§ 29. Свойство отрезков хорд и касательных

Теорема (о пересекающихся хордах).
Произведения отрезков пересекающихся хорд равны между собой, то есть $ab = cd$ (рис. 384).

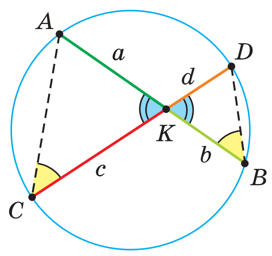


Рис. 384

Доказательство. Пусть хорды AB и CD пересекаются в точке K, $AK = a$, $KB = b$, $CK = c$, $KD = d$. Нужно доказать, что $AK \cdot KB = CK \cdot KD$, или $ab = cd$ (см. рис. 384). Проведем хорды AC и BD. Так как $\angle AKC = \angle BKD$ как вертикальные, а $\angle ACD = \angle DBA$ как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу AD, то $\triangle AKC \sim \triangle DKB$ по двум углам. Из подобия треугольников следует, что $\frac{AK}{CK} = \frac{DK}{BK}$, или $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$, откуда $ab = cd$.

Теорема доказана.

Теорема (о касательной и секущей).
Если из одной точки к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной, соединяющего данную точку и точку касания, равен произведению отрезков секущей, соединяющих данную точку и точки ее пересечения с окружностью, то есть $a^2 = bc$ (рис. 385).

Иногда эту теорему формулируют так: **«Квадрат отрезка касательной равен произведению большего отрезка секущей на его внешнюю часть»**, имея в виду указанные отрезки.

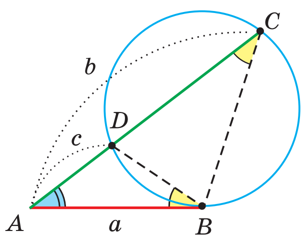


Рис. 385

Доказательство. Пусть AB — касательная, где B — точка касания и $AB = a$, AC — секущая, $AC = b$ — отрезок секущей, $AD = c$ — его внешняя часть (см. рис. 385). Нужно доказать, что $AB^2 = AC \cdot AD$, или $a^2 = bc$. Проведем хорду BD. У треугольников ABD и ACB $\angle A$ — общий, $\angle ABD = \angle ACB = \frac{1}{2}\smile BD$. Тогда $\triangle ABC \sim \triangle ADB$ по двум углам. Из подобия треугольников следует, что $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$, или $\frac{a}{c} = \frac{b}{a}$, откуда $a^2 = bc$.

Теорема доказана.

Следствие.

Если из точки, взятой вне окружности, к окружности проведено несколько секущих, то произведения больших отрезков секущих на их внешние части равны между собой: $AC \cdot AD = AC_1 \cdot AD_1$ (рис. 386).

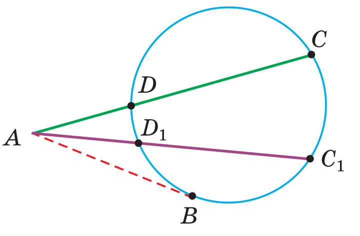


Рис. 386

Докажите это следствие самостоятельно, используя рисунок и теорему о касательной и секущей.

Задания к § 29

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

Задача 1. *Хорды AB и CD пересекаются в точке M. Известно, что* $AB = 15$ *см,* $CM = 9$ *см,* $MD = 4$ *см. Найти* $AM : MB$*, если* $AM < MB$ (рис. 387).

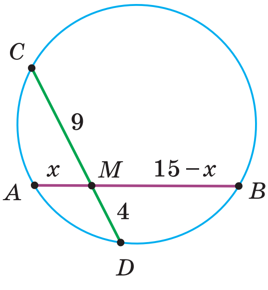


Рис. 387

Решение. Пусть $AM = x$ см, тогда $MB = (15 - x)$ см. По теореме о пересекающихся хордах $AM \cdot MB = CM \cdot MD$, то есть $x(15 - x) = 9 \cdot 4$.

Решим полученное уравнение:

$15x - x^2 = 36$, $x^2 - 15x + 36 = 0$.

По теореме, обратной теореме Виета, $x_1 = 3$, $x_2 = 12$.

Если $AM = 3$ см, то $MB = AB - AM = 12$ см. Так как $3 < 12$, то $AM : MB = 3 : 12 = 1 : 4$.

Ответ: $1 : 4$.

Задача 2. *Точка K делит хорду AB на отрезки* $AK = 7$, $KB = 8$. *Расстояние от центра O окружности до точки K равно* 5 (рис. 388). *Найти радиус окружности.*

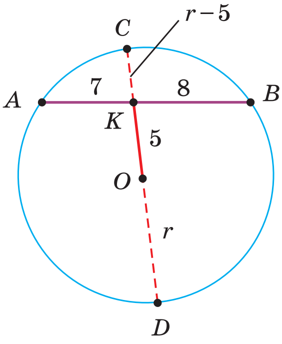


Рис. 388

Решение. Проведем диаметр CD, содержащий отрезок OK. Обозначим радиус окружности r.

Тогда $KD = OD + OK = r + 5$, $CK = OC - OK = r - 5$.

По теореме о пересекающихся хордах

$CK \cdot KD = AK \cdot KB$, то есть $(r - 5)(r + 5) = 7 \cdot 8$, $r^2 - 25 = 56$, $r^2 = 81$, $r = \pm 9$.

По смыслу задачи $r > 0$.

Поэтому $r = 9$.

Ответ: 9.

Задача 3. *Из точки A к окружности проведены две секущие AB и AC* (рис. 389). *Найти длину отрезка AB, если $KB = 14$ см, $AM = 8$ см, $MC = 7$ см.*

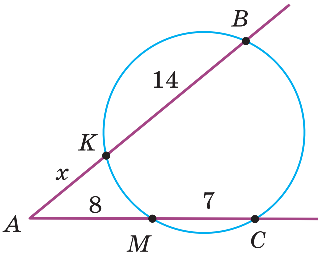


Рис. 389

Решение. Воспользуемся свойством секущих к окружности, проведенных из одной точки (следствием из теоремы о касательной и секущей). Получим $AB \cdot AK = AC \cdot AM$. Обозначим $AK = x$ см. Тогда $(x + 14) \cdot x = (8 + 7) \cdot 8$, $x^2 + 14x - 120 = 0$, $x_1 = -20$, $x_2 = 6$. Так как по смыслу задачи $x > 0$, то $x = 6$. Итак, $AK = 6$ см, $AB = 20$ см.

