

4.33*. Паслядоўнасць (a_n) зададзена формулай n -га члена $a_n = n^2 - 6n - 3$. Знайдзіце нумары членаў дадзенай паслядоўнасці, якія не перавышаюць 4.

4.34*. Запішыце 4 першыя члены паслядоўнасці (a_n) , зададзенай рэкурэнтна:

а) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 5a_n - 1$; б) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n^2 + a_n$.



4.35. Пабудуйце графік функцыі $f(x) = -\frac{6}{x}$ і знайдзіце:

а) $f(-3)$ і $f(18)$;

б) значэнні аргумента, пры якіх значэнне функцыі роўна 12;

в) значэнні аргумента, пры якіх функцыя прымае адмоўныя значэнні;

г) прамежкі нарастання функцыі.

4.36. Рашыце сістэму ўраўненняў
$$\begin{cases} x^2 - 12y = 6, \\ x + 4y = -2. \end{cases}$$

4.37. Спрасціце выраз $\left(1 + \frac{2x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right) \cdot \frac{y}{y+x}$.

4.38. Лічнік звычайнага дробу на 4 меншы за назоўнік. Калі і лічнік, і назоўнік гэтага дробу паменшыць на 3, то атрымаецца дроб, роўны 0,75. Знайдзіце першапачатковы дроб.

§ 15. Арыфметычная прагрэсія



4.39. Рашыце ўраўненне $2,24x - 6,6 = 38,2$.

4.40. Функцыя зададзена формулай $f(x) = 3x^2 - \sqrt{x}$. Вылічыце:

а) $f(4)$; б) $f\left(\frac{1}{9}\right)$; в) $f(0,01)$.

4.41. Знайдзіце ўсе значэнні аргумента, пры якіх значэнне функцыі $f(x) = x^2$ роўна:

а) 7; б) 0,04; в) $1\frac{7}{9}$.

4.42. Знайдзіце сярэдняе арыфметычнае лікаў:

а) 12 і 24; б) 5; 7 і 9.



Разгледзім задачу. У горнай мясцовасці тэмпература паветра ўлетку пры пад'ёме на кожныя 100 м у сярэднім паніжаецца на $0,7^\circ\text{C}$. Каля падножжа гары тэмпература роўна 26°C . Знайдзіце тэмпературу паветра на вышыні 100 м; 200 м; 300 м.

Рашэнне. Тэмпература паветра на вышыні 100 м роўна $26^\circ\text{C} - 0,7^\circ\text{C} = 25,3^\circ\text{C}$. На вышыні 200 м тэмпература будзе роўна $25,3^\circ\text{C} - 0,7^\circ\text{C} = 24,6^\circ\text{C}$, а на вышыні 300 м — $24,6^\circ\text{C} - 0,7^\circ\text{C} = 23,9^\circ\text{C}$.

Адказ: $25,3^\circ\text{C}$; $24,6^\circ\text{C}$; $23,9^\circ\text{C}$.

Рашаючы задачу, мы атрымалі паслядоўнасць 26; 25,3; 24,6; Кожны член гэтай паслядоўнасці роўны папярэдняму, складзенаму з лікам $-0,7$. Многія практычныя задачы прыводзяць да паслядоўнасцей такога выгляду. Яны называюцца **арыфметычнымі прагрэсіямі** (ад лац. *progression* — рух наперад).

Азначэнне. Арыфметычнай прагрэсіяй называецца лікавая паслядоўнасць, кожны член якой, пачынаючы з другога, роўны папярэдняму члену, складзенаму з адным і тым жа для дадзенай паслядоўнасці лікам, г. зн.

$$a_{n+1} = a_n + d, \text{ дзе } n \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{R}.$$

Лік d называецца **рознасцю арыфметычнай прагрэсіі**.

З роўнасці $a_{n+1} = a_n + d$ вынікае, што $d = a_{n+1} - a_n$.

