

**3.156.** Даўжыню ўчастка павялічылі на 10 %, а шырыню паменшылі на некалькі працэнтаў. У выніку плошча ўчастка паменшылася на 1 %. Знайдзіце, на колькі працэнтаў паменшылі шырыню ўчастка.

**3.157.** Знайдзіце значэнне выразу

$$(\sqrt{17} + 2)^2 - (5 - \sqrt{17})^2 - 14\sqrt{17}.$$

**3.158.** Скараціце дроб  $\frac{(1-2a)^2}{2a^2+9a-5}$ .

**3.159.** Функцыя зададзена формулай  $y = -7x + 2$ . Запішыце ўраўненне няцотнай функцыі, графік якой паралельны графіку дадзенай функцыі.

### § 13. Дробава-рацыянальныя няроўнасці. Метад інтэрвалаў для рашэння рацыянальных няроўнасцей

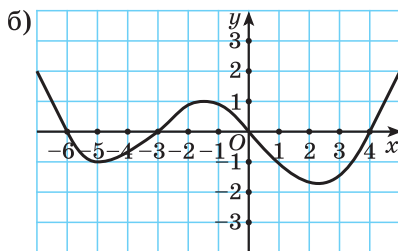
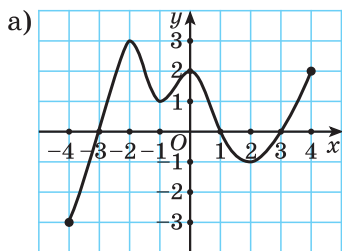


**3.160.** Рашыце няроўнасць  $x^2 - 1 < 0$ .

**3.161.** Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі

$$y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}.$$

**3.162.** Вызначце прамежкі знакапастаянства функцыі  $y = f(x)$ , зададзенай графічна (рыс. 79).



Рыс. 79



**Разгледзім задачу.** Лодка прайшла па цячэнні ракі 5 км і вярнулася назад, затраціўшы на ўвесь шлях не больш за 1 г. Якая найменшая магчымая скорасць лодкі, калі скорасць цячэння ракі роўна  $3 \frac{\text{км}}{\text{г}}$ ?

*Рашэнне.* Абазначым праз  $x \frac{\text{км}}{\text{г}}$  уласную скорасць лодкі.

Складзём табліцу залежнасцей паміж велічынямі.

| Працэс                         | Скорасць, $\frac{\text{км}}{\text{г}}$ | Адлегласць, км | Час, г                  |
|--------------------------------|----------------------------------------|----------------|-------------------------|
| Рух лодкі па цячэнні ракі      | $x + 3$                                | 5              | $t_1 = \frac{5}{x + 3}$ |
| Рух лодкі супраць цячэння ракі | $x - 3$                                | 5              | $t_2 = \frac{5}{x - 3}$ |

Па ўмове задачы на ўвесь шлях лодка затраціла не больш за 1 г. Складзём матэматычную мадэль:  $\frac{5}{x+3} + \frac{5}{x-3} \leq 1$ .

Атрыманая ў ходзе рашэння задачы няроўнасць  $\frac{5}{x+3} + \frac{5}{x-3} \leq 1$  з'яўляецца рацыянальнай.

**Рацыянальнай** называецца няроўнасць, у левай і правай частках якой — рацыянальныя выразы.

Разгледзім адзін з метадаў рашэння рацыянальных няроўнасцей — метада інтэрвалаў. Гэты метада заснаваны на выкарыстанні графіка функцыі.

Няхай трэба рашыць няроўнасць  $f(x) \geq 0$ , дзе  $y = f(x)$  — функцыя, графік якой паказаны на рысунку 80. Для рашэння няроўнасці  $f(x) \geq 0$  дастаткова знайсці значэнні аргумента, пры якіх значэнні функцыі  $f(x)$  неадмоўныя, г. зн. пры якіх графік функцыі ляжыць не ніжэй за вось абсцыс. Гэта прамежкі  $[-6; -2]$  і  $[2; 8]$ . Значыць, усе рашэнні няроўнасці

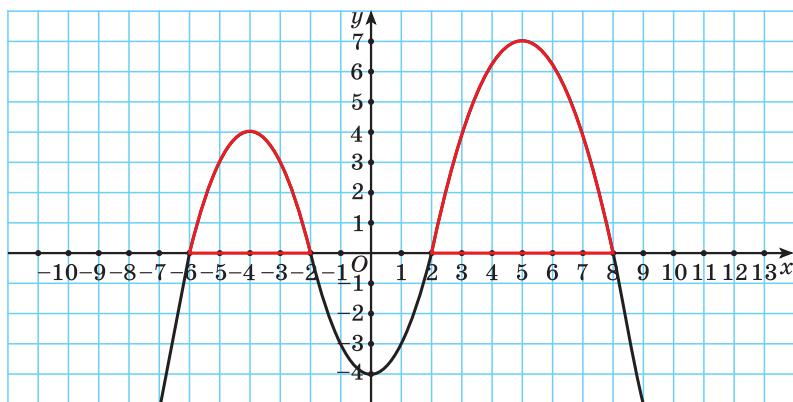
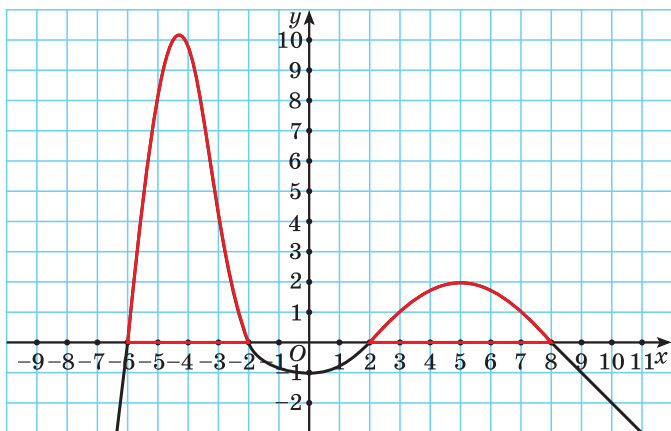


Рис. 80



Рыс. 81

$f(x) \geq 0$  — гэта ўсе значэнні зменнай  $x$ , што належаць аб'яднанню мностваў  $x \in [-6; -2] \cup [2; 8]$ .