Ответ: 20 см.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

414. На рисунке 390 $CM = 8$ см, $MD = 6$ см, $MB = 12$ см. Найдите длину отрезка AM.

415. На рисунке 391 $AM = MB$, $CM = 4$ см, $MD = 9$ см. Найдите длину отрезка AB.

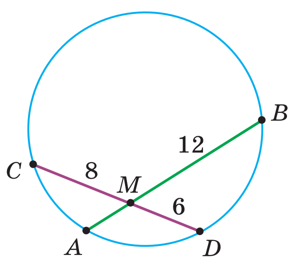


Рис. 390

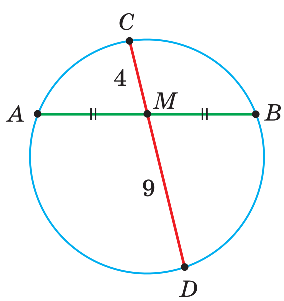


Рис. 391

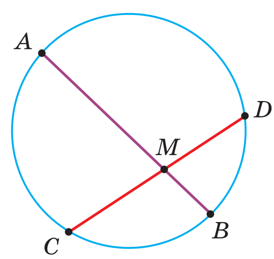


Рис. 392

416. На рисунке 392 $AM = 20$ см, $CM = 2MB$, отрезок MD на 2 см меньше отрезка CM. Найдите длину отрезка CD.

417. Точка O — центр окружности, $KB = 7$ см, $AK = 12$ см, $CD = 20$ см (рис. 393). Найдите длину отрезка KD.

418. AB — диаметр окружности (рис. 394, с. 192), $AB \perp CD$, $KB = 4$ см, $KD = 6$ см. Найдите радиус окружности.

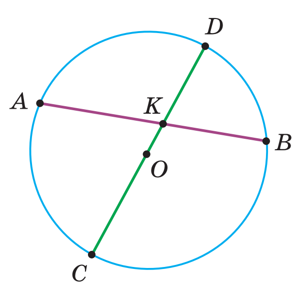


Рис. 393

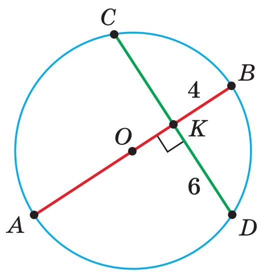


Рис. 394

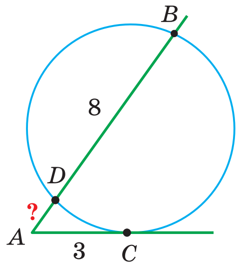


Рис. 395

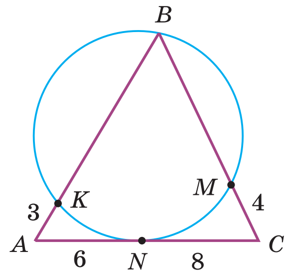


Рис. 396

419. Из точки M к окружности проведены касательная MA, где A — точка касания, и секущая, которая пересекает окружность в точках C и D. Точка D лежит на отрезке MC, $MD = 4$ см, $DC = 12$ см. Найдите длину отрезка AM.

420. На рисунке 395 AC — касательная, C — точка касания, $AC = 3$ см, AB — секущая, $BD = 8$ см. Найдите длину отрезка AD.

421. На рисунке 396 окружность касается стороны AC треугольника ABC в точке N и проходит через его вершину B. Найдите периметр треугольника ABC, если $AK = 3$ см, $AN = 6$ см, $NC = 8$ см, $CM = 4$ см.

422. На рисунке 397 AC — касательная к малой окружности, C — точка касания, $AD = 2$ см, $DB = 16$ см. Найдите длину отрезка AC.

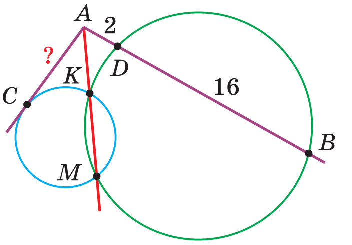


Рис. 397

ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Чему равна величина угла между пересекающимися хордами.
2. Чему равна величина угла между секущими, проходящими через одну точку, взятую вне окружности.
3. Свойство отрезков пересекающихся хорд.
4. Свойство отрезка касательной и отрезков секущей, проведенных из одной точки, взятой вне окружности.

Умеем

1. Доказывать теорему об угле между пересекающимися хордами.
2. Доказывать теорему об угле между секущими к окружности.
3. Доказывать теорему об отрезках пересекающихся хорд окружности.
4. Доказывать теорему о касательной и секущей.

Об одном геометрическом месте точек

Задача. *Построить дугу окружности, из каждой точки которой данный отрезок a виден под данным углом* α (рис. 398).

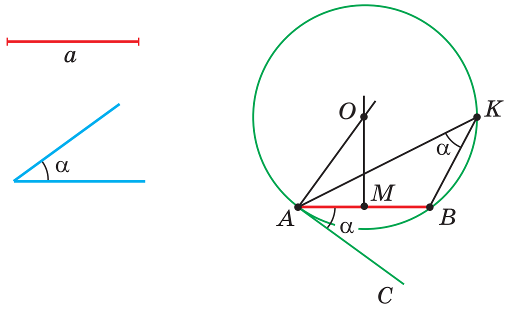


Рис. 398

А н а л и з. Центр искомой окружности лежит на серединном перпендикуляре к хорде *a*. Серединный перпендикуляр к хорде мы построить можем. Угол между касательной и хордой, выходящей из точки касания, равен вписанному углу, опирающемуся на ту же дугу. Касательную под углом α к хорде *a* мы построить можем. Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной. Восстановить перпендикуляр к касательной в точке касания мы можем. Пересечение этого перпендикуляра и серединного перпендикуляра к данному отрезку даст центр искомой окружности.