Каб задаць арыфметычную прагрэсію (a_n) , дастаткова задаць яе першы член a_1 і рознасць d .

$$a_{n+1} = a_n + d$$

Напрыклад, калі $a_1 = 3$, $d = 4$, то атрымаецца арыфметычная прагрэсія 3; 7; 11; 15;

Калі $a_1 = 2$, $d = -3$, то арыфметычная прагрэсія мае выгляд 2; -1 ; -4 ; -7 ; -10 ;

Калі $a_1 = -7$, $d = 0$, то ўсе члены арыфметычнай прагрэсіі роўныя адзін аднаму: -7 ; -7 ; -7 ; -7 ;

Каб вылічыць любы член арыфметычнай прагрэсіі, не вылічваючы ўсе папярэднія члены, карыстаюцца формулай n -га члена арыфметычнай прагрэсіі

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$



Выведзем гэту формулу. Калі (a_n) — арыфметычная прагрэсія з рознасцю d , то, выкарыстаўшы азначэнне, атрымаем правільныя роўнасці:

$$a_2 = a_1 + d; \quad a_3 = a_2 + d; \quad a_4 = a_3 + d; \quad \dots;$$

$$a_{n-1} = a_{n-2} + d; \quad a_n = a_{n-1} + d.$$

Складзем гэтыя роўнасці:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d$$

$$a_4 = a_3 + d$$

+ ...

$$a_{n-1} = a_{n-2} + d$$

$$a_n = a_{n-1} + d$$

$$\begin{aligned} & a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n = \\ & = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + \underbrace{d + d + \dots + d}_{n-1 \text{ раз}}. \end{aligned}$$

Пасля спрашчэння атрымаем:

$$a_n = a_1 + \underbrace{d + d + \dots + d}_{n-1 \text{ раз}}.$$

Паколькі колькасць складаных d роўна $n-1$, то роўнасць прыме выгляд

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Атрымалі формулу n -га члена арыфметычнай прагрэсіі (a_n) .

Формула n -га члена арыфметычнай прагрэсіі (a_n) дазваляе вылічыць любы член прагрэсіі, ведаючы яе першы член a_1 , нумар члена n і рознасць прагрэсіі d .

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Прыклад 1. Паслядоўнасць (a_n) — арыфметычная прагрэсія, $a_1 = 2$, $d = 2,5$. Знайдзіце 100-ы член прагрэсіі.

Рашэнне. Па формуле n -га члена атрымаем:

$$a_{100} = a_1 + (100-1)d = 2 + 99 \cdot 2,5 = 249,5.$$

Адказ: 249,5.

Прыклад 2. Паслядоўнасць (a_n) — арыфметычная прагрэсія, $a_1 = 3$, $d = 2,5$. Ці з'яўляецца членам гэтай прагрэсіі лік:
а) 168; б) 201?

Рашэнне. а) Па ўмове $a_n = 168$, $a_1 = 3$, $d = 2,5$. Падставім гэтыя значэнні ў формулу n -га члена $a_n = a_1 + (n - 1)d$ і атрымаем ураўненне $168 = 3 + (n - 1) \cdot 2,5$. Рашыўшы яго, атрымаем, што $n = 67$ — корань ураўнення. Паколькі 67 — натуральны лік, то лік 168 з'яўляецца членам гэтай прагрэсіі з нумарам 67.

б) Падставім значэнні $a_n = 201$, $a_1 = 3$, $d = 2,5$ у формулу n -га члена $a_n = a_1 + (n - 1)d$ і атрымаем ураўненне $201 = 3 + (n - 1) \cdot 2,5$. Рэшым яго: $201 = 3 + (n - 1) \cdot 2,5$; $198 = 2,5(n - 1)$; $79,2 = n - 1$; $n = 80,2$. Паколькі корань ураўнення 80,2 — ненатуральны лік, то лік 201 не з'яўляецца членам гэтай прагрэсіі.

Адказ: а) лік 168 з'яўляецца членам гэтай прагрэсіі; б) лік 201 не з'яўляецца членам гэтай прагрэсіі.

