Гимнастика ума

Диаметр окружности с центром в точке O равен 24 см (рис. 348). Окружность с центром в точке A касается первой окружности внутренним образом. Третья окружность с центром в точке B касается первой окружности внутренним, а второй — внешним образом. Найдите периметр треугольника ABO.

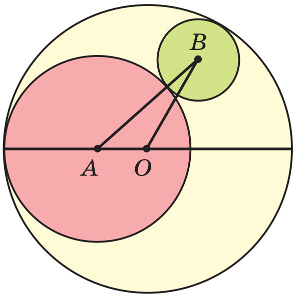


Рис. 348

ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Определение касательной к окружности и секущей.
2. Свойство касательной и признак касательной.
3. Свойство касательных, проведенных из одной точки к окружности.
4. Свойство окружности, вписанной в угол.
5. Все случаи взаимного расположения двух окружностей.

Умеем

1. Доказывать признак касательной.
2. Доказывать теорему о свойстве касательной.
3. Доказывать теорему о касательных, проведенных из одной точки к окружности.
4. Строить при помощи циркуля и линейки касательную к данной окружности.

§ 27. Центральный и вписанный углы

Определение. **Центральным углом** окружности называется угол, вершина которого находится в центре окружности.

Дуга окружности, заключенная внутри центрального угла, и этот центральный угол называются *соответствующими друг другу*.

Определение. **Градусной мерой** дуги окружности называется градусная мера соответствующего ей центрального угла.

На рисунке 349, *а*) изображен центральный угол AOB, равный 80°. Ему соответствует дуга AB, заключенная внутри угла. Поэтому $\smile AB = 80°$.

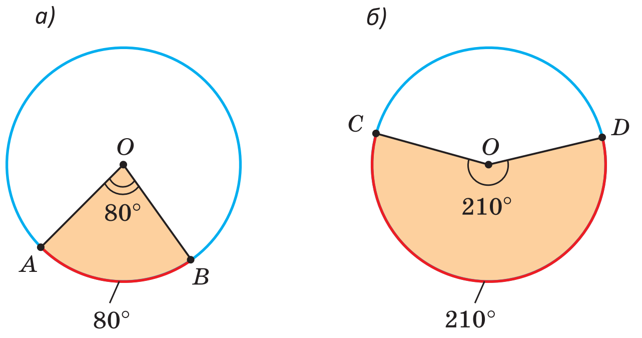


Рис. 349

На рисунке 349, *б*) центральный угол *COD* равен 210°, соответствующая ему дуга *CD* также равна 210°. Полному центральному углу (рис. 349, *в*) соответствует вся окружность. Поэтому окружность содержит 360°. Центральный угол и соответствующая ему дуга могут изменяться от 0° до 360°.

На рисунке 350, *а*) дуги *AKB* и *AMB* являются *дополнительными* (дополняют друг друга до окружности), поэтому сумма их градусных мер равна 360°. Говорят, что хорда *AB* *стягивает* дугу *AMB* и дугу *AKB*.

На рисунке 350, *б*) диаметр *AB* стягивает полуокружность *AKB*, которая равна 180°, так как ей соответствует центральный $\angle AOB$, который является развернутым.

Дуги одной окружности или равных окружностей называются равными, если равны их градусные меры. Большей считается та дуга, которая имеет бо́льшую градусную меру. Если $\angle AOB = \alpha$ и $\angle DOC = \alpha$ (рис. 350, *в*), то $\smile AB = \smile DC$.