П о с т р о е н и е. Строим серединный перпендикуляр MO к отрезку $AB = a$. Откладываем $\angle BAC = \alpha$. Из точки A восстанавливаем перпендикуляр к прямой AC. Точка O — центр окружности, дуга AKB — искомая.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $OA \perp AC$, следовательно, AC — касательная к окружности с радиусом OA; $\angle BAC = \alpha = \frac{1}{2}\smile AB$ как угол между касательной и хордой; $\angle AKB = \frac{1}{2}\smile AB$ как вписанный угол, опирающийся на дугу AB. Тогда $\angle AKB = \alpha$, где K — произвольная точка дуги AKB.

Из решенной задачи следует, что геометрическим местом точек плоскости, из которых данный отрезок виден под углом α, является объединение двух дуг окружностей: дуги AKB и ей симметричной относительно прямой AB, за исключением концов этих дуг, то есть точек A и B.

Данное свойство позволяет построить при помощи циркуля и линейки треугольник по стороне, противолежащему углу и какому-либо еще элементу треугольника (рис. 399).

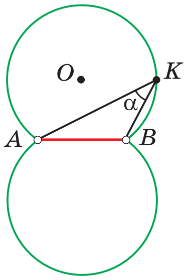


Рис. 399

Упражнения

1. Построить треугольник по основанию a, углу при вершине α и высоте h, опущенной на это основание.

2. Построить треугольник по основанию a, углу при вершине α и медиане, проведенной к стороне a.

Геометрия 3D

Из курса геометрии 7-го класса мы знаем, что если вращать круг или полукруг вокруг его диаметра, то получится ***шар*** (рис. 400). Поверхность шара называется *сферой*.

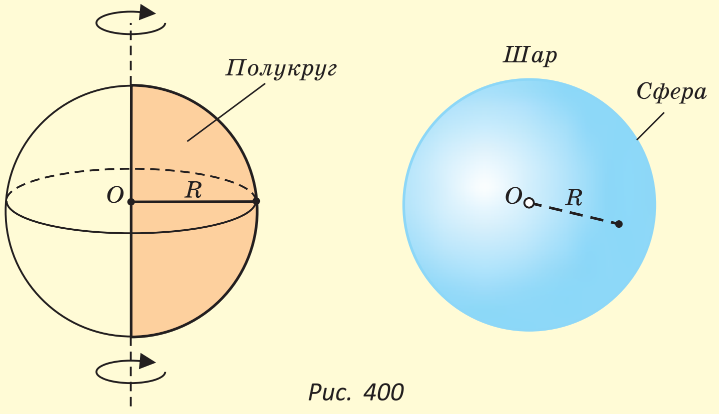


Рис. 400

Если вращать прямоугольник около одной из его сторон, то получится ***цилиндр*** (рис. 401). Это геометрическое тело имеет поверхность и объем.

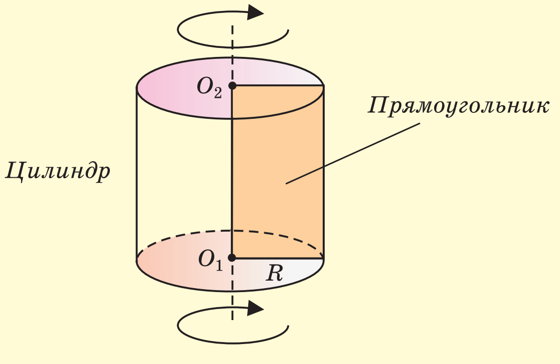


Рис. 401

Поверхность цилиндра состоит из двух кругов и боковой поверхности (рис. 402). Круги называются *основаниями* цилиндра, их радиус R равен одной из сторон прямоугольника вращения. Если боковую поверхность цилиндра развернуть на плоскость, то получится прямоугольник. Одна из его сторон равна высоте цилиндра, а другая — длине окружности основания, то есть $2\pi R$.

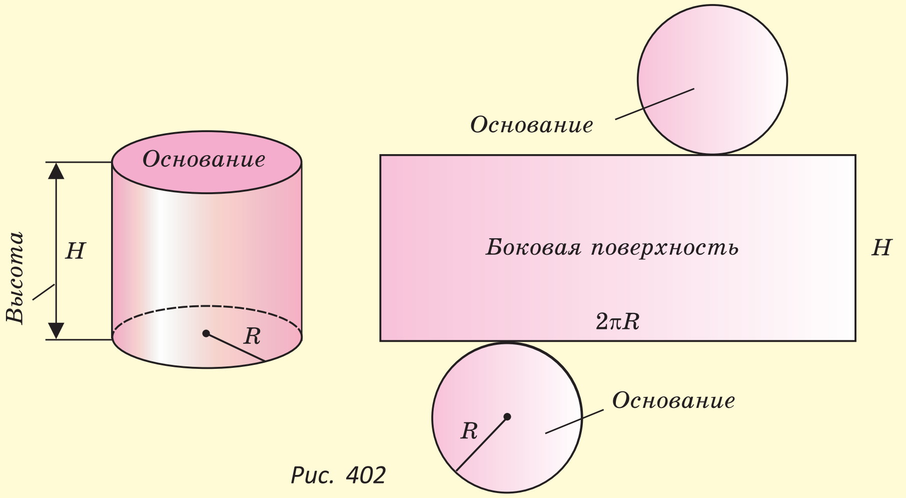


Рис. 402

Высота H цилиндра равна второй стороне прямоугольника вращения.

Если вращать прямоугольный треугольник около одного из катетов, то получится ***конус*** (рис. 403). Как шар и цилиндр, конус — это геометрическое тело, которое имеет поверхность и обладает объемом.

Поверхность конуса состоит из одного круга, который называется основанием конуса, и боковой поверхности. Радиус R основания равен одному из катетов треугольника вращения. Другой катет является высотой конуса. Высота H конуса выходит из вершины и перпендикулярна основанию конуса. Если боковую поверхность конуса развернуть на плоскость, то она будет представлять собой сектор круга (рис. 404).

Рассмотренные нами тела: шар, цилиндр и конус — называют *телами вращения*. В жизни эти тела встречаются довольно часто. Приведите примеры.