Характарыстычная ўласцівасць арыфметычнай прагрэсіі

У арыфметычнай прагрэсіі кожны яе член, пачынаючы з другога, роўны сярэдняму арыфметычнаму папярэдняга і наступнага (суседніх з ім) членаў, г. зн. $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ пры $n \geq 2$.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

пры $n \geq 2$



Доказ. У арыфметычнай прагрэсіі (a_n) для члена a_n запішам па формуле n -га члена папярэдні і наступны члены, г. зн. a_{n-1} і a_{n+1} :

$$a_{n-1} = a_1 + d(n - 2), \quad a_{n+1} = a_1 + dn.$$

Знойдзем іх сярэдняе арыфметычнае:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} &= \frac{a_1 + d(n - 2) + a_1 + dn}{2} = \frac{2a_1 + 2d(n - 1)}{2} = \\ &= a_1 + d(n - 1) = a_n. \end{aligned}$$

Справядлівае і адваротнае сцверджанне:

калі ў паслядоўнасці кожны яе член, пачынаючы з другога, роўны сярэдняму арыфметычнаму папярэдняга і наступнага (суседніх з ім) членаў, то паслядоўнасць з'яўляецца арыфметычнай прагрэсіяй.



Доказ. Няхай у некаторай лікавай паслядоўнасці (a_n) кожны яе член, пачынаючы з другога, роўны сярэдняму арыфметычнаму папярэдняга і наступнага членаў, г. зн.

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}. \text{ Тады } 2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}, \quad a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n,$$

значыць, рознасць кожнага яе члена з папярэднім членам ёсць адзін і той жа лік. Абазначым яго d , атрымаем $a_{n+1} - a_n = d$ пры любым натуральным n , значыць, $a_{n+1} = a_n + d$. Такім чынам, па азначэнні паслядоўнасць (a_n) — арыфметычная прагрэсія.

Абодва сцверджанні можна аб'яднаць у адно, якое называецца **характарыстычнай уласцівасцю арыфметычнай прагрэсіі**:

лікавая паслядоўнасць з'яўляецца арыфметычнай прагрэсіяй тады і толькі тады, калі кожны яе член, пачынаючы з другога, роўны сярэдняму арыфметычнаму папярэдняга і наступнага членаў: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.



Прыклад 3. Праверце, ці з'яўляецца арыфметычнай прагрэсіяй паслядоўнасць, зададзеная формулай

$$a_n = 2n + 7.$$

Рашэнне. Запішам для $a_n = 2n + 7$ папярэдні і наступны члены паслядоўнасці:

$$a_{n-1} = 2(n-1) + 7 = 2n + 5; \quad a_{n+1} = 2(n+1) + 7 = 2n + 9.$$

Знойдзем сярэдняе арыфметычнае гэтых членаў:

$$\frac{(2n+5) + (2n+9)}{2} = \frac{4n+14}{2} = 2n+7 = a_n.$$

Па характарыстычнай уласцівасці арыфметычнай прагрэсіі паслядоўнасць $a_n = 2n + 7$ з'яўляецца арыфметычнай прагрэсіяй.



Азначэнне арыфметычнай прагрэсіі

1. Паслядоўнасць

2; 12; 22; ...

з'яўляецца арыфметычнай прагрэсіяй. Прадоўжыце паслядоўнасць.

Паколькі паслядоўнасць з'яўляецца арыфметычнай прагрэсіяй, то знойдзем яе рознасць $d = 12 - 2 = 10$. Тады кожны наступны член паслядоўнасці роўны папярэдняму, складзенаму з лікам 10: 2; 12; 22; 32; 42;