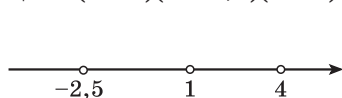
Заўважым, што такія ж рашэнні мае няроўнасць  $g(x) \geq 0$ , дзе  $y = g(x)$  — функцыя, графік якой паказаны на рысунку 81, паколькі значэнні функцыі  $y = g(x)$  неадмоўныя пры тых жа значэннях зменнай, што ў функцыі  $y = f(x)$ .

Такім чынам, для прымянення метаду інтэрвалаў да рашэння няроўнасці дастаткова пабудаваць схему графіка функцыі, на якой адлюстраваны толькі некаторыя (неабходныя для рашэння няроўнасці) уласцівасці функцыі: яе абсяг вызначэння, нулі і прамежкі знакапастаянства.

*Прыклад 1.* Рашыце няроўнасць

$$(x - 1)(x + 2,5)(x - 4) < 0.$$

*Рашэнне.* Разгледзім функцыю  $f(x) = (x - 1)(x + 2,5)(x - 4)$ . Пабудуем схему графіка гэтай функцыі, па якой вызначым яе прамежкі знакапастаянства. Для гэтага знойдзем пункты перасячэння графіка з воссю абсцыс, г. зн. нулі гэтай функцыі:  $(x - 1)(x + 2,5)(x - 4) = 0$  пры  $x = 1$ ;  $x = -2,5$ ;  $x = 4$ .



Рыс. 82

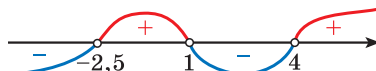
Адзначым нулі функцыі на восі абсцыс (рыс. 82). Паколькі дадзеная няроўнасць строгая, то нулі функцыі адзначым на восі пустымі пунктамі.

Нулі функцыі падзялілі вось на чатыры прамежкі. Вызначым, вышэй ці ніжэй за вось абсцыс ляжыць графік функцыі ў кожным з атриманых прамежкаў.

Паколькі справа ад пункта 4 кожны з трох множнікаў здабытку  $(x-1)(x+2,5)(x-4)$  прымае дадатныя значэнні, то пры  $x \in (4; +\infty)$  графік функцыі  $f(x) = (x-1)(x+2,5)(x-4)$  ляжыць вышэй за вось абсцыс.

Пры пераходзе праз кожны з адзначаных пунктаў знак функцыі  $f(x)$ , а значыць, і становішча графіка адносна восі абсцыс змяняецца, паколькі змяняецца знак аднаго з множнікаў.

Пабудуем схему графіка функцыі  $f(x) = (x-1)(x+2,5)(x-4)$  (рыс. 83).



Рыс. 83

Пры  $x \in (-\infty; -2,5) \cup (1; 4)$  пабудаваная кривая ляжыць ніжэй за вось абсцыс. Гэта аб'яднанне інтэрвалаў з'яўляецца мноствам рашэнняў дадзенай няроўнасці.

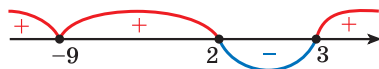
*Адказ:*  $x \in (-\infty; -2,5) \cup (1; 4)$ .

*Прыклад 2.* Рашыце няроўнасць

$$(x+9)^2(x-2)(x-3) \leq 0.$$

*Рашэнне.* Разгледзім функцыю  $h(x) = (x+9)^2(x-2)(x-3)$ . Знайдзем яе нулі:  $(x+9)^2(x-2)(x-3) = 0$  пры  $x = -9$ ;  $x = 2$ ;  $x = 3$ . Паколькі няроўнасць нястрогая, то нулі функцыі з'яўляюцца рашэннямі дадзенай няроўнасці, таму ўключым іх у мноства рашэнняў няроўнасці і адзначым на восі абсцыс зафарбаванымі пунктамі (рыс. 84).

Затым вызначым становішча графіка функцыі ў кожным з чатырох атрыманых прамежкаў. Справа ад пункта 3 кожны з трох множнікаў здабытку  $(x+9)^2(x-2)(x-3)$  прымае дадатныя значэнні, значыць, графік функцыі ляжыць вышэй за вось абсцыс. Пры пераходзе праз пункты 3 і 2 становішча графіка змяняецца, паколькі змяняецца знак аднаго з множнікаў  $(x-3)$  або  $(x-2)$ . Пры пераходзе праз пункт  $-9$  становішча графіка не змяняецца, паколькі множнік  $(x+9)^2$  прымае неадмоўныя значэнні пры ўсіх  $x \in \mathbb{R}$ .



Рыс. 84

Пабудуем схему графіка функцыі (гл. рыс. 84) і запішам рашэнне няроўнасці ў адпаведнасці з яе знакам:  $x \in \{-9\} \cup [2; 3]$ .

*Адказ:*  $\{-9\} \cup [2; 3]$ .

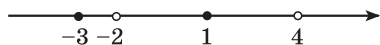


Калі ў множніку  $(x - a)^n$  лік  $n$  — цотны, то пры пераходзе праз пункт  $a$  становішча графіка адносна восі абсцыс не змяняецца, а калі лік  $n$  — няцотны, то змяняецца.

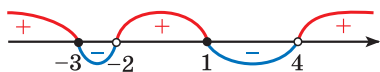
**Прыклад 3.** Рашыце няроўнасць  $\frac{(x+3)(x-1)}{(x-4)(x+2)} \geq 0$ .