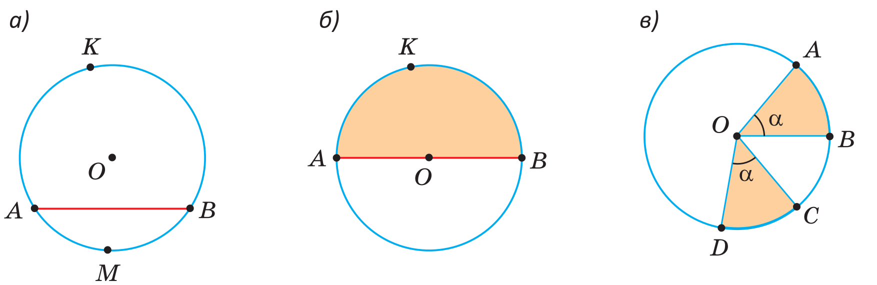


Рис. 350

Отметим, что окружность и любая ее дуга характеризуются и длиной, и градусной мерой. Говорят «дуга окружности равна 6 см», также говорят «дуга окружности равна 30°». Длина дуги прямо пропорциональна ее градусной мере. Дуги одной окружности, имеющие равные градусные меры, равны по длине и наоборот.

А теперь выполните **Тест 1.**

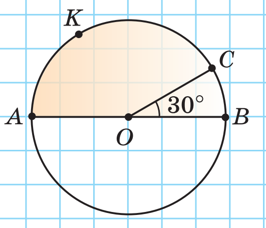
Тест 1

Если AB — диаметр, O — центр окружности, то:

а) $\smile CB = ...^\circ$

б) $\smile AKC = ...^\circ$

в) $\smile ABC = ...^\circ$



Определение. **Вписанным углом** называется угол, вершина которого принадлежит окружности, а стороны пересекают окружность.

В определении вписанного угла имеется в виду угол, меньший 180°.

На рисунке 351, *а*) $\angle MKN$ — вписанный. Ему соответствует дуга MN, заключенная внутри этого вписанного угла, и центральный $\angle MON$. Говорят, что $\angle MKN$ и $\angle MON$ *опираются* на дугу MN.

На рисунке 351, *б*) $\angle PLE$ — вписанный. Ему соответствует дуга PGE и содержащий эту дугу центральный угол POE, который больше 180°.

Любой вписанный угол в 2 раза меньше соответствующего центрального угла и дуги, на которую он опирается. Если $\angle MKN = 40^\circ$, то $\angle MON = \smile MN = 80^\circ$, если $\angle PLE = 120^\circ$, то $\angle POE = \smile PGE = 240^\circ$.

То есть $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\smile AC$ (рис. 351, *в*). Докажем это утверждение.

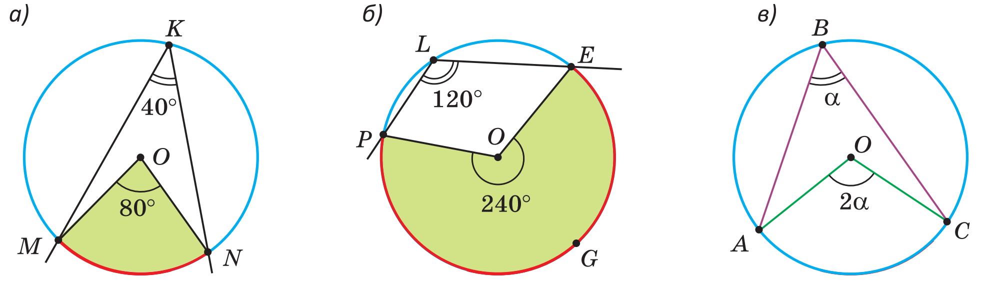


Рис. 351

Теорема (о вписанном угле).
Вписанный угол равен половине соответствующего ему центрального угла, а также половине дуги, на которую он опирается.