2. Вядомы члены арыфметычнай прагрэсіі: $a_6 = -2$; $a_7 = 3$. Знайдзіце рознасць гэтай прагрэсіі.	Знойдзем рознасць: $d = a_{n+1} - a_n$; $d = a_7 - a_6 = 3 - (-2) = 5$.
Формула n-га члена арыфметычнай прагрэсіі	
3. Паслядоўнасць (a_n) — арыфметычная прагрэсія. Знайдзіце дваццаты член прагрэсіі, калі $a_1 = 3$, $d = 1,6$.	Па формуле n-га члена арыфметычнай прагрэсіі $a_n = a_1 + (n - 1)d$ атрымаем: $a_{20} = 3 + (20 - 1) \cdot 1,6 = 33,4$.
4. Запішыце формулу n-га члена для арыфметычнай прагрэсіі $-15,5; -14,9; -14,3; \dots$ і знайдзіце яе дваццаты член.	Па ўмове $a_1 = -15,5$; $a_2 = -14,9$, тады $d = a_2 - a_1 = -14,9 - (-15,5) = 0,6$. Запішам формулу n-га члена дадзенай арыфметычнай прагрэсіі, падставіўшы ў формулу $a_n = a_1 + (n - 1)d$ значэнні для a_1 і d: $a_n = -15,5 + (n - 1) \cdot 0,6$; $a_n = 0,6n - 16,1$. Падставім $n = 20$ у формулу n-га члена дадзенай арыфметычнай прагрэсіі і знойдзем яе дваццаты член: $a_{20} = 0,6 \cdot 20 - 16,1 = -4,1$.
5. У арыфметычнай прагрэсіі (a_n) вядома, што $a_1 = -5,6$; $a_2 = -4,8$. Лік 16 з'яўляецца членам гэтай прагрэсіі. Знайдзіце яго нумар.	Паколькі $a_1 = -5,6$; $a_2 = -4,8$, то $d = a_2 - a_1 = -4,8 - (-5,6) = -4,8 + 5,6 = 0,8$. Па ўмове $a_n = 16$. Выкарыстаем формулу $a_n = a_1 + (n - 1)d$, тады $16 = -5,6 + (n - 1) \cdot 0,8$; $16 = -5,6 + 0,8n - 0,8$; $16 = 0,8n - 6,4$; $22,4 = 0,8n$; $n = 28$.
6. У арыфметычнай прагрэсіі $a_6 = 8$, $a_{10} = 16$. Знайдзіце рознасць прагрэсіі і яе першы член.	Па ўмове $a_6 = a_1 + 5d = 8$, $a_{10} = a_1 + 9d = 16$. Рэшым сістэму ўраўненняў $\begin{cases} a_1 + 5d = 8, \\ a_1 + 9d = 16. \end{cases}$ Аднімем ад другога ўраўнення першае, атрымаем $4d = 8$, адкуль $d = 2$. Падставім $d = 2$ у першае ўраўненне сістэмы, атрымаем $a_1 = -2$.

Характарыстычная ўласцівасць арыфметычнай прагрэсіі

7. Знайдзіце восьмы член арыфметычнай прагрэсіі (a_n), калі $a_7 = 21$, $a_9 = 29$.	Па характарыстычнай уласцівасці арыфметычнай прагрэсіі $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \text{ г. зн.}$ $a_8 = \frac{a_7 + a_9}{2} = \frac{21 + 29}{2} = 25.$
8. Пры якім значэнні x паслядоўнасць $x - 1$; $4x - 9$; $4x + 2$ з'яўляецца арыфметычнай прагрэсіяй?	Па характарыстычнай уласцівасці прагрэсіі паслядоўнасць з'яўляецца арыфметычнай прагрэсіяй, калі кожны яе член, пачынаючы з другога, роўны сярэдняму арыфметычнаму папярэдняга і наступнага членаў: $4x - 9 = \frac{(x - 1) + (4x + 2)}{2}.$ Рэшым атрыманае ўраўненне: $8x - 18 = 5x + 1; 3x = 19; x = 6\frac{1}{3}.$



1. У арыфметычнай прагрэсіі (a_n) n -ы член вылічваецца па формуле:

- а) $a_n = a_1 + d$; б) $a_n = a_1 + nd$;
 в) $a_n = a_1 + (n - 1)d$; г) $a_n = a_1 + 2dn$.

Выберыце правільны адказ.

2. Паслядоўнасць (a_n) з'яўляецца арыфметычнай прагрэсіяй, калі для ўсіх членаў паслядоўнасці, пачынаючы з другога, выконваецца ўмова:

- а) $a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$; б) $a_n = a_{n-1} - a_{n+1}$;
 в) $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$; г) $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Выберыце правільны адказ.



4.43. Дадзеная паслядоўнасць з'яўляецца арыфметычнай прагрэсіяй, вызначце рознасць прагрэсіі і знайдзіце наступныя тры яе члены:

- а) 2; 4; 6; ...; б) -1; -4; -7; ...;
 в) 2; 5; 8; ...; г) 0,1; 0,2; 0,3;

4.44. Першы член арыфметычнай прагрэсіі роўны 5,3, а рознасць роўна 3. Назавіце 5 першых членаў гэтай арыфметычнай прагрэсіі.