**Рашэнне.** Разгледзім функцыю  $g(x) = \frac{(x+3)(x-1)}{(x-4)(x+2)}$ .

Адзначым на восі абсцыс нулі гэтай функцыі (лікі  $-3$  і  $1$ ) і тыя значэнні зменнай, якія не ўваходзяць у абсяг вызначэння функцыі  $g(x) = \frac{(x+3)(x-1)}{(x-4)(x+2)}$  (гэта лікі  $-2$  і  $4$  — значэнні зменнай, пры якіх назоўнік дроби ператвараецца ў нуль (нулі назоўніка) (рыс. 85).



Рыс. 85



Рыс. 86

Паколькі няроўнасць нястрогая, то нулі функцыі з'яўляюцца рашэннямі няроўнасці (на восі абсцыс — зафарбаваныя пункты  $-3$  і  $1$ ). Нулі назоўніка не з'яўляюцца рашэннямі няроўнасці (на восі абсцыс — пустыя пункты  $-2$  і  $4$ ).

Пабудуем схему графіка (рыс. 86). Становішча графіка адносна восі абсцыс змяняецца пры пераходзе праз кожны пункт. Па схеме графіка ў адпаведнасці са знакам няроўнасці запішам яе рашэнне:  $x \in (-\infty; -3] \cup (-2; 1] \cup (4; +\infty)$ .

**Адказ:**  $(-\infty; -3] \cup (-2; 1] \cup (4; +\infty)$ .



**Для таго каб рашыць рацыянальную няроўнасць метадам інтэрвалаў, трэба:**

① Прывесці няроўнасць да выгляду  $f(x) > 0$ ,  $f(x) < 0$ ,  $f(x) \geq 0$  або  $f(x) \leq 0$ .

② Знайсці і адзначыць на восі абсцыс нулі функцыі і значэнні зменнай, пры якіх значэнні функцыі не існуюць (нулі назоўніка).

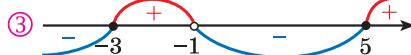
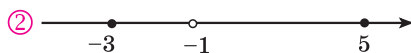
③ Пабудаваць схему графіка функцыі.

④ Запісаць адказ у адпаведнасці са знакам няроўнасці.

Рашыце няроўнасць  $\frac{(x+3)(x-5)}{x+1} \geq 0$ .

① Няроўнасць мае выгляд  $f(x) \geq 0$ ,

дзе  $f(x) = \frac{(x+3)(x-5)}{x+1}$ .



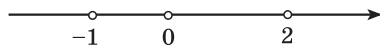
④ **Адказ:**  $x \in [-3; -1) \cup [5; +\infty)$ .

**Прыклад 4.** Рашыце няроўнасць  $\frac{x(x-2)}{(x+1)^4} > 0$ .

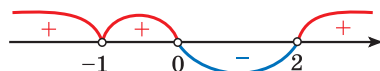
*Рашэнне.*

① Няроўнасць мае выгляд  $f(x) > 0$ , дзе  $f(x) = \frac{x(x-2)}{(x+1)^4}$ .

② Знойдзем нулі функцыі (лікі 0; 2) і, паколькі знак няроўнасці строгі, адзначым іх на восі абсцыс пустымі пунктамі. Знойдзем значэнне зменнай, пры якім значэнні функцыі не існуюць, — нуль назоўніка (лік -1) і адзначым яго на восі абсцыс пустым пунктам (рыс. 87).



Рыс. 87



Рыс. 88

③ Пабудуем схему графіка функцыі, пры гэтым улічым, што пры пераходзе праз пункт -1 становішча графіка адносна восі не змяняецца, а пры пераходзе праз пункты 0 і 2 змяняецца (рыс. 88).

④ *Адказ:*  $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (2; +\infty)$ .



Для таго каб графік у першым правым прамежку ляжаў вышэй за вось абсцыс, трэба множаннем абедзвюх частак няроўнасці на -1 атрымаць дадатныя каэфіцыенты перад зменнай у лінейных множніках.

**Прыклад 5.** Рашыце няроўнасць  $\frac{(x-4)^2(3-x)}{x+1} \geq 0$ .

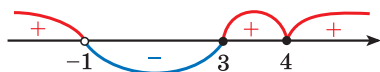
*Рашэнне.* Для таго каб усе каэфіцыенты перад зменнымі ў лінейных множніках былі дадатнымі, памножым абедзве часткі няроўнасці  $\frac{(x-4)^2(3-x)}{x+1} \geq 0$  на -1 і атрымаем няроўнасць  $\frac{(x-4)^2(x-3)}{x+1} \leq 0$ .

① Няроўнасць мае выгляд  $f(x) \leq 0$ , дзе  $f(x) = \frac{(x-4)^2(x-3)}{x+1}$ .

② Знойдзем нулі функцыі (лікі 3 і 4) і, паколькі знак няроўнасці нястрогі, адзначым іх на восі абсцыс зафарбаванымі пунктамі. Знойдзем значэнне зменнай, пры якім значэнне функцыі не існуе (лік -1), і адзначым яго на восі абсцыс пустым пунктам (рыс. 89).



Рыс. 89



Рыс. 90

③ Пабудуем схему графіка функцыі, пры гэтым улічым, што пры пераходзе праз пункт 4 становішча графіка адносна восі

не змяняецца, а пры пераходзе праз пункты  $-1$  і  $3$  змяняецца (рыс. 90).

④ Адказ:  $x \in (-1; 3] \cup \{4\}$ .



### Рацыянальныя няроўнасці

1. Якія з наступных няроўнасцей з'яўляюцца рацыянальнымі:

а)  $(x-2)(x+3) < 0$ ;

б)  $3x+2 \geq x-1$ ;

в)  $\sqrt{x-1}\sqrt{x+1} > 0$ ;

г)  $\frac{(x-2)(x-3)}{x-5} > 3$ ?

Няроўнасці а), б), г) — рацыянальныя, паколькі ў левай і правай частках гэтых няроўнасцей — рацыянальныя выразы. Няроўнасць в) не з'яўляецца рацыянальнай, паколькі змяшчае ірацыянальныя выразы са зменнай.