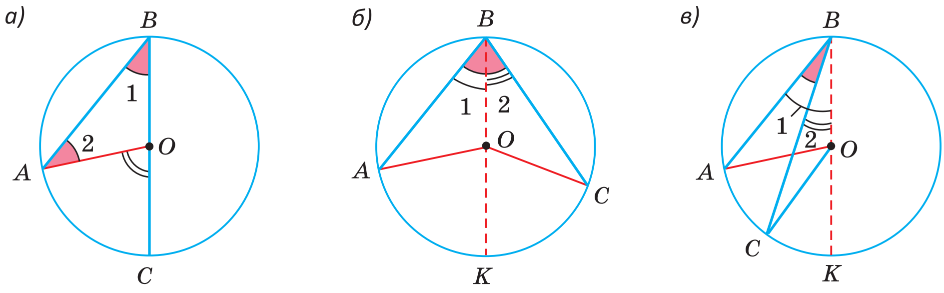


Рис. 352

Доказательство. Рассмотрим три случая.

а) Пусть центр O окружности лежит на стороне BC вписанного угла ABC (рис. 352, *а*). Тогда BC — диаметр, $OA = OB$ как радиусы, $\triangle AOB$ — равнобедренный, $\angle 1 = \angle 2$ как углы при его основании; $\angle AOC$ — внешний для $\triangle AOB$. По свойству внешнего угла треугольника $\angle AOC = \angle 1 + \angle 2 = 2\angle ABC$, откуда $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\smile AC$.

б) Пусть центр O окружности лежит внутри вписанного угла ABC (рис. 352, *б*). Проведем диаметр BK. По доказанному в п. а) $\angle 1 = \frac{1}{2}\smile AK$, $\angle 2 = \frac{1}{2}\smile KC$, тогда $\angle ABC = \angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2}(\smile AK + \smile KC) = \frac{1}{2}\smile AC = \frac{1}{2}\angle AOC$.

в) Пусть центр O окружности лежит вне вписанного угла ABC (рис. 352, *в*). Проведем диаметр BK. По доказанному в п. а) $\angle 1 = \frac{1}{2}\smile AK$, $\angle 2 = \frac{1}{2}\smile CK$, тогда $\angle ABC = \angle 1 - \angle 2 = \frac{1}{2}(\smile AK - \smile CK) = \frac{1}{2}\smile AC = \frac{1}{2}\angle AOC$.

Теорема доказана.

Следствия.

1. *Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой.*

2. *Вписанный угол, опирающийся на диаметр, — прямой. И обратно, если вписанный угол — прямой, то он опирается на диаметр.*

На рисунке 353, *а*) $\angle AB_1C = \angle AB_2C = \angle AB_3C = \angle AB_4C$, поскольку все эти вписанные углы опираются на общую дугу AC, а, следовательно, их градусные меры равны половине градусной меры дуги AC.

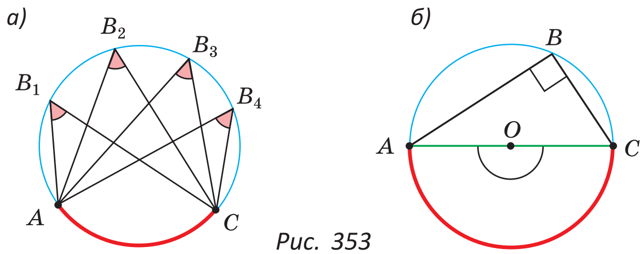


Рис. 353

На рисунке 353, *б*) вписанный угол ABC опирается на диаметр AC. Так как соответствующий углу ABC центральный угол AOC — развернутый, а соответствующая дуга AC является полуокружностью, то $\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$.

А теперь выполните **Тест 2**.

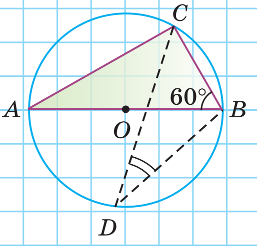
Тест 2

Если AB — диаметр, $\angle ABC = 60°$, то:

а) $\angle ACB = ...$

б) $\angle CAB = ...$

в) $\angle CDB = ...$



Задания к § 27

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
ключевые задачи

Задача 1. *Доказать, что равные хорды одной окружности стягивают равные дуги (речь идет о дугах одновременно меньших (бóльших) полуокружности).*

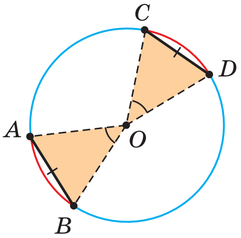


Рис. 354

Доказательство. Пусть хорды AB и CD равны (рис. 354). Эти хорды стягивают соответственно дуги AB и CD. Так как $\triangle AOB = \triangle COD$ по трем сторонам ($OA = OB = OC = OD$ как радиусы одной окружности), то $\angle AOB = \angle COD$. Отсюда следует, что $\smile AB = \smile CD$. Что и требовалось доказать.