4.45. Якія члены прагрэсіі можна выкарыстаць, каб вызначыць рознасць арыфметычнай прагрэсіі:

- а) $-8; -4; 0; 4; \dots$; б) $8,5; 8; 7,5; 7; \dots$;
 в) $9; 9; 9; 9; \dots$; г) $\sqrt{3}; 2\sqrt{3}; 3\sqrt{3}; 4\sqrt{3}; \dots$?

Знайдзіце шосты член прагрэсіі.

4.46. Знайдзіце рознасць арыфметычнай прагрэсіі (a_n) , калі:

- а) $a_1 = 12, a_2 = -6$; б) $a_8 = 7,2, a_9 = 8,5$;
 в) $a_{45} = 8\sqrt{2}, a_{46} = 5\sqrt{2}$; г) $a_n = 3\frac{5}{7}, a_{n+1} = 2\frac{3}{7}$.

4.47. У арыфметычнай прагрэсіі $-100; 0; 100; \dots$ знайдзіце нумар члена, роўнага 1000.

4.48. Рознасць арыфметычнай прагрэсіі (a_n) роўна 4. Знайдзіце першы і другі члены гэтай прагрэсіі, калі:

- а) $a_3 = 5$; б) $a_3 = -2$;
 в) $a_3 = 1,5$; г) $a_3 = -3\frac{1}{3}$.

4.49. Выкарыстайце формулу n -га члена арыфметычнай прагрэсіі (a_n) для вылічэння шаснаццатага члена гэтай прагрэсіі, калі:

- а) $a_1 = 5, d = -3$; б) $a_1 = -0,2, d = 10$;
 в) $a_1 = 0, d = \frac{1}{3}$; г) $a_1 = \sqrt{5}, d = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

4.50. Для арыфметычнай прагрэсіі (a_n) выразіце праз a_7 і d :

- а) a_1 ; б) a_8 ; в) a_{20} ; г) a_{100} .

4.51. Паслядоўнасць (a_n) — арыфметычная прагрэсія. Выразіце a_{30} праз:

- а) a_1 і d ; б) a_{31} і d ; в) a_{15} і d ; г) a_{40} і d .

4.52. Запішыце формулу n -га члена і знайдзіце a_{10}, a_{21} і a_{201} для арыфметычнай прагрэсіі (a_n) :

- а) $-26; -21; -16; \dots$; б) $7,8; 7,1; 6,4; \dots$;
 в) $-\sqrt{2}; -\sqrt{2}; -\sqrt{2}; \dots$; г) $\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; \dots$.

4.53. Для арыфметычнай прагрэсіі (a_n) вядома, што $a_2 = -4, a_3 = 2$. Знайдзіце рознасць прагрэсіі, яе першы і дваццаць пяты член.

4.54. У бензобак грузавога аўтамабіля залілі 600 л бензіну. У першы дзень шляху было зрасходавана 30 л бензіну,

а ў кожны наступны дзень расхавалі на 5 л бензіну больш, чым у папярэдні. Колькі літраў бензіну зрасхавалі ў пяты дзень; у сёмы дзень?

4.55. Як вызначыць, ці з'яўляецца лік 142 членам арыфметычнай прагрэсіі $-18; -16,4; -14,8; \dots$? Які нумар мае член прагрэсіі, роўны 142? Як можна без вылічэнняў вызначыць, ці з'яўляецца членам дадзенай прагрэсіі лік 15?

4.56. У арыфметычнай прагрэсіі (a_n) вядома, што $a_1 = -7,3$ і $a_2 = -6,4$. Ці з'яўляецца членам дадзенай прагрэсіі лік 26?

4.57. Паслядоўнасць (a_n) — арыфметычная прагрэсія, $a_1 = 4,5$, $d = -0,6$. Знайдзіце нумар першага адмоўнага члена гэтай прагрэсіі. Які нумар мае член дадзенай прагрэсіі, роўны $-15,9$? Вызначце колькасць членаў дадзенай прагрэсіі, большых за -51 .