### Метад інтэрвалаў для рашэння рацыянальных няроўнасцей

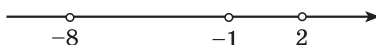
2. Рашыце няроўнасць:

а)  $(x-2)(x+1)(x+8) < 0$ ;

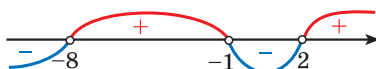
б)  $(x-1)^2(9-x^2) \leq 0$ .

а) ① Няроўнасць мае выгляд  $f(x) < 0$ , дзе  $f(x) = (x-2)(x+1)(x+8)$ .

② Нулямі функцыі з'яўляюцца лікі  $-8$ ;  $-1$  і  $2$ . Паколькі знак няроўнасці строга, адзначым іх на восі абсцыс пустымі пунктамі.



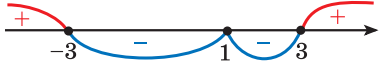
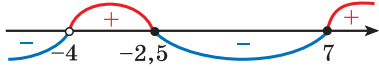
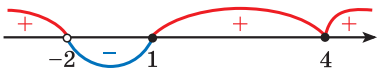
③ Пабудуем схему графіка функцыі. Пры пераходзе праз кожны з пунктаў  $-8$ ;  $-1$  і  $2$  становішча графіка адносна восі змяняецца.

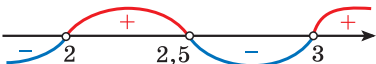


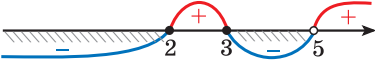
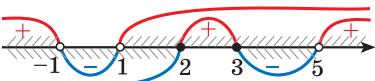
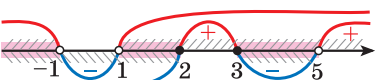
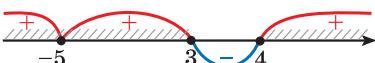
④ Адказ:  $x \in (-\infty; -8) \cup (-1; 2)$ .

б) Памножым абедзве часткі дадзенай няроўнасці на  $-1$  і атрымаем няроўнасць  $(x-1)^2(x^2-9) \geq 0$ , якую запішам у выглядзе  $(x-1)^2(x-3)(x+3) \geq 0$ .

Нулямі функцыі  $f(x) = (x-1)^2(x-3)(x+3)$  з'яўляюцца лікі  $-3$ ;  $1$  і  $3$ . Паколькі знак

|                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                | <p>няроўнасці нястрогі, то на восі абсцыс лікі <math>-3</math>; <math>1</math> і <math>3</math> адзначым зафарбаванымі пунктамі. Пабудуем схему графіка функцыі.</p>  <p>Пры пераходзе праз пункт <math>1</math> становішча графіка адносна восі не змяняецца, а пры пераходзе праз пункты <math>-3</math> і <math>3</math> — змяняецца.</p> <p>Адказ: <math>x \in (-\infty; -3] \cup \{1\} \cup [3; +\infty)</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| <p>3. Рашыце няроўнасць:</p> <p>а) <math>\frac{(2x+5)(x-7)}{x+4} \leq 0</math>;</p> <p>б) <math>\frac{(1-x)^3(x-4)^2}{3x+6} \leq 0</math>.</p> | <p>а) Нулямі функцыі <math>f(x) = \frac{(2x+5)(x-7)}{x+4}</math> з'яўляюцца лікі <math>-2,5</math> і <math>7</math>. Паколькі знак няроўнасці нястрогі, то адзначым іх на восі абсцыс зафарбаванымі пунктамі. Нулём назоўніка з'яўляецца лік <math>-4</math>. Адзначым яго пустым пунктам.</p> <p>Пабудуем схему графіка функцыі.</p>  <p>Адказ: <math>x \in (-\infty; -4) \cup [-2,5; 7]</math>.</p> <p>б) Памножым абедзве часткі няроўнасці на <math>-1</math> і атрымаем няроўнасць</p> $\frac{(x-1)^3(x-4)^2}{3x+6} \geq 0.$ <p>Нулямі функцыі <math>f(x) = \frac{(x-1)^3(x-4)^2}{3x+6}</math> з'яўляюцца лікі <math>1</math> і <math>4</math>. Паколькі знак няроўнасці нястрогі, то адзначым іх на восі абсцыс зафарбаванымі пунктамі. Нулём назоўніка з'яўляецца лік <math>-2</math>. Адзначым яго пустым пунктам.</p> <p>Пабудуем схему графіка функцыі. Пры пераходзе праз пункт <math>4</math> становішча графіка адносна восі не змяняецца.</p>  <p>Адказ: <math>(-\infty; -2) \cup [1; +\infty)</math>.</p> |
| <p>4. Рашыце няроўнасць</p> $\frac{4x}{x-2} < \frac{11}{2-x}.$                                                                                 | <p>Запішам няроўнасць у выглядзе:</p> $\frac{4x}{x-2} - \frac{11}{2-x} < 0 \Leftrightarrow \frac{4x}{x-2} + \frac{11}{x-2} < 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{4x+11}{x-2} < 0.$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |

|                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|-----------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                   | <p>Нулём функцыі <math>f(x) = \frac{4x+11}{x-2}</math> з'яўляецца лік <math>-2,75</math>. Паколькі знак няроўнасці строгі, то адзначым яго на восі абсцыс пустым пунктам. Нулём назоўніка з'яўляецца лік <math>2</math>. Адзначым яго на восі абсцыс пустым пунктам. Пабудуем схему графіка функцыі.</p>  <p>Адказ: <math>x \in (-2,75; 2)</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <p>5. Рашыце няроўнасць</p> $\frac{x}{x^2-5x+6} + \frac{3}{x-2} > \frac{2}{x-3}.$ | <p>Прывядзём няроўнасць да выгляду:</p> $\frac{x}{x^2-5x+6} + \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-3} > 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{x}{(x-2)(x-3)} + \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-3} > 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{x+3(x-3)-2(x-2)}{(x-2)(x-3)} > 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{2x-5}{(x-2)(x-3)} > 0.$ <p>Адзначым на восі абсцыс нуль функцыі</p> $f(x) = \frac{2x-5}{(x-2)(x-3)}, \text{ г. зн. } x=2,5, \text{ і тыя}$ <p>значэнні зменнай, пры якіх значэнні функцыі не існуюць: <math>x=2</math> і <math>x=3</math>. Пабудуем схему графіка функцыі.</p>  <p>Адказ: <math>x \in (2; 2,5) \cup (3; +\infty)</math>.</p> |
| <p>6. Знайдзіце абсяг значэння функцыі</p> $y = \sqrt{\frac{x^3-7x^2+12x}{x-4}}.$ | <p>Паколькі функцыя <math>y = \sqrt{t}</math> вызначана для <math>t \geq 0</math>, то рэшым няроўнасць</p> $\frac{x^3-7x^2+12x}{x-4} \geq 0.$ <p>Дадзеная няроўнасць раўназначна няроўнасці</p> $\frac{x(x^2-7x+12)}{x-4} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-4)(x-3)}{x-4} \geq 0.$ <p>Для знаходжання нулёў функцыі</p> $f(x) = \frac{x(x-4)(x-3)}{x-4}$ <p>выкарыстаем умову роўнасці дробу нулю:</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |

|                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                        | $\frac{x(x-4)(x-3)}{x-4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 3, \\ x = 4, \\ x - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 3. \end{cases}$ <p>Пры <math>x = 4</math> значэнне функцыі не існуе. Пабудуем схему графіка функцыі. Пры пераходзе праз пункт 4 становішча графіка адносна восі не змяняецца, паколькі множнік <math>(x - 4)</math> уваходзіць і ў лічнік, і ў назоўнік, а пры пераходзе праз пункты 0 і 3 становішча графіка змяняецца.</p>  <p><math>D(y) = (-\infty; 0] \cup [3; 4) \cup (4; +\infty).</math></p> |
| <p>7. Рашыце сістэму няроўнасцей</p> $\begin{cases} \frac{(x-2)(x-3)}{x-5} \leq 0, \\ (x-1)(x+1) > 0. \end{cases}$     | <p>Адзначым на восі абсцыс мноства рашэнняў першай няроўнасці сістэмы.</p>  <p>Адзначым на гэтай жа восі мноства рашэнняў другой няроўнасці сістэмы.</p>  <p>Знойдзем перасячэнне мностваў рашэнняў.</p>  <p>Адказ: <math>x \in (-\infty; -1) \cup (1; 2] \cup [3; 5).</math></p>                                                                                                            |
| <p>8. Знайдзіце рашэнне сукупнасці няроўнасцей</p> $\begin{cases} (x-3)(x-4)(x+5)^2 \geq 0, \\ 2x-12 < 0. \end{cases}$ | <p>Адзначым на восі абсцыс мноства рашэнняў першай няроўнасці сукупнасці.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |

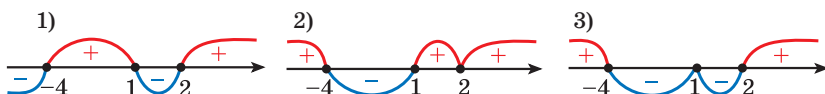
|  |                                                                                                                                                                                    |
|--|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | <p>Адзначым на гэтай жа восі мноства рашэнняў другой няроўнасці сукупнасці.</p> <p>Знойдзем аб'яднанне мностваў рашэнняў.</p> <p>Адказ: <math>x \in (-\infty; +\infty)</math>.</p> |
|--|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**?** Устаноўце адпаведнасць паміж няроўнасцю і схемай графіка функцыі, якая адпавядае рашэнню няроўнасці (рыс. 91):

а)  $(x-1)(x+4)(x-2) \leq 0$ ;

б)  $(x-1)^2(x+4)(x-2) \geq 0$ ;

в)  $(x-1)(x+4)^3(x-2)^4 \leq 0$ .



Рыс. 91



**3.163.** Рашыце няроўнасць, прымяніўшы метады інтэрвалаў:

а)  $(x+2)(x-7)(x-10) > 0$ ;

б)  $(3x+7)(x+6)(x-5) < 0$ ;

в)  $x(2x-15)(x-8) \geq 0$ ;

г)  $3x(4x+7)(3x-2) \leq 0$ .

**3.164.** Рашыце няроўнасць метадамі інтэрвалаў, выкарыстаўшы алгарытм:

а)  $\frac{x-4}{x-1} > 0$ ;

б)  $\frac{x+6}{x-2} < 0$ ;

в)  $\frac{x+10}{x+12} \geq 0$ ;

г)  $\frac{3x-9}{x+5} \leq 0$ ;

д)  $\frac{7x-2}{x-3} > 0$ ;

е)  $\frac{6x+12}{x} \leq 0$ .

**3.165.** Знайдзіце ўсе значэнні зменнай, пры якіх:

а)  $(3-x)(x-1)(x+6) \leq 0$ ;

б)  $(x-10)(2x+9)(7-2x) \geq 0$ ;

в)  $(7-x)(5-x)(3x-10) < 0$ ;

г)  $-(5-2x)(4-x)(5x-1) > 0$ .