Замечание. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

Задача 2. *Доказать, что дуги, заключенные между параллельными секущими к окружности, равны между собой.*

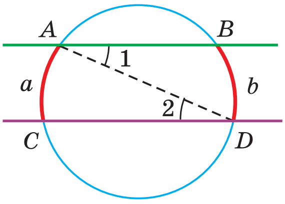


Рис. 355

Доказательство.
Пусть $AB \parallel CD$ (рис. 355). Проведем хорду AD. Углы 1 и 2 равны как накрест лежащие при параллельных прямых.
Из равенства вписанных углов следует равенство дуг, на которые они опираются, то есть $\smile AC = \smile BD$. Что и требовалось доказать.

Задача 3. *Доказать теорему:* **«Угол между касательной и хордой, выходящей из точки касания, измеряется половиной дуги, заключенной внутри угла».**

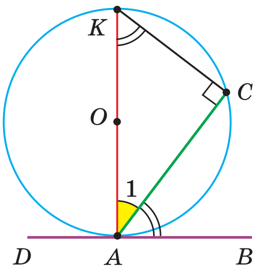


Рис. 356

Доказательство. Пусть DB — касательная к окружности с центром в точке O, где A — точка касания, AC — хорда. Докажем, что $\angle CAB = \frac{1}{2}\smile AC$ (рис. 356). Проведем диаметр AK. По свойству касательной $\angle KAB = 90°$ и $\angle CAB$ дополняет $\angle 1$ до $90°$. С другой стороны, $\angle C = 90°$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр, поэтому $\angle AKC$ также дополняет $\angle 1$ до $90°$. Поэтому $\angle CAB = \angle AKC$. Но $\angle AKC = \frac{1}{2}\smile AC$. Откуда $\angle CAB = \frac{1}{2}\smile AC$. Что и требовалось доказать.

Случаи, когда угол между хордой и касательной прямой ($\angle BAK$) или тупой ($\angle CAD$), рассмотрите самостоятельно.

Замечание. Полезно запомнить свойство: **«Угол между касательной и хордой, выходящей из точки касания, равен вписанному углу, опирающемуся на дугу, заключенную между касательной и хордой »** (рис. 357).

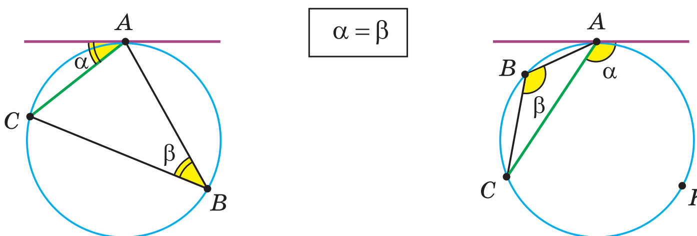


Рис. 357

Задача 4. *Доказать следующие утверждения:* а) *диаметр, перпендикулярный к хорде, делит хорду и стягиваемые ею дуги пополам* (рис. 358, *а*); б) *диаметр, проведенный через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде и делит стягиваемые ею дуги пополам;* в) *серединный перпендикуляр к хорде проходит через центр окружности и делит стягиваемые хордой дуги пополам.*