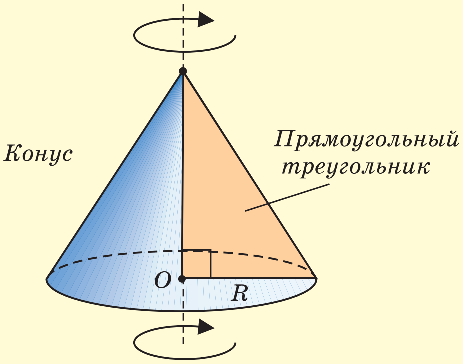


Рис. 403

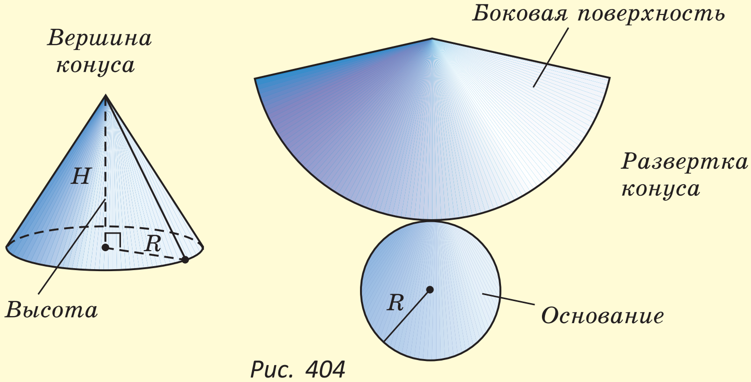


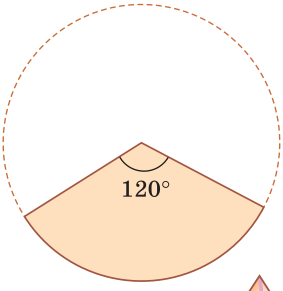
Рис. 404

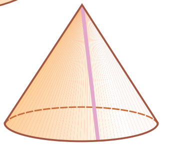
Моделирование

Задание 1

а) Возьмите прямоугольную полоску бумаги размером 10×20 см и сверните ее в цилиндр. Скрепите края бумаги скотчем. Определите примерный радиус основания этого цилиндра. Вырежьте два круга найденного радиуса и закрепите их в местах оснований цилиндра.

б) Найдите приближенную площадь полной поверхности цилиндра. Используйте формулу площади круга $S = \pi R^2$ и значение $\pi \approx 3{,}14$.





Задание 2

а) На бумаге изобразите круг радиусом 10 см. Вырежьте из круга сектор с центральным углом в 120°. Сверните этот сектор в конус. Скрепите края бумаги скотчем. Определите примерный радиус R основания этого конуса и его высоту H.

б) Найдите объем конуса, используя формулу $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot H$.

Переверните конус вершиной вниз и насыпьте доверху в полученную воронку сахар. Пересыпьте сахар в цилиндрический стакан с делениями. Определите по делениям объем сахара, учитывая, что 1 мл = 1 см^3. Сравните объем конуса, полученный двумя разными способами.

Интересно знать. Форму конуса имеет Мемориальный комплекс «Курган Славы» — памятник Великой Отечественной войны, расположенный в Смолевичском районе (Минская область). Он сооружен в память о героизме советских солдат и офицеров, разгромивших фашистскую армию группы «Центр» в ходе операции «Багратион». В основание кургана заложена земля из городов-героев СССР. На вершине кургана возвышается скульптурная композиция из четырех штыков, символизирующих четыре фронта, освобождавших Беларусь.

Задание 3

Высота кургана равна 35 м, длина спуска по прямой — 67,3 м. Определите диаметр основания кургана.

ЗАПОМИНАЕМ

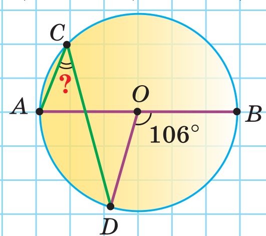
1. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.
2. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе угла.
3. Вписанный угол равен $\frac{1}{2}$ соответствующего центрального угла или $\frac{1}{2}$ дуги, на которую он опирается.
4. Угол между пересекающимися хордами равен полусумме градусных мер дуг, заключенных внутри данного угла и внутри угла, ему вертикального.
5. Угол между секущими, проходящими через одну точку вне окружности, равен полуразности дуг, заключенных внутри угла.
6. Произведения отрезков пересекающихся хорд равны между собой.
7. Если через одну точку к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной равен произведению большего отрезка секущей на его внешнюю часть.

ПРОВЕРЯЕМ СЕБЯ

Тест 1

O — центр окружности. Найдите $\angle ACD$.

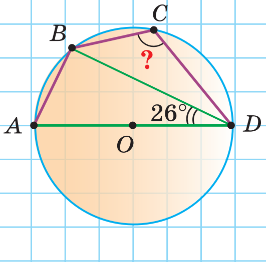
а) 54°; б) 74°; в) 32°; г) 48°.



Тест 2

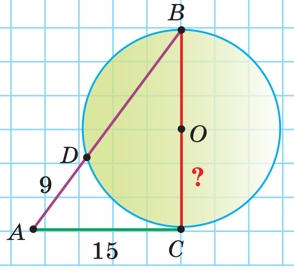
AD — диаметр окружности. Найдите $\angle C$.

а) 126°; б) 136°; в) 116°; г) 154°.



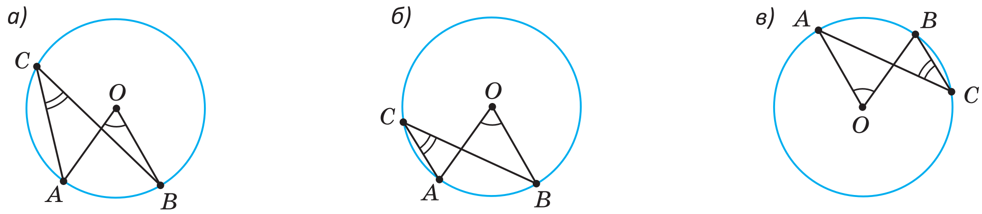
Тест 3

AC — касательная. Найдите радиус OC.