**3.166.** Рашыце няроўнасць, выкарыстаўшы алгарытм рашэння няроўнасці метадам інтэрвалаў:

а)  $\frac{(x+1)(x-6)}{x-2} < 0;$

б)  $\frac{3x+8}{(x-3)(x+5)} > 0;$

в)  $\frac{x(7x-3)}{x+6} \leq 0;$

г)  $\frac{5x(x-4)}{(2x+3)(x-7)} \geq 0;$

д)  $\frac{(5-x)(x+4)}{x-3} > 0;$

е)  $\frac{(x-7)(5x+2)}{3-2x} < 0;$

ж)  $\frac{x(3-x)}{(1-8x)(x+12)} \geq 0;$

з)  $\frac{(8-3x)(5-x)}{(x-4)(9-2x)} \leq 0.$

**3.167.** Рашыце няроўнасць двума спосабамі:

а)  $(x-3)(x-5) < 0;$

б)  $(x+7)(x-1) > 0;$

в)  $(x+9)(x+3) \leq 0;$

г)  $(2x-8)(x+6) \geq 0;$

д)  $(3x-1)(x-7) < 0;$

е)  $x(5x+2) \geq 0.$

**3.168.** Рашыце сістэму няроўнасцей:

а)  $\begin{cases} (x-1)(x+2)(x-3) > 0, \\ 2x-5 \leq 0; \end{cases}$

б)  $\begin{cases} \frac{x-5}{x} \leq 0, \\ (x-2)(x-3) > 0; \end{cases}$

в)  $\begin{cases} \frac{x+5}{x-3} < 0, \\ \frac{x+9}{x-8} > 0; \end{cases}$

г)  $\begin{cases} x(x+3)(x-5) > 0, \\ (x+2)(x-6) \leq 0. \end{cases}$

**3.169.** Прымяніце метады інтэрвалаў і рашыце сукупнасць няроўнасцей  $\begin{cases} x(x+4)(2x-1) \geq 0, \\ \frac{x+7}{x-2} \leq 0. \end{cases}$

**3.170.** Рашыце няроўнасць:

а)  $(x-3)^2(x+2) \leq 0;$

б)  $x^2(x-7) < 0;$

в)  $(x-10)(x-5)^2(x+3) \geq 0;$

г)  $(2x+9)(2-x)(x-1)^2 \geq 0.$

**3.171.** Прааналізуйце ўмову і знайдзіце ўсе значэнні аргумента, пры якіх графік функцыі

$$f(x) = (x+9)^4(x-2)^2x^3(x+3)$$

ляжыць ніжэй за вось абсцыс.

**3.172.** Рашыце няроўнасць, выкарыстаўшы алгарытм рашэння няроўнасцей метадам інтэрвалаў:

а)  $\frac{(x-5)^2}{x-3} \leq 0;$

б)  $\frac{x-7}{(x-12)^2} \geq 0;$

$$\text{в)} \frac{6-x}{(x-5)(x-2)^4} < 0; \quad \text{г)} \frac{(x+5)^6}{(1-4x)(x+4)} \geq 0.$$

**3.173.** Рашыце сістэму няроўнасцей:

$$\text{а)} \begin{cases} (x+1)(x-2)(x-4)^2 \geq 0, \\ x^2 - 16 > 0; \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} \frac{(x-2)^2(x+3)}{x-4} \geq 0, \\ x(x-2)(x+5) \geq 0. \end{cases}$$

**3.174.** Знайдзіце ўсе значэнні зменнай, пры якіх значэнне выразу:

- а)  $(x^2 + 4x + 4)(x - 3)$  дадатнае;  
 б)  $(x^2 - 6x + 9)(x^2 - 25)$  адмоўнае;  
 в)  $(25x^2 - 10x + 1)(1 - x^2)$  неаддатнае;  
 г)  $(4x^2 + 12x + 9)(x^2 + 5)$  неадмоўнае.

**3.175.** Рашыце сукупнасць няроўнасцей:

$$\text{а)} \begin{cases} (x^2 - 8x + 16)(x - 5) \geq 0, \\ 5x - 20 < 0; \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} (9x^2 - 6x + 1)(x^2 - 4) < 0, \\ \frac{x-7}{x} \leq 0. \end{cases}$$

**3.176.** Рашыце няроўнасць:

$$\text{а)} \frac{(x^2 - 10x + 25)x}{x^2 - 49} \geq 0; \quad \text{б)} \frac{(x+4)^2 - 8x - 25}{(x-6)^2} > 0;$$

$$\text{в)} \frac{(3-x)(9x^2+1)}{x^2-16} \leq 0; \quad \text{г)} \frac{9x^2-6x+1}{1-4x^2} \leq 0.$$

Праверце, ці з'яўляецца лік 5 рашэннем якой-небудзь з гэтых няроўнасцей.

**3.177.** Рашыце няроўнасць:

$$\text{а)} \frac{(x+2)(x-7)}{4x+8} \leq 0; \quad \text{б)} \frac{x^2-1}{x^2-2x+1} \geq 0;$$

$$\text{в)} \frac{x^2+x-12}{x^2-8x+15} \leq 0; \quad \text{г)} \frac{x^2-4x-21}{x^2-9} \geq 0.$$

**3.178.** Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

$$\text{а)} y = \sqrt{(x^2 - 4x + 3)(x - 2)};$$

$$\text{б)} y = \sqrt{(x^2 + 6x + 5)(1 - x^2)};$$

$$\text{в) } y = \sqrt{\frac{2-x-x^2}{2x+3}}; \quad \text{г) } y = \sqrt{\frac{x^2-6x+8}{x^2-11x+28}}.$$

**3.179.** Рашыце няроўнасць:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \frac{(x-3)^3(x+5)^4}{x^2} < 0; & \text{б) } \frac{7(x-4)(x+3)^2}{(x^2+9)(x+1)^2(x-5)} \leq 0; \\ \text{в) } -\frac{(x^3-8)(x-4)^2(x-6)}{x^2(x^2-9)(x^4+25)} < 0; & \text{г) } \frac{(x+2)(x+3)^5(x-2)^2}{(4-x)(2x+7)} \leq 0. \end{array}$$

Якая з гэтых няроўнасцей змяшчае сярод рашэнняў лікі  $-6$ ;  $2$ ;  $5$ ?

**3.180.** Складзіце план рашэння і знайдзіце найменшае цэлае рашэнне няроўнасці:

$$\text{а) } \frac{1}{x+5} > \frac{x}{x+5}; \quad \text{б) } \frac{x}{x^2-1} \geq \frac{5}{1-x^2}.$$

**3.181.** Рашыце няроўнасць:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \frac{x}{x-1} \geq 3; & \text{б) } \frac{3-x}{2x+5} < 1; & \text{в) } \frac{4x-3}{x} \leq 2; \\ \text{г) } \frac{1}{x-3} < \frac{2}{x+2}; & \text{д) } \frac{5}{x-2} \geq \frac{1}{1-x}; & \text{е) } \frac{8-x}{x-10} \leq \frac{2}{2-x}; \\ \text{ж) } \frac{3}{x-1} > x+1; & \text{з) } x+4 \leq \frac{9}{x+4}. \end{array}$$

**3.182.** Знайдзіце ўсе значэнні зменнай, пры якіх мае сэнс выраз:

$$\text{а) } \sqrt{2 - \frac{x^2+11}{x+5}}; \quad \text{б) } \sqrt{\frac{4}{(x-1)^2} - 1}.$$

**3.183.** Рашыце сістэму няроўнасцей:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} \frac{6}{x} - \frac{6}{x+1} \geq 1, \\ x^2 \leq 9; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 0, \\ \frac{x^2-5x}{x+3} \geq 2. \end{cases} \end{array}$$

**3.184.** Знайдзіце ўсе значэнні зменнай, пры якіх:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \text{сума дробаў } \frac{4}{x+1} \text{ і } \frac{2}{1-x} \text{ меншая за } 1; \\ \text{б) } \text{рознасць дробаў } \frac{x-2}{x-1} \text{ і } \frac{x-1}{x} \text{ большая за } 2; \\ \text{в) } \text{рознасць дробаў } \frac{9}{3-x} \text{ і } \frac{7}{x^2-5x+6} \text{ не меншая за } 1. \end{array}$$

**3.185.** Турысты на маторнай лодцы плануюць праплысці  $15$  км па цячэнні ракі і такую ж адлегласць супраць цячэння, затраціўшы на ўвесь шлях не больш за  $4$  г. Якой можа

быць ўласная скорасць лодкі, калі скорасць цячэння ракі складае  $2 \frac{\text{км}}{\text{г}}$ ?

**3.186.** Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а)  $f(x) = \sqrt{3x^2 - 2x - 5} + \frac{5}{\sqrt{(x-2)(x+3)x}}$ ;

б)  $f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 2x^2}{x+4}} - \sqrt{2x^2 - x + 3}$ .

**3.187\*.** Знайдзіце ўсе значэнні аргумента, пры якіх:

а) графік функцыі  $y = \frac{2x+3}{x^2+x-12}$  ляжыць ніжэй прамой  $y = \frac{1}{2}$ ;

б) графік функцыі  $y = \frac{2x-5}{x^2-6x-7}$  ляжыць вышэй графіка функцыі  $y = \frac{1}{x-3}$ ;

в) прамая  $y = x - 1$  ляжыць не ніжэй графіка функцыі  $y = \frac{x^2 - 5x - 1}{x - 1}$ .

**3.188\*.** Знайдзіце суму цэлых адмоўных лікаў, якія не з'яўляюцца рашэннем няроўнасці  $\frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} < 1$ .

**3.189\*.** Знайдзіце найменшае цэлае рашэнне няроўнасці  $\frac{(x^2 + 2x + 1)(x^2 - 6x + 9)}{x - 3} \geq 0$ .

**3.190\*.** Знайдзіце колькасць цэлых адмоўных рашэнняў няроўнасці  $\frac{3x^2 - 11x + 22}{x^2 - 4x - 5} \geq 3$ .

**3.191\*.** Знайдзіце суму цэлых рашэнняў няроўнасці  $\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^2 - 4x - 5} \leq 0$ .

**3.192\*.** Знайдзіце найменшае цэлае рашэнне няроўнасці

$$\frac{(x^2 - 3x + 7)(x^2 + 4x) - 4(3x - x^2 - 7)}{x^2 - 7x + 6} \leq 0.$$



**3.193.** Рашыце няроўнасць, прымяніўшы метад інтэрвалаў:

а)  $(x+5)(x+1)(x-4) < 0$ ;

б)  $x(2x-11)(3x+6)(x-5) \geq 0$ ;

$$\text{в)} (1-x)(x+8)(4x-3) \leq 0;$$

$$\text{г)} -(3-2x)(8-x)(9-4x) > 0.$$

**3.194.** Рашыце няроўнасць метадам інтэрвалаў, выкарыстаўшы алгарытм:

$$\text{а)} \frac{x-7}{x-3} < 0; \quad \text{б)} \frac{x-9}{x+5} > 0;$$

$$\text{в)} \frac{2x+17}{x+3} \leq 0; \quad \text{г)} \frac{x}{5x+2} \geq 0.$$

**3.195.** Знайдзіце ўсе значэнні зменнай, пры якіх:

$$\text{а)} \frac{(x+2)(x-5)}{x-3} > 0; \quad \text{б)} \frac{2x+15}{(x-1)(x+9)} < 0;$$

$$\text{в)} \frac{x(9x-1)}{x-5} \geq 0; \quad \text{г)} \frac{(8-x)(x+6)}{x-11} \leq 0;$$

$$\text{д)} \frac{x(2-x)}{(1-3x)(x+5)} > 0; \quad \text{е)} \frac{(1-6x)(3-x)}{(7-2x)(x+7)} \leq 0.$$

**3.196.** Рашыце няроўнасць двума спосабамі:

$$\text{а)} (x-2)(x-8) > 0; \quad \text{б)} (x+3)(x-9) \leq 0;$$

$$\text{в)} (3x-6)(x+5) < 0; \quad \text{г)} x(2x-7) \geq 0.$$

$$\text{3.197. Рашыце сістэму няроўнасцей} \begin{cases} \frac{x-8}{3-x} \leq 0, \\ ((x-1)(x-2)(x+7) < 0. \end{cases}$$

$$\text{3.198. Рашыце сукупнасць няроўнасцей} \begin{cases} (x-3)(x+4) > 0, \\ \frac{x+4}{x} \leq 0. \end{cases}$$

**3.199.** Рашыце няроўнасць:

$$\text{а)} (x-5)^2(x+3) \leq 0; \quad \text{б)} x^2(x-9) < 0;$$

$$\text{в)} (x-9)(x-7)^2(x+6) \geq 0; \quad \text{г)} (3x+7)(8-x)(x-2)^2 \geq 0.$$