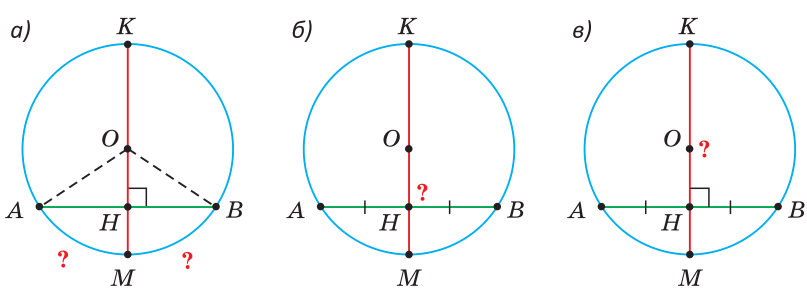


Рис. 358

Доказательство. а) $\triangle AOB$ — равнобедренный ($OA = OB$ как радиусы), а его высота OH, проведенная к основанию AB, является медианой и биссектрисой (см. рис. 358, *а*). Поэтому $AH = HB$, $\angle AOM = \angle BOM$, $\smile AM = \smile BM$. Утверждения б) и в) докажите самостоятельно (рис. 358, *б*, *в*).

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

380. Нарисуйте окружность, изобразите центральный угол AOB и вписанный угол AKB, опирающиеся на ту же дугу, если центральный угол равен:
а) $60°$; б) $90°$; в) $120°$; г) $270°$.
Запишите, сколько градусов содержит в каждом случае вписанный угол и соответствующая дуга.

381. По данным на рисунках 359, *а)*—*в)* найдите градусную меру угла или дуги, которые обозначены знаком вопроса (O — центр окружности).

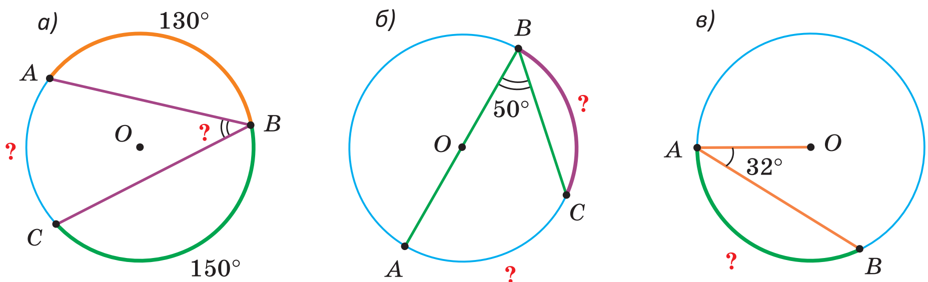


Рис. 359

382. Радиус окружности равен 24 см. Найдите длину хорды, которая стягивает дугу, содержащую:
а) $60°$; б) $90°$; в) $180°$; г) $300°$.

383. На рисунках 360, *а)*—*в)* O — центр окружности. Найдите угол A, если:
а) $BM \perp KC$; б) $\triangle BOC$ — равносторонний; в) $\angle 1 + \angle 2 = 126°$.

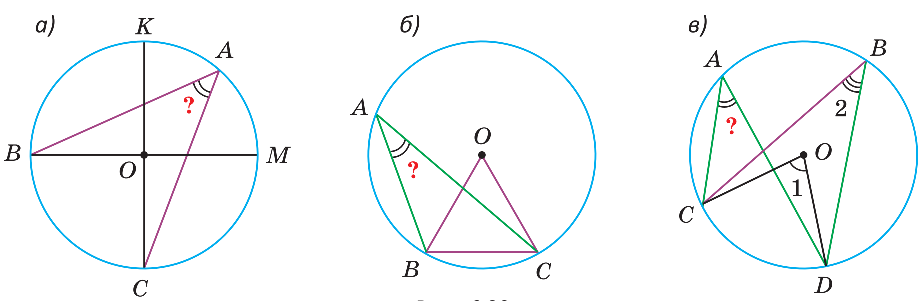


Рис. 360

384. Точки A, B и C лежат на окружности и являются вершинами равнобедренного треугольника ABC с основанием AC и углом при вершине, равным 78°. Найдите градусные меры дуг AB, BC и AC, которые заключены внутри углов треугольника ABC.

385. а) Вписанный угол ABC на 32° меньше соответствующего центрального угла AOC. Найдите центральный угол AOC.
б) Центральный и соответствующий ему вписанный угол вместе составляют 63°12′. Найдите эти углы.
в) Вписанный угол, соответствующий ему центральный угол и дуга, на которую эти углы опираются, вместе составляют 200°. Найдите градусные меры этих углов и дуги.

386. Точка O — центр окружности (рис. 361), $\angle B = 110°$. Найдите $\angle AOC$.

387. По данным на рисунке 362 найдите величину угла B.

388. Окружность вписана в угол BAC, B и C — точки касания прямых AB и AC и окружности (рис. 363). Угол BDC равен 40°. Найдите величину угла A.

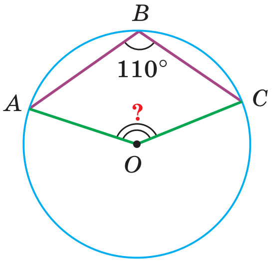


Рис. 361

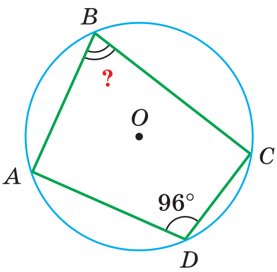


Рис. 362

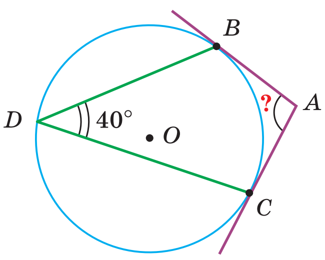


Рис. 363

389. а) В окружности, радиус которой равен 10 см, проведена хорда длиной 16 см. Найдите расстояние от центра окружности до прямой, содержащей эту хорду.
б) Хорда окружности равна 24 см, расстояние от центра окружности до прямой, содержащей хорду, равно 5 см. Найдите диаметр окружности.
в) В окружности, радиус которой равен 5 см, проведены две параллельные хорды длиной 6 см и 8 см по разные стороны от центра. Найдите расстояние между хордами.

390. а) Докажите, что дуга окружности, равная 60°, стягивается хордой, равной радиусу окружности.
б) Докажите, что вписанный угол, равный 30°, опирается на хорду, равную радиусу окружности.

391. Дана окружность с центром O и радиусом R и вписанный в нее угол ABC. Найдите площадь треугольника AOC, если:
а) $\angle ABC = 30°$, $R = 4$ см; б) $\angle ABC = 45°$, $AC = 8\sqrt{2}$ см.

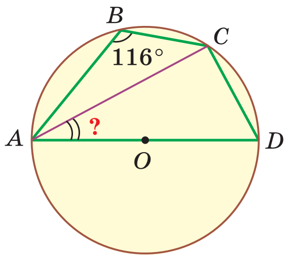


Рис. 364

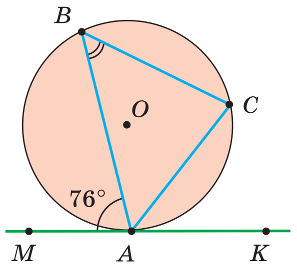


Рис. 365

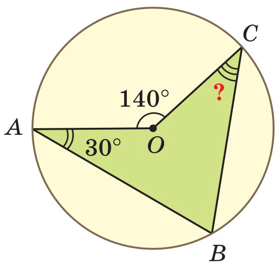


Рис. 366

392. Точка O является центром окружности (рис. 364), $\angle ABC = 116°$. Найдите $\angle CAD$.

393. Прямая MK касается окружности в точке A, $\angle BAM = 76°$, AC — биссектриса угла BAK (рис. 365). Найдите $\angle ABC$.

394. Окружность касается стороны AC треугольника ABC в точке K, проходит через его вершину B и пересекает стороны AB и BC соответственно в точках M и N, $\angle CKN = 40°$, $\angle AKM = 60°$, $\angle A = 50°$. Найдите $\angle C$.

395. а) Докажите, что прямой вписанный угол опирается на диаметр.

б) На окружности радиусом 9 см отмечены точки A, B и C такие, что $\angle BAC = 52°$, $\angle ACB = 38°$. Найдите длину хорды AC.

в) Вершины треугольника ABC принадлежат окружности, радиус которой равен 8,5 см, $\angle A + \angle B = 90°$, $AC = 8$ см. Найдите площадь треугольника ABC.

396. Хорда AC окружности равна 6 см и стягивает дугу AC, равную 60°. Хорда AB проходит через центр окружности. Найдите площадь треугольника ABC.

397. Докажите, что окружность, построенная на боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре, проходит через середину основания.

398. По данным на рисунке 366 найдите $\angle BCO$, где O — центр окружности.

399. В окружности проведены три произвольные хорды AB, BC и CD (рис. 367). Точки K, N и M — соответственно середины данных хорд. Докажите, что $\angle BKN = \angle CMN$.

400. Найдите геометрическое место середин хорд окружности, проведенных из одной точки окружности.

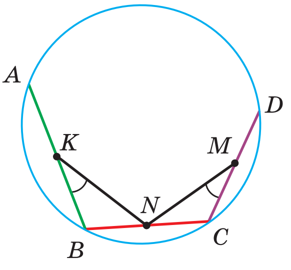


Рис. 367

Гимнастика ума

На плоскости изображена окружность, ее диаметр AB и точка M вне окружности (рис. 368). При помощи односторонней линейки опустите перпендикуляр из точки M на диаметр. (Односторонняя линейка без делений позволяет проводить только прямые линии.)

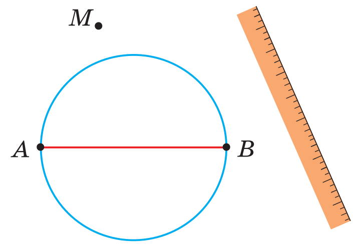


Рис. 368

ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

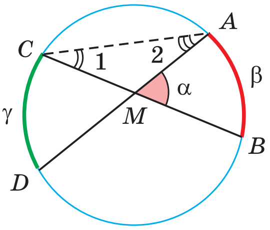
1. Определения вписанного и центрального углов.
2. Как определяется градусная мера дуги окружности и сколько градусов содержит вся окружность.
3. Теорему о вписанном и центральном углах окружности.
4. Свойство вписанных углов, опирающихся на одну и ту же дугу.
5. Свойство вписанного угла, опирающегося на диаметр.
6. Чему равен угол между хордой и касательной, имеющими общую точку на окружности.

Умеем

1. Доказывать теорему о том, что вписанный угол равен половине соответствующего центрального угла.
2. Доказывать теорему об угле между хордой и касательной.

§ 28. Углы, образованные хордами, секущими и касательными

Теорема. **Угол между пересекающимися хордами равен полусумме дуг, заключенных внутри данного угла и угла, вертикального данному, то есть** $\alpha = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$ (рис. 369).



$\alpha = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$

Рис. 369

Доказательство. Нужно доказать, что угол AMB равен полусумме $\smile AB = \beta$ и $\smile CD = \gamma$ (см. рис. 369). Проведем хорду AC. Для $\triangle AMC$ угол AMB — внешний, поэтому $\angle AMB = \angle 1 + \angle 2$. Но углы 1 и 2 — вписанные. По свойству вписанного угла $\angle 1 = \frac{1}{2}\smile AB$, $\angle 2 = \frac{1}{2}\smile CD$. Тогда $\angle AMB = \frac{1}{2}\smile AB + \frac{1}{2}\smile CD = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$. Теорема доказана.