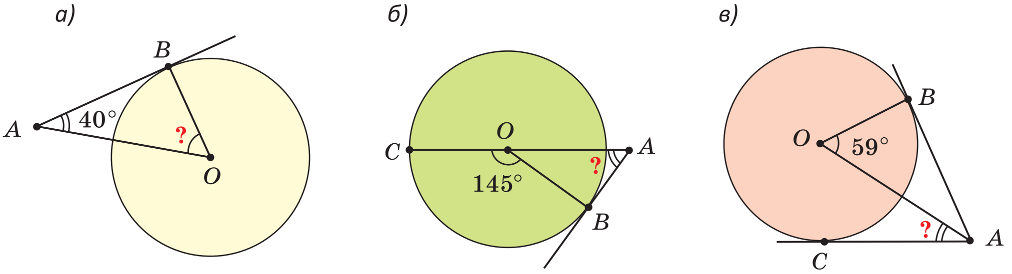


Рис. 330

353. На рисунках 331, *а*)—*в*) точка O — центр окружности, прямые MA и MB — касательные, A и B — точки касания. Найдите:

а) величину угла α (рис. 331, *а*);
б) сумму углов $\alpha + \beta$, если $MK = OA = 5$ см (рис. 331, *б*);
в) длину отрезка BM, если $OA = 6$ см, $KM = 4$ см (рис. 331, *в*).

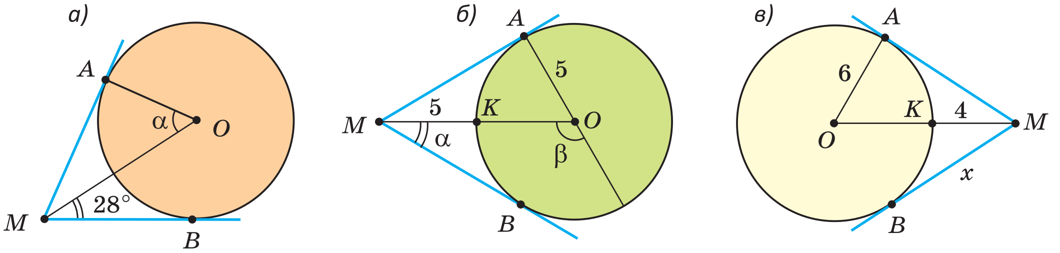


Рис. 331

354. На рисунках 332, *а*), *б*) AB — касательная к окружности, B — точка касания, O — центр окружности. Найдите:

а) $\angle BOC$, если $OC = 3\sqrt{3}$ см, $AB = 3$ см (рис. 332, *а*);
б) AC, если $AB = 12$ см, $OC = 9$ см (рис. 332, *б*).

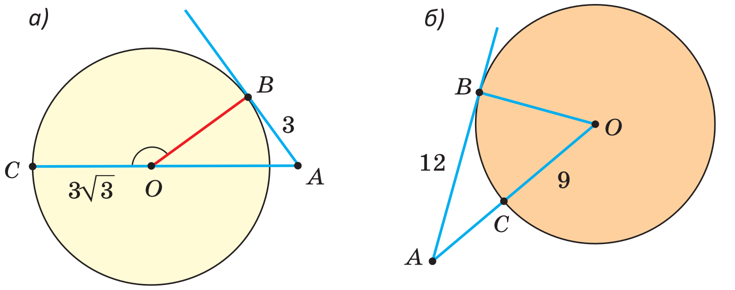


Рис. 332

355. К окружности проведены касательная AB (B — точка касания) и секущая AC, проходящая через центр O окружности, $\angle A = 60°$, $AB = 4\sqrt{3}$ см. Найдите диаметр окружности (рис. 333).

356. Окружность с центром в точке O касается сторон AB и AC треугольника ABC, $\angle B = 56°$, $\angle C = 74°$ (рис. 334). Найдите $\angle ALB$.

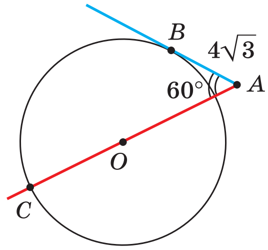


Рис. 333

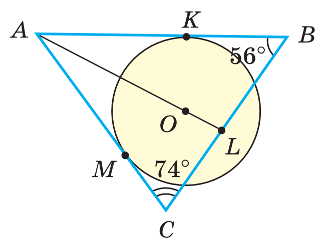


Рис. 334

357. Окружность с центром в точке O касается стороны AB треугольника AOB в точке K и пересекает сторону OB в точке C (рис. 335); $BC = 2$ см, $AK = 2$ см, $KB = 4$ см. Найдите:

а) OB; б) S_{AOB}.

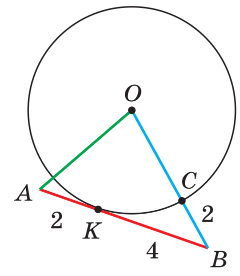


Рис. 335

358. Окружность с центром в точке O вписана в угол BAC, B и C — точки касания. Отрезки AO и BC пересекаются в точке K, $OK = 2$ см, $OB = 4$ см. Найдите длину отрезка AK.

359. Точка M лежит вне окружности с центром в точке O. Точка K принадлежит окружности. Докажите, что если $\angle KMO + \angle MOK = 90°$, то прямая MK — касательная к окружности.

360. Из точки A к окружности с центром в точке O проведены секущая и касательная AB (где B — точка касания). Расстояние от центра окружности до секущей равно 6 см, длина отрезка секущей внутри окружности равна 16 см, $AO = 26$ см. Найдите длину отрезка AB.

361. Дан треугольник со сторонами 12, 15 и 18. Окружность касается двух меньших сторон треугольника, а ее центр лежит на большей стороне. Найдите длины отрезков, на которые центр окружности делит бóльшую сторону.

362. На координатной плоскости задана окружность с центром в точке $P(3; 2)$ и радиусом, равным 2. Из точки $A(-2; 0)$ к окружности проведена касательная, отличная от оси абсцисс, которая касается окружности в точке B. Найдите площадь треугольника APB.

363. Постройте при помощи циркуля и линейки окружность заданного радиуса m, которая касается данной прямой l в отмеченной на ней точке K.

364. При помощи циркуля и линейки впишите в данный угол A окружность данного радиуса R.

365. Найдите геометрическое место центров окружностей, если все окружности проходят через две данные точки A и B.