**3.200.** Рашыце няроўнасць:

$$\text{а)} \frac{(x-6)^2}{x-4} \leq 0; \quad \text{б)} \frac{x-8}{(x-10)^2} \geq 0;$$

$$\text{в)} \frac{(x-8)(9-x)}{(x-5)^2} < 0; \quad \text{г)} \frac{(x+6)^2}{(7-3x)(x+2)} \geq 0.$$

Ці праўда, што лік 10 з'яўляецца рашэннем кожнай няроўнасці; не з'яўляецца рашэннем ніводнай з няроўнасцей?

$$\text{3.201. Рашыце сістэму няроўнасцей} \begin{cases} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-8)^2} \geq 0, \\ x^2 - 3x \geq 0. \end{cases}$$

**3.202.** Знайдзіце ўсе значэнні зменнай, пры якіх значэнне выразу:

а)  $(x^2 - 10x + 25)(x + 7)$  адмоўнае;

б)  $(4x^2 + 4x + 1)(36 - x^2)$  недадатнае.

Выберыце найбольшае цэлае адмоўнае рашэнне кожнай з гэтых няроўнасцей.

**3.203.** Рашыце сукупнасць няроўнасцей

$$\begin{cases} (x^2 + 12x + 36)(x - 1) \geq 0, \\ \frac{x + 6}{x} < 0. \end{cases}$$

**3.204.** Рашыце няроўнасць:

а)  $\frac{(x^2 + 4x + 4)x}{x^2 - 25} \geq 0;$       б)  $\frac{(9 - x^2)(x^2 + 4)}{x^2 - 10x + 25} > 0.$

**3.205.** Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а)  $y = \sqrt{(x^2 - 7x + 10)(x + 3)};$       б)  $y = \sqrt{\frac{x^2 - 49}{6 - x - x^2}}.$

**3.206.** Рашыце няроўнасць:

а)  $\frac{(x - 7)^3}{x^2(x + 3)^4} < 0;$       б)  $\frac{-8(x - 2)(x^2 + 1)(x + 4)^2}{(x + 2)^2(x - 9)} \geq 0.$

Ці з'яўляюцца лікі  $-3$ ;  $-4$  рашэннем якой-небудзь з гэтых няроўнасцей?

**3.207.** Рашыце няроўнасць:

а)  $\frac{1 - x}{x} < 3;$       б)  $\frac{1}{x - 7} > \frac{x + 4}{7 - x};$   
в)  $\frac{2}{x + 3} > \frac{1}{2 - x};$       г)  $\frac{5}{x + 2} \geq x - 2.$

**3.208.** Рашыце сістэму няроўнасцей  $\begin{cases} \frac{8 - x}{x - 10} \leq \frac{2}{2 - x}, \\ x^2 - 25 \geq 0. \end{cases}$

**3.209.** Знайдзіце ўсе значэнні зменнай, пры якіх рознасць дробаў  $\frac{6}{x}$  і  $\frac{6}{x + 1}$  не перавышае 1.

**3.210.** Турысты на катары плануюць праплысці 40 км па цячэнні ракі і такую ж адлегласць супраць цячэння, затраціўшы на ўсё шлях не больш за 3 г. Якой можа быць ўласная скорасць катара, калі скорасць цячэння ракі складае  $3 \frac{\text{км}}{\text{г}}$ ?

**3.211.** Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі

$$f(x) = \sqrt{\frac{(x+1)^2}{x-8}} - \sqrt{x^2 + 6x + 5}.$$

**3.212\*.** Знайдзіце значэнні аргумента, пры якіх графік функцыі  $y = \frac{x^2 - 4x - 1}{x - 2}$  ляжыць не вышэй прамой  $y = x + 2$ .

**3.213\*.** Знайдзіце суму цэлых рашэнняў няроўнасці

$$1 + \frac{2}{x+4} \leq \frac{7}{6-x}.$$

**3.214\*.** Знайдзіце суму натуральных рашэнняў няроўнасці

$$\frac{(x^2 - 10x + 21)(x^2 - 6x - 7)}{(x^2 + 5x + 6)(x^2 - 4)} \leq 0.$$



**3.215.** Ці праўда, што:

- а)  $-73 \notin \mathbf{Z}$ ;      б)  $\sqrt{5} \notin \mathbf{Q}$ ;      в)  $-\sqrt{2} \notin \mathbf{N}$ ;  
г)  $0 \notin \mathbf{Z}$ ;      д)  $0, (3) \notin \mathbf{I}$ ;      е)  $2,6 \notin \mathbf{R}$ ?

**3.216.** Вылічыце:  $\sqrt{13 - \sqrt{69}} \cdot \sqrt{\sqrt{69} + 13}$ .

**3.217.** Рашыце ўраўненне  $(2x - 3)(2x + 3) - (x - 2)^2 - 1 = 5x$ .

**3.218.** Запішыце ў выглядзе дробу выраз

$$\frac{1}{2x-y} - \frac{1}{2x+y} + \frac{4x}{4x^2-y^2}.$$

**3.219.** Рашыце ўраўненне  $\frac{x^2+3x}{x-2} = \frac{x-12}{2-x}$ .

**3.220.** Пабудуйце графік функцыі  $y = -x^2 + 4x - 5$ . Знайдзіце мноства значэнняў гэтай функцыі.

**3.221.** Прымяніце графічны метад і знайдзіце колькасць рашэнняў сістэмы ўраўненняў  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y = 4x. \end{cases}$

**3.222.** Функцыя  $y = f(x)$  цотная. Вядома, што  $f(x) = x^3$  пры  $x \leq 0$ . Знайдзіце  $f(2)$ .

### Выніковая самаацэнка

Пасля вывучэння гэтага раздзела я павінен:

- ведаць азначэнне дробава-рацыянальных ураўненняў;
- ведаць і ўмець прымяняць умову роўнасці рацыянальнага дробу нулю;