4.58. Першы член арыфметычнай прагрэсіі роўны -37 , $d = 1$, n -ы член роўны 78. Знайдзіце колькасць членаў у гэтай прагрэсіі з першага па n -ы член, уключаючы гэтыя члены. Знайдзіце колькасць усіх цэлых лікаў, якія належаць прамежку:

- а) $[-37; 78]$; б) $[-15; 49]$; в) $[-23,8; 89,2]$.

4.59. Курс аздаравленчых трэніровак пачынаюць з занятку працягласцю 10 мін. Затым кожны наступны дзень час трэніроўкі павялічваюць на 3 мін. У які дзень з моманту пачатку заняткаў працягласць трэніроўкі дасягне 25 мінут; стане большай за 45 мінут?

4.60. Ці можна знайсці першы член арыфметычнай прагрэсіі (c_n) , калі:

- а) $c_{12} = 48$, $d = -2$;
 б) $c_{32} = 11,8$, $d = 0,3$;
 в) $c_9 = 8\sqrt{2}$, $d = -\sqrt{2}$?

Па выніках вылічэнняў зрабіце абагульненне.

4.61. Якую формулу можна выкарыстаць, каб знайсці рознасць арыфметычнай прагрэсіі (a_n) , калі вядома, што:

- а) $a_1 = -12$, $a_{15} = 16$;
 б) $a_1 = \frac{2}{9}$, $a_6 = 6\frac{7}{18}$;
 в) $a_1 = 19\sqrt{7}$, $a_8 = -2\sqrt{7}$?

4.62. У арыфметычнай прагрэсіі $a_{19} = 59$, $d = 3$. Які з членаў прагрэсіі a_1 ; a_6 ; a_{20} можна знайсці, не выкарыстоўваючы формулу n -га члена? Знайдзіце a_1 ; a_6 ; a_{20} .

4.63. У арыфметычнай прагрэсіі $a_{15} = 11,8$, $a_{16} = 10,2$. Знайдзіце a_1 ; d ; a_{18} . Выканайце заданне рознымі спосабамі.

4.64. У арыфметычнай прагрэсіі (a_n) вядома, што $a_{15} = 10$, $a_{20} = 6$. Знайдзіце рознасць прагрэсіі і яе першы член. Як вылічыць рознасць арыфметычнай прагрэсіі па зададзеных двух яе членах?

4.65. Знайдзіце трыццаты член арыфметычнай прагрэсіі (a_n) , калі вядома, што:

а) $a_6 = 56$, $a_{18} = -4$;

б) $a_{10} = -8,5$, $a_{20} = 13,5$;

в) $a_{17} = -3\sqrt{10}$, $a_{23} = -15\sqrt{10}$.

4.66. Колькі дадатных членаў змяшчае арыфметычная прагрэсія 8,3; 7,9; 7,5; ...?

4.67. Знайдзіце нумар першага адмоўнага члена арыфметычнай прагрэсіі (c_n) , калі $c_1 = 2\frac{1}{7}$, $d = -\frac{3}{14}$.

4.68. Знайдзіце першы дадатны член арыфметычнай прагрэсіі $-6\sqrt{3}$; $-\frac{11\sqrt{3}}{2}$; $-5\sqrt{3}$;

4.69. Калі паміж лікамі -12 і 8 трэба ўставіць сем такіх лікаў, каб яны разам з дадзенымі лікамі ўтварылі арыфметычную прагрэсію, то які нумар мае член, роўны 8 ? Чаму роўна рознасць гэтай арыфметычнай прагрэсіі?

4.70. Якую ўласцівасць можна выкарыстаць, каб знайсці дзясяты член арыфметычнай прагрэсіі, калі дзявяты і адзінаццаты яе члены адпаведна роўны $-12,3$ і $5,7$?

4.71. У арыфметычнай прагрэсіі $a_{28} = 6\frac{2}{3}$, $a_{30} = 1\frac{1}{3}$. Знайдзіце a_{29} ; d ; a_1 ; a_{45} . Выканайце заданне рознымі спосабамі.

4.72. Знайдзіце, пры якім значэнні зменнай значэнні выразаў будуць паслядоўнымі членамі арыфметычнай прагрэсіі:

а) $5x + 2$; $x - 4$ і $7 - 2x$;

б) $x^2 - 8$; $5x + 3$ і $3x + 6$;

в) $x^2 + 5$; $x^2 + x$ і $8x - 14$.

4.73. Сума трох першых членаў арыфметычнай прагрэсіі роўна 51. Знайдзіце другі член прагрэсіі.

4.74. Дакажыце, што значэнні выказаў $(a+b)^2$; a^2+b^2 і $(a-b)^2$ з'яўляюцца паслядоўнымі членамі арыфметычнай прагрэсіі.

4.75*. Праверце, ці з'яўляецца арыфметычнай прагрэсіяй паслядоўнасць:

а) $b_n = 7n + 1$; б) $c_n = 3 - 5n$; в) $x_n = n^2$; г) $y_n = 12n$.

Калі з'яўляецца, то знайдзіце яе першы член і рознасць.

4.76*. Знайдзіце першы член і рознасць арыфметычнай прагрэсіі (a_n) , калі:

а) $a_4 + a_8 = 30$ і $a_7 + a_{10} = 60$;

б) $a_{24} - a_{19} = 12$ і $a_{16} = 18$;

в) $a_3 + a_{19} = 46$ і $a_{20} - 2a_3 = 27$.

4.77*. Знайдзіце восьмы член арыфметычнай прагрэсіі (a_n) , калі вядома, што $a_{13} + a_{14} + a_{15} = 15$ і $a_{12}a_{14} = -210$.

4.78*. У арыфметычнай прагрэсіі $a_2 = -1$, $a_4 + a_6 = -20$, $a_n = -22$. Знайдзіце n .

4.79*. У арыфметычнай прагрэсіі $a_1 + a_4 + a_7 + a_{10} + a_{13} + a_{16} = 147$. Знайдзіце $a_1 + a_6 + a_{11} + a_{16}$.

4.80*. Арыфметычныя прагрэсіі (a_n) і (c_n) зададзены формуламі сваіх n -х членаў $a_n = 43 - 2n$ і $c_n = 3n - 67$. Ці ёсць у гэтых прагрэсіях роўныя члены з аднолькавымі нумарамі?

4.81*. Дадзена арыфметычная прагрэсія (a_n) . Вызначце, ці з'яўляецца арыфметычнай прагрэсіяй паслядоўнасць:

а) a_2 ; a_4 ; a_6 ; ...;

б) $a_1 + 5$; $a_2 + 5$; $a_3 + 5$; ...;

в) $3a_1$; $3a_2$; $3a_3$; ...;

г) a_1^2 ; a_2^2 ; a_3^2 ;

4.82*. У арыфметычнай прагрэсіі $a_4 = 7$. Пры якім значэнні рознасці прагрэсіі значэнне сумы $a_1 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_3$ будзе найменшым?



4.83. Дадзена паслядоўнасць з'яўляецца арыфметычнай прагрэсіяй. Вызначце рознасць прагрэсіі і знайдзіце наступныя тры яе члены:

а) -10 ; -5 ; 0 ; 5 ; ...;

б) $9,2$; $8,2$; $7,2$; $6,2$; ...;

в) -2 ; -2 ; -2 ; -2 ; ...;

г) $5\sqrt{2}$; $3\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$;

4.84. Рознасць арыфметычнай прагрэсіі (a_n) роўна 3. Знайдзіце першы член прагрэсіі, калі:

а) $a_2 = 7$; б) $a_2 = -1$; в) $a_2 = 4,5$; г) $a_2 = -1\frac{2}{7}$.

4.85. Для арыфметычнай прагрэсіі (a_n) выразіце a_{18} праз:

а) a_1 і d ; б) a_{17} і d ; в) a_{29} і d ; г) a_3 і d .

4.86. У арыфметычнай прагрэсіі (a_n) вядомы першы член a_1 і рознасць d . Запішыце формулу n -га члена гэтай прагрэсіі і знайдзіце a_6 , a_{12} і a_{51} , калі:

а) $a_1 = 3$, $d = -2$; б) $a_1 = -7$, $d = 8$;
в) $a_1 = 4$, $d = 0,25$; г) $a_1 = -\sqrt{2}$, $d = -5\sqrt{2}$.

4.87. Для арыфметычнай прагрэсіі (a_n) вядома, што $a_2 = 6$, $a_3 = -1$. Знайдзