Гимнастика ума

На плоскости изображена окружность, ее диаметр AB и точка M вне окружности (рис. 368). При помощи односторонней линейки опустите перпендикуляр из точки M на диаметр. (Односторонняя линейка без делений позволяет проводить только прямые линии.)

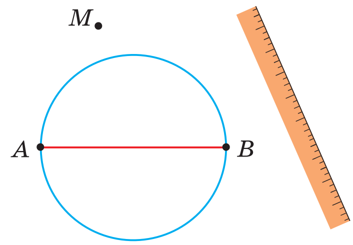


Рис. 368

ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

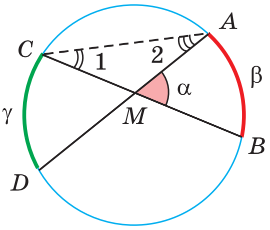
1. Определения вписанного и центрального углов.
2. Как определяется градусная мера дуги окружности и сколько градусов содержит вся окружность.
3. Теорему о вписанном и центральном углах окружности.
4. Свойство вписанных углов, опирающихся на одну и ту же дугу.
5. Свойство вписанного угла, опирающегося на диаметр.
6. Чему равен угол между хордой и касательной, имеющими общую точку на окружности.

Умеем

1. Доказывать теорему о том, что вписанный угол равен половине соответствующего центрального угла.
2. Доказывать теорему об угле между хордой и касательной.

§ 28. Углы, образованные хордами, секущими и касательными

Теорема. **Угол между пересекающимися хордами равен полусумме дуг, заключенных внутри данного угла и угла, вертикального данному, то есть** $\alpha = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$ (рис. 369).



$\alpha = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$

Рис. 369

Доказательство. Нужно доказать, что угол AMB равен полусумме $\smile AB = \beta$ и $\smile CD = \gamma$ (см. рис. 369). Проведем хорду AC. Для $\triangle AMC$ угол AMB — внешний, поэтому $\angle AMB = \angle 1 + \angle 2$. Но углы 1 и 2 — вписанные. По свойству вписанного угла $\angle 1 = \frac{1}{2}\smile AB$, $\angle 2 = \frac{1}{2}\smile CD$. Тогда $\angle AMB = \frac{1}{2}\smile AB + \frac{1}{2}\smile CD = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$. Теорема доказана.

Теорема. **Угол между секущими, проходящими через одну точку вне окружности, равен полуразности дуг, заключенных внутри угла, то есть $\alpha = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ (рис. 370).**

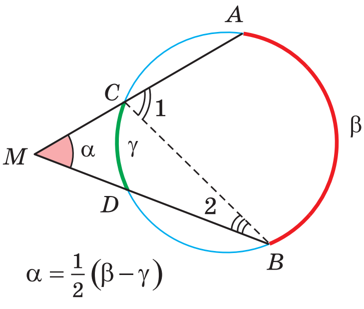


Рис. 370

Доказательство. Нужно доказать, что угол AMB равен полуразности $\smile AB = \beta$ и $\smile CD = \gamma$ (см. рис. 370). Проведем хорду BC. Для $\triangle MBC$ $\angle 1$ — внешний, поэтому $\angle 1 = \alpha + \angle 2$, откуда $\alpha = \angle 1 - \angle 2$. Но углы 1 и 2 — вписанные. По свойству вписанного угла $\angle 1 = \frac{1}{2}\smile AB$, $\angle 2 = \frac{1}{2}\smile CD$.

Тогда $\angle AMB = \frac{1}{2}\smile AB - \frac{1}{2}\smile CD = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$.

Теорема доказана.

Свойство 1. Угол между секущей и касательной, проходящими через одну точку вне окружности, равен полуразности дуг, заключенных внутри угла и ограниченных точками пересечения и точкой касания.

Свойство 2. Угол между двумя касательными, проходящими через одну точку вне окружности, равен полуразности дуг, заключенных внутри угла и ограниченных точками касания.

На рисунке 371, *а*) угол M, равный α, является углом между касательной и секущей, на рисунке 371, *б*) — углом между касательными. В обоих случаях $\alpha = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$. Докажите указанные свойства самостоятельно.

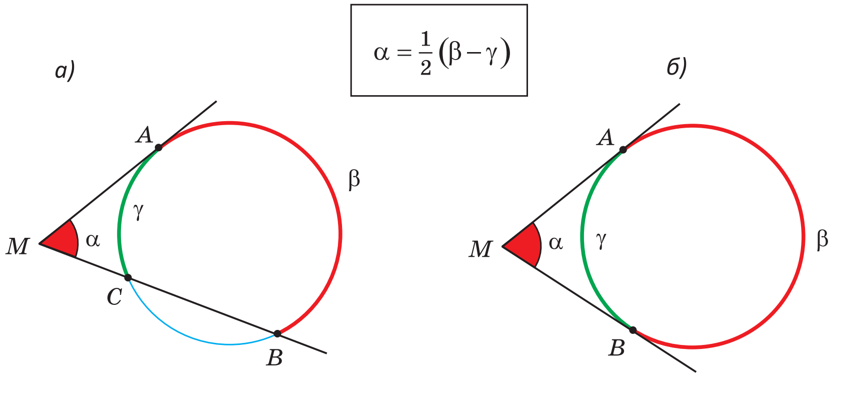
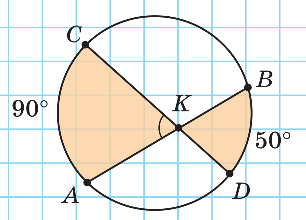


Рис. 371

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

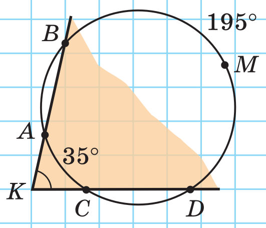
Тест 1

Если $\smile AC = 90°$, $\smile BD = 50°$, то $\angle AKC =$...



Тест 2

Если $\smile BMD = 195°$, $\smile AC = 35°$, то $\angle BKD =$...



Задания к § 28

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

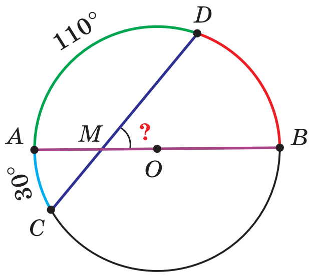


Рис. 372

Задача 1. *Найти угол DMB между хордой CD и диаметром AB, если известно, что дуга AC равна* 30°, *а дуга AD равна* 110° (рис. 372).

Решение. Так как AB — диаметр, то дуга ADB равна 180°. Тогда дуга DB равна $180° - 110° = 70°$. Искомый угол DMB равен полусумме дуг BD и AC, то есть

$$\angle DMB = \frac{1}{2}(\smile DB + \smile AC) = \frac{1}{2}(70° + 30°) = 50°.$$

Ответ: 50°.

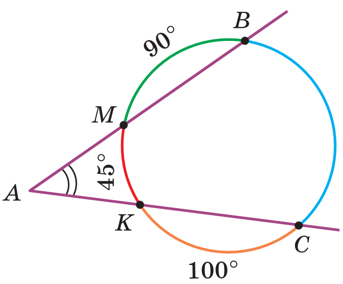


Рис. 373

Задача 2. *Найти угол A, если* $\smile KM = 45°$, $\smile MB = 90°$, $\smile KC = 100°$ (рис. 373).

Решение. Вся окружность содержит 360°. Найдем градусную меру дуги BC.
Получим $\smile BC = 360° - \smile KC - \smile MK - \smile MB =$
$= 360° - 100° - 45° - 90° = 125°$.
Искомый угол A равен полуразности градусных мер дуг BC и MK, то есть

$$\angle A = \frac{1}{2}(\smile BC - \smile MK) = \frac{1}{2}(125° - 45°) = 40°.$$

Ответ: 40°.

Задача 3. *Вершины четырехугольника $ABCD$ принадлежат окружности, диагонали AC и BD пересекаются в точке M. Известно, что $\angle DBC = 26°$, $\angle AMB = 80°$. Найти угол между прямыми AD и BC* (рис. 374).

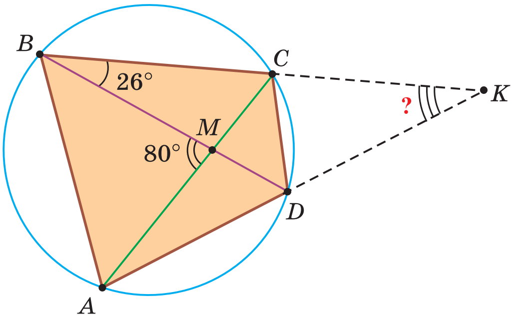
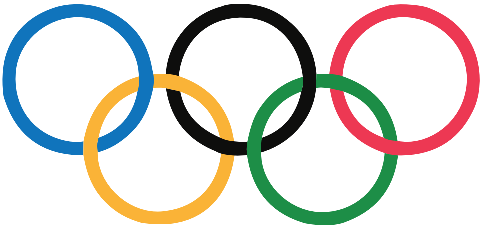


Рис. 374

Решение.
1) Продлим отрезки AD и BC до пересечения в точке K. Вписанный угол DBC опирается на дугу CD. Поэтому $\smile CD = 2\angle DBC = 2 \cdot 26° = 52°$.
2) Пусть $\smile AB = x$. Так как $\angle AMB$ — это угол между хордами AC и BD, то $\angle AMB = \frac{1}{2}(\smile AB + \smile CD)$, то есть $80° = \frac{1}{2}(x + 52°)$. Откуда $x = 108°$, $\smile AB = 108°$.
3) Так как $\angle AKB$ — это угол между секущими KA и KB, то $\angle AKB = \frac{1}{2}(\smile AB - \smile CD) = \frac{1}{2}(108° - 52°) = 28°$. Поскольку этот угол острый, то он является углом между прямыми AD и BC.
Ответ: 28°.

Замечание. Второй способ решения заключается в нахождении углов треугольника MBC, а затем углов треугольника ACK.

При помощи **Интернета** выясните историю происхождения эмблемы Олимпийских игр.
Определите, сколько пар пересекающихся колец и сколько пар непересекающихся колец на рисунке.



Выясните, кто из спортсменов Беларуси завоевал больше всех золотых олимпийских медалей.

Вспомните, какие еще эмблемы содержат окружности.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

401. По данным на рисунках 375, *а)*—*в)* найдите градусную меру угла или дуги, которые обозначены знаком вопроса.

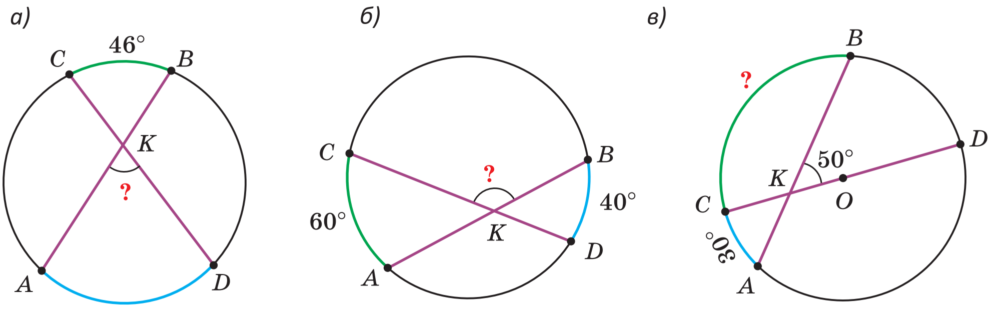


Рис. 375

402. AB и AC — секущие, O — центр окружности. Найдите:

а) $\angle A$ (рис. 376, *а*);
б) $\angle A$ (рис. 376, *б*);
в) градусную меру дуги MK (рис. 376, *в*).

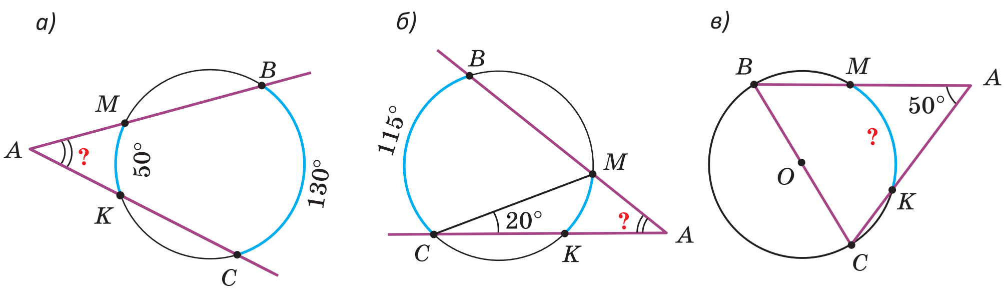


Рис. 376

403. Из точки M, лежащей вне окружности, к этой окружности проведены касательные MA и MB. Точки касания A и B делят окружность на две дуги, градусные меры которых относятся как 3 : 7. Найдите $\angle AMB$.

404. Прямая AK — касательная к окружности, K — точка касания (рис. 377). Дуга CB равна 130°, дуга CK равна 75°. Найдите $\angle A$.

405. Хорды AB и CD пересекаются в точке K, $\angle BKD = 60°$, $\smile BD$ на 20° больше $\smile AC$. Найдите $\smile AC$.

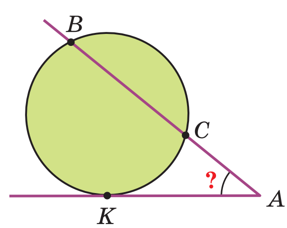


Рис. 377

406. Вершины четырехугольника $ABCD$ лежат на окружности, диагонали пересекаются в точке M, $\angle BAC = 36°$, $\angle CAD + \angle ADC = 138°$. Найдите $\angle BMC$.

407. По данным на рисунке 378 найдите $\alpha - \beta$.

408. Если $\alpha + \beta + \gamma = 130°$ (рис. 379), то чему равна величина угла β?

409. Известно, что $\smile AD = 120°$, $\angle BAC = 32°$ (рис. 380). Найдите угол между прямыми:

а) AC и BD; б) AB и DC.

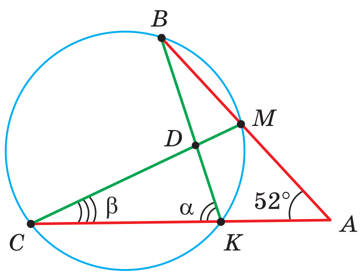


Рис. 378

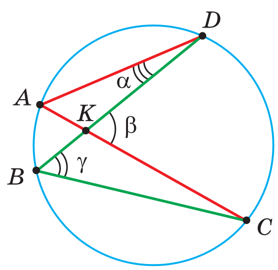


Рис. 379

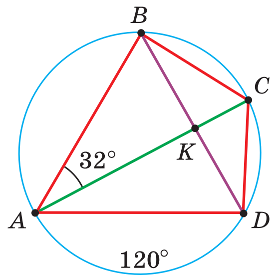


Рис. 380

410. AB — диаметр окружности. Докажите, что:

а) $\angle AMB$ — тупой (рис. 381, *а*);
б) $\angle AMB$ — острый (рис. 381, *б*).

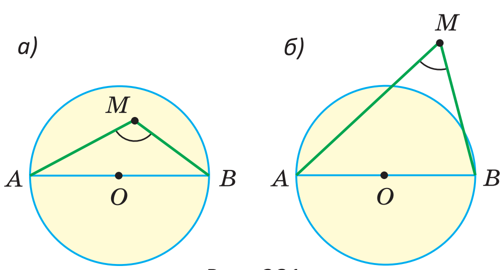


Рис. 381

411. На рисунке 382 точка O — центр окружности, $\angle BAC = 20°$, $AD = OC$. Найдите $\angle C$.

412. Из точки A проведены касательная AB, где B — точка касания, и секущая AC, проходящая через центр O данной окружности (рис. 383). Луч AN — биссектриса угла BAC. Докажите, что:

а) $\smile MK + \smile BN = \smile KB + \smile NC$; б) $\angle ADB = 45°$.

413. Найдите геометрическое место вершин прямых углов, стороны которых проходят через две данные точки.

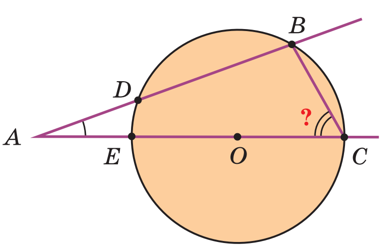


Рис. 382

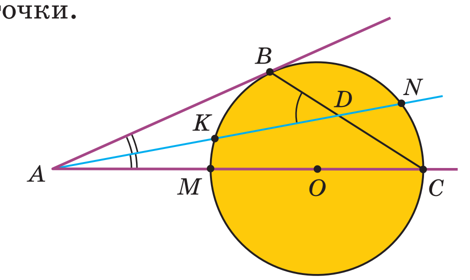


Рис. 383