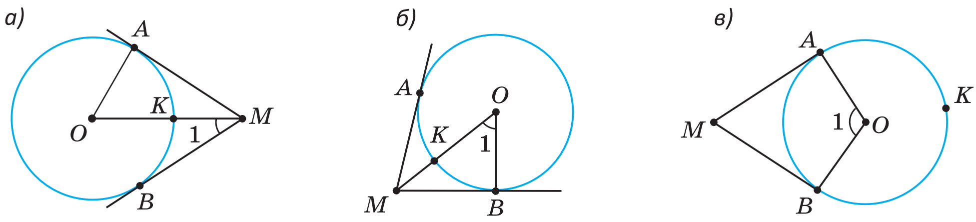


ПОДГОТОВКА К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ 4

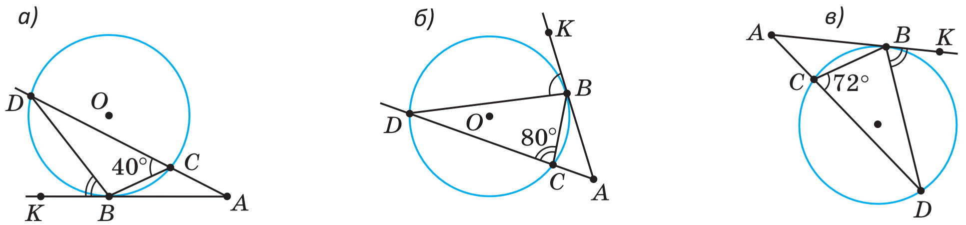
1. Найдите $\angle C + \angle O$, если: а) $\smile AB = 60°$; б) $\smile AB = 62°$; в) $\smile AB = 58°$.



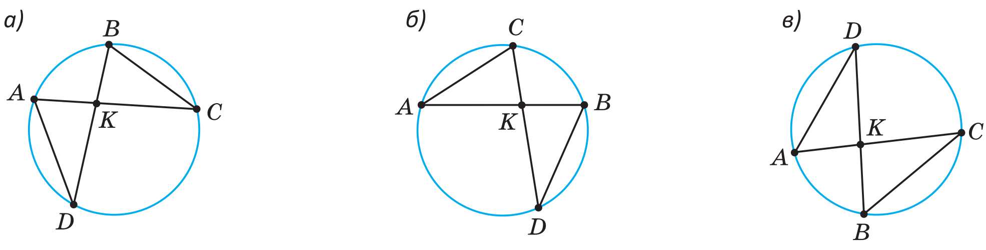
2. Найдите $\angle 1$, если: а) $\smile AK = 60°$; б) $\smile AK = 56°$; в) $\smile AKB = 260°$.



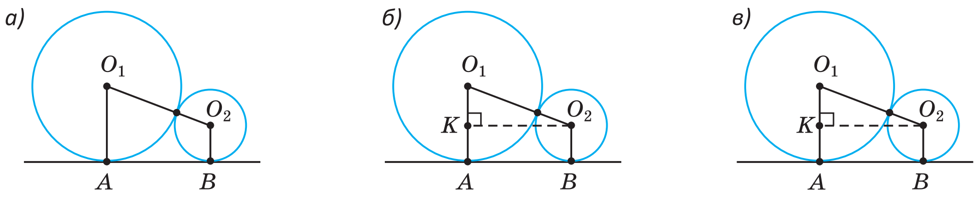
3. Найдите $\angle KBD$, где B — точка касания.



4. Заполните пропуск. а) $\dfrac{AK}{BK} = \dfrac{DK}{\ldots}$; б) $\dfrac{CK}{BK} = \dfrac{AK}{\ldots}$; в) $DK \cdot KB = AK \cdot \ldots$.



5. $R = 36$, $r = 25$. Найдите: а) O_1O_2; б) O_1K; в) $S_{AO_1O_2B}$.

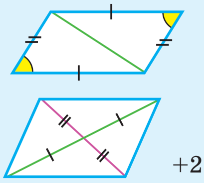


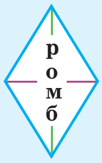
Сумма углов многоугольника $180°(n-2)$

Параллелограмм

Свойства

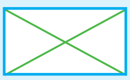
1
2
3
4
5





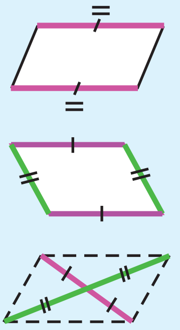
+2. диагонали: $\perp$ и бис.

прямоугольник

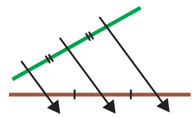


+1. диагонали равны

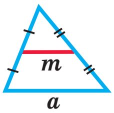
Признаки



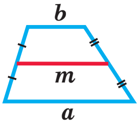
Теорема Фалеса



СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ



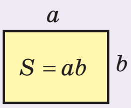
$m = \frac{a}{2}$



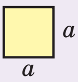
$m = \frac{a+b}{2}$

МЕДИАНЫ 2 : 1

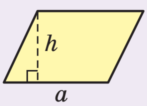
Площади



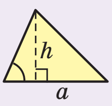
$S = ab$



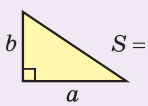
$S = a^2$



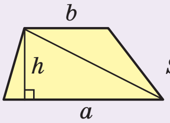
$S = ah$



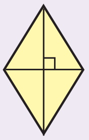
$S_{\triangle} = \frac{1}{2}ah$



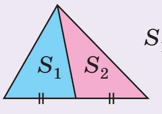
$S = \frac{ab}{2}$



$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$



$S = \frac{d_1 d_2}{2}$



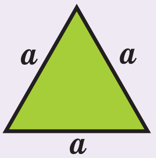
$S_1 = S_2$

Медиана на два равновеликих

Пифагор

$c^2 = a^2 + b^2$

обратная



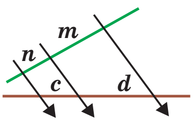
$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Площади подобных треугольников

$$\frac{S}{S_1} = \frac{a^2}{a_1^2} = k^2$$

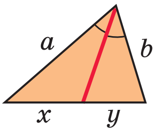
Подобие

I признак
II признак
III признак



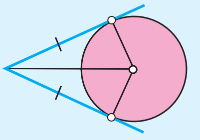
$\frac{n}{m} = \frac{c}{d}$

Свойство биссектрисы угла треугольника

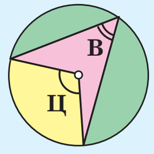


$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$

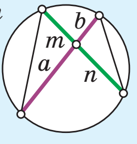
Касательная

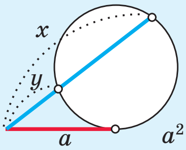


$В = \frac{1}{2} Ц$



$ab = mn$





$a^2 = xy$

База знаний по геометрии. 8-й класс

Знать и уметь доказывать

1. Сумма внутренних углов многоугольника равна $180°(n - 2)$.

2. Свойства параллелограмма:

1) сумма соседних углов равна $180°$;

2) диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника;

3)—4) у параллелограмма противоположные стороны равны, противоположные углы равны;

5) диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

3. Признаки параллелограмма. Четырехугольник является параллелограммом, если у него:

1) две стороны равны и параллельны;

2) противоположные стороны попарно равны;

3) диагонали точкой пересечения делятся пополам.

4. Диагонали прямоугольника равны.

5. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и лежат на биссектрисах его углов.

6. Теорема Фалеса: «Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, то на другой стороне угла отложатся равные между собой отрезки».

7. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении $2 : 1$, считая от вершины.

8. Средняя линия m треугольника параллельна основанию и равна его половине, то есть если M и K — середины сторон AB и BC треугольника ABC, то $MK \parallel AC$ и $MK = \frac{1}{2}AC$.

9. Средняя линия m трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме, то есть $m \parallel a$, $m \parallel b$ и $m = \frac{a + b}{2}$, где a и b — основания трапеции.

10. Площади: квадрата — $S = a^2$; прямоугольника — $S = ab$; параллелограмма — $S = ah$; треугольника — $S = \frac{1}{2}ah$; трапеции — $S = \frac{a + b}{2} \cdot h$; прямоугольного треугольника — $S = \frac{ab}{2}$; ромба — $S = \frac{d_1 d_2}{2}$.

11. Теорема Пифагора: «Сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы, то есть $a^2 + b^2 = c^2$».

12. Признаки подобия треугольников. Треугольники подобны, если:

1) два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника;

2) две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы между ними равны;

3) три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника.

13. Прямая, параллельная стороне треугольника и пересекающая его стороны, отсекает от него треугольник, подобный данному.

14. Прямоугольные треугольники подобны по острому углу.

15. Площади подобных треугольников относятся как квадраты соответствующих сторон, т. е. если $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, то $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB^2}{A_1B_1^2} = k^2$.

16. Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам, то есть если BK — биссектриса угла B треугольника ABC, то $\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{BC}$.

17. Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

18. Вписанный угол равен половине соответствующего центрального угла.

19. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой.

20. Вписанный угол, опирающийся на диаметр, — прямой.

21. Произведения отрезков пересекающихся хорд равны между собой.

22. Площадь равностороннего треугольника $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

23. Если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей стороны, то треугольник прямоугольный (обратная теорема Пифагора).

24. Площади треугольников с общей высотой относятся как соответствующие основания.

25. Угол между пересекающимися хордами равен полусумме дуг, одна из которых заключена внутри данного угла, а другая — внутри ему вертикального.

26. Угол между секущими, выходящими из точки вне окружности, равен полуразности дуг, заключенных внутри угла.

27. Угол между хордой и касательной, имеющими общую точку на окружности, равен половине дуги, заключенной внутри угла.

28. Для касательной и секущей, проведенных через одну точку к окружности, квадрат отрезка касательной равен произведению большего отрезка секущей на его внешнюю часть.

Повышенный уровень

29. Признаки прямоугольника.

30. Признаки ромба.

31. Признаки равнобедренной трапеции.

32. Пересечение высот треугольника в одной точке.

33. Свойство замечательных точек трапеции.

34. Свойство площадей треугольников с общей высотой.

35. Центрально-симметричные и осесимметричные фигуры.

ОТВЕТЫ

Глава I

1. а) 720°; б) 1440°; в) 2700°. **2.** а) 110°; б) 140°; в) 180°. **4.** 42 см. **5.** а) 3; б) 5; в) 6. **6.** 36°; 126°; 54°; 144°. **7.** а) 100°; б) 72°; 72°; 72°; 144°. **8.** а) По 160 см; б) 9 см. **9.** 45°. **10.** Указание: используйте неравенство треугольника. **12.** 540°. **13.** 75°. **14.** Точка пересечения диагоналей. Указание: используйте неравенство треугольника. **15.** 18 см, 2 см. Указание: используйте свойство ломаной. **16.** Три. **19.** а) $\angle A = \angle C = 50°$, $\angle D = 130°$; б) $\angle A = \angle C = 70°$, $\angle B = \angle D = 110°$; в) $\angle A = \angle C = 80°$, $\angle B = \angle D = 100°$; г) $\angle A = \angle C = 40°$, $\angle B = \angle D = 140°$; д) $\angle A = \angle C = 60°$, $\angle B = \angle D = 120°$. **20.** а) $AB = CD = 10$ см, $AD = BC = 14$ см; б) $AB = CD = 11$ см, $AD = BC = 13$ см; в) $AB = CD = 9$ см, $AD = BC = 15$ см; г) $AB = CD = 8$ см, $AD = BC = 16$ см; д) $AB = BC = CD = AD = 12$ см. **21.** а) 28 см; б) 42 см. **22.** 94 см. **23.** 38 см. **24.** а) 1) 10 см; 2) 5 см; б) 5 см и 10 см. **26.** 32 см. **27.** 48 см. **28.** 24 см. **29.** 52°. **30.** 108°. **31.** 4; 8. **38.** 80. **39.** 54°. **42.** а) 108°; 72°; б) 54°. **43.** 36 см. **48.** (6; 1), (–8; 1), (2; 9). **49.** 6 см. **51.** Указание: воспользуйтесь теоремой о пересечении высот треугольника. **52.** 4 см. **53.** 34 см. **54.** 36 см. **55.** 12 см. **56.** 28. **58.** 56°. **59.** 154°. **60.** 40 см. **61.** 3 см. **63.** 30°, 60°. **64.** 90°. **65.** а) 18 см. **69.** г). **71.** а) 48 см; б) 55° и 70°; в) 16 см. **72.** а) 128°; б) 64°; в) 52°; г) 26°. **73.** а) 48 см; б) 72 см; в) 64 см. **74.** 58°. **75.** 96 см. **76.** 32 см. **77.** а) 30°; 75°; 75°; б) 60°; 60°; 60°. **82.** 180°. **83.** 54 см. **84.** 72 см. **85.** 24 см. **87.** 6 см. **89.** 84 см. **94.** Указание: в $\triangle KBM$ проведите высоту BH. **95.** 18 см. **96.** 7. **97.** 39 см. **98.** 36 см. **99.** 37 см. **100.** 63 см. **102.** 40 см. **103.** 45°. **104.** 9 см; 32 см. **105.** а) 24 м; б) 98 м. **109.** 64 см. **110.** а) 22 см; б) 64°. **113.** 6 см. **114.** 36°. **115.** $MK = 4$ см, $AM = 8$ см, $CM = 7$ см, $CP = 10{,}5$ см. **116.** 32 см. **117.** 32 см. **119.** 93 см. **121.** 16 см. **122.** 63 см. **125.** $\angle B = 110°$, $\angle D = 50°$, $MN = 19$ см. **126.** 120°. **127.** а) 140°; б) 4 : 3. **128.** а) 36 см; б) 102 см. **129.** а) 12 см, 8 см; б) 7 см, 3 см. **130.** 74 см. **131.** а) 19 см; б) 15 см; в) 4 см. **132.** а) 36 см; б) 52 см. **133.** 10 см. **134.** 8 см. **136.** 2 см. **137.** 8 см. **138.** 3 см. **139.** $\angle A = \angle D = 60°$; $\angle B = \angle C = 120°$. **141.** 90°. **144.** а) 18 см; б) 16 см. **145.** 54,8 см. **148.** 29°. **149.** 16 см. **150.** а) 9 см; б) 9,5 см; в) 15 см. **151.** 3 см. **152.** 8 см.

Глава II

156. а) 82 см^2; б) 396 см^2; в) 21 см^2. **157.** 4 см и 6 см. **159.** а) 46 дм; б) 72 м^2. **160.** 45 см^2. **162.** а) 28 см^2; б) 42 см. **163.** 24 см^2. **164.** 35 см^2. **165.** а) В 9 раз; б) в 4 раза. **166.** На 21 %. **167.** 15. **170.** а) 60 см^2; б) 28 см^2; в) 48 см^2. **171.** а) 5 м; б) 72 см^2. **172.** а) 36 см; б) 48 см. **173.** 35 см^2. **174.** 9 см. **175.** 12. **176.** а) 54 см; б) 72 см^2. **177.** 48. **178.** 153 см^2. **179.** 48 см^2. **180.** 56 см^2. **181.** 96 см^2. **182.** 90 см^2. **183.** 27 см^2. **185.** а) 12 см^2; б) 17,5 см^2; в) 12,5 см^2. **186.** 16 см. **187.** а) 17 см^2; б) 6 см^2. **188.** а) 12 см; б) 3 м. **190.** 64 см^2. **191.** а) 60 см^2; б) 12 см. **192.** 3 : 8. **193.** 120 см. **194.** а) 30 см^2; б) 10 см^2; в) 20 см^2; г) 20 см^2. **195.** 15 кв. ед. **196.** а) 15 см; б) 24 см. **198.** 128 см^2. **200.** 6 см. **201.** 120 см, 60 см, 80 см. **202.** 50 см^2. **203.** 60°. **205.** а) 15 см; б) $\sqrt{5}$ см; в) 5 дм; г) 4 м. **206.** а) 8 см; б) 7 м; в) $3\sqrt{3}$ см; г) $\sqrt{10}$ дм. **207.** 60 см^2. **208.** 54 см^2. **209.** а) 336 см^2; б) 120 см^2. **210.** 225 см^2. **211.** а) Да; б) нет; в) да. **212.** а) 24 см^2; б) 2,4 дм^2; в) 2 м^2. **213.** а) $2\sqrt{3}$ см, $4\sqrt{3}$ см^2; б) 24 см, $4\sqrt{3}$ см. **214.** а) 6000 м^2; б) 168 дм^2; в) $\frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{4}$. **215.** а) 9 м, 12 м; б) 24 см^2. **216.** а) 12; б) 20. **217.** а) 144; б) 14,4. **219.** а) 8 см^2; б) 10 см. **220.** 11,2 см. Указание: смотрите ключевую задачу **4**. **221.** 15 см. **223.** 24 см^2. **224.** 8 см^2. Указание: из основания любой медианы (середины стороны) проведите прямую, параллельную одной из оставшихся медиан. Рассмотрите треугольник, ограниченный этой прямой и двумя медианами. **225.** 9,6 см. **226.** 5. **228.** а) 69 см^2; б) 12 см; в) 14 см. **229.** а) 350 см^2; б) 12 см^2. **230.** 270 см^2. **231.** а) 6 см; б) 4 см. **232.** 77 см^2. **233.** 28 см^2. **234.** 128 см^2. **235.** а) $42\sqrt{3}$ см^2; б) $24\sqrt{3}$ см^2. **236.** а) 18 см^2; б) 13,2 см^2. **237.** а) $50\sqrt{5}$ см^2; б) 30 см^2. **238.** 8 см и 128 см^2. **239.** а) 42; б) 38. **240.** 36 см^2. **241.** 1 : 2. **242.** 80 см^2. **243.** 16 см^2. **244.** 48 см^2. **245.** $\frac{1}{6}$. **246.** 25 %. **247.** 30 см^2. **249.** Указание: воспользуйтесь тем, что средняя линия отсекает от данного треугольник, площадь которого равна $\frac{1}{4}$ площади данного. **250.** 48 см^2. **251.** $\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)^2$. **252.** 80 см^2. **253.** Указание: составьте из 8 полученных треугольников параллелограмм (смотрите задания на с. 29). **255.** 36 см^2. **256.** 63 см^2. **257.** Указание: смотрите ключевую задачу **4**. **259.** Указание: проведите через точку F прямые, параллельные сторонам треугольника. Рассмотрите полученные параллелограммы и равносторонние треугольники.

Глава III

261. а); б). **262.** а) 20 см; б) 2,4 см; в) 32 см. **263.** а) 6 см, 4,5 см; б) 44 см. **264.** а) 8 см, 18 см, 6 см; б) 28 см. **265.** а) 9 см; б) 9 см. **266.** а) 20 см; б) 54 см; в) 15 см; г) 14 см. **268.** 22 см. **269.** 120 см^2. **270.** 24 см^2. Указание: найдите S_{ABP}, отношение $BB_1 : B_1A_1 : A_1P$, S_{AA_1P}, S_{ABA_1}, S_{MBB_1}, $S_{AMB_1A_1}$. **272.** а) $BC = 12$ см, $A_1C_1 = 8$ см; б) $AC = 19{,}6$ см, $AB = 15$ см. **273.** а) 44 см; б) 31 см. **274.** а) 60°; б) 30°; в) 7 см; г) 6 см^2. **275.** 9 м. **276.** 6 см. **277.** 28 см. **278.** 38°. **279.** 12 см. **280.** 4 см. **283.** 4 см; 8 см. **284.** 2 : 5. **285.** 9 : 7. **286.** 12 см. **287.** 14 см. **288.** а) 9 см и 24 см; б) 8 см и 9 см. **291.** При $A_1C_1 = 5$ треугольники подобны по двум сторонам и углу между ними (2-й признак подобия). **292.** $\triangle FGE \backsim \triangle KMN$ по трем сторонам (3-й признак подобия). **293.** а) 10,5 см; б) 45 см. **295.** $P_{ABC} : P_{KNM} = 3 : 2$. **296.** а) 78 см; б) 12 см. **297.** 3,75 см. **299.** 96 см^2. **300.** а) 4 см; б) 12 см; в) 9 см. **303.** 96 см^2. **304.** 48 см. **305.** 7 см. **306.** 5 см. **307.** 20 см. **308.** а) 4; б) 6; в) 12. **310.** а) 6; б) 9. **312.** а) 3 см; б) 9 см. **313.** а) 12 м; б) 1 см и 3 см; в) 8 см. **314.** а) 30 см; б) 1120 м. **315.** 21 см. Указание: воспользуйтесь тем, что соответствующие высоты в подобных треугольниках относятся как их соответствующие стороны. Обозначьте $MN = FH = x$, $BF = 30 - x$ и составьте пропорцию. **316.** 20 см^2. Указание: продлите отрезок AM до пересечения с прямой BC в точке N и рассмотрите две пары подобных треугольников: AMD и NMC, BPN и KPA. **318.** а) 4 см; б) 10 см; в) 32 см. **319.** 21 см. **320.** 4 см. **321.** 3 см; 4 см. **322.** $3\sqrt{5}$ см. **323.** 76°. **324.** 75 см^2. **326.** а) Увеличится в 4 раза; б) увеличится в 9 раз; в) увеличится в 6,25 раза; г) уменьшится в 100 раз. **327.** 40 см^2. **328.** а) 4 : 9; б) 8 : 5. **329.** 1 : 9. **330.** 40 см^2. **331.** $9\frac{3}{8}$ м^2. **332.** 160 см^2. **333.** 18 м^2. **334.** а) 24 см^2; б) $2\sqrt{S_1S_2}$; в) $\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$. **335.** а) 96 см^2; б) $\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$. **336.** 24 см^2. **337.** $\frac{1}{3}$. **338.** 8 см^2. **339.** 30 см^2. **340.** 10 см. Указание: воспользуйтесь подобием треугольников ABH и BCH и теоремой о площадях подобных треугольников. **341.** 6 см^2. **342.** $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$. **344.** 4. **345.** 21. **346.** 15. **347.** 4. **348.** 5. **349.** 60 см^2. **350.** $12\sqrt{3}$.

Глава IV

352. а) 50°; б) 55°; в) 31°. **353.** а) 62°; б) 150°; в) 8 см. **354.** а) 150°; б) 6 см. **355.** 24 см. **356.** 99°. **357.** а) 5 см; б) 9 см^2. **358.** 6 см. **360.** 24 см. **361.** 8, 10. **362.** 5 кв. ед. **365.** Серединный перпендикуляр к отрезку AB.

366. а) Пересекаются; б) касаются внешним образом; в) расположены внешним образом. **367.** 11 м. **368.** 280 см. **369.** 24 см^2. **370.** 4 см. **371.** 6 м. **372.** 8 м. **373.** 9 см. **375.** 53°. **376.** 1,44 см и 36 см. **377.** 6 см. **381.** а) $\smile AC = 80°$, $\angle ABC = 40°$; б) $\smile AC = 100°$, $\smile BC = 80°$; в) $\smile AB = 116°$. **382.** а) 24 см; б) $24\sqrt{2}$ см; в) 48 см; г) 24 см. **383.** а) 45°; б) 30°; в) 42°. **384.** 102°, 102°, 156°. **385.** а) 64°; б) 42°8′; 21°4′; в) 40°; 80°; 80°. **386.** 140°. **387.** 84°. **388.** 100°. **389.** а) 6 см; б) 26 см; в) 7 см. **391.** а) $4\sqrt{3}$ см^2; б) 32 см^2. **392.** 26°. **393.** 52°. **394.** 30°. **395.** б) 18 см; в) 60 см^2. **396.** $18\sqrt{3}$ см^2. **398.** 40°. **399.** Указание: проведите отрезки AC и BD. **400.** Указание: проведите из центра окружности перпендикуляры к указанным хордам. **401.** а) 70°; б) 130°; в) 110°. **402.** а) 40°; б) 37°30′; в) 80°. **403.** 72°. **404.** 40°. **405.** 50°. **406.** 78°. **407.** 52°. **408.** 65°. **409.** а) 88°; б) 28°. **411.** 60°. **412.** а) Указание: выразите градусные меры углов BAN и CAN через градусные меры дуг, заключенных внутри этих углов. **414.** 4 см. **415.** 12 см. **416.** 22 см. **417.** 6 см. **418.** 6,5 см. **419.** 8 см. **420.** 1 см. **421.** 42 см. **422.** 6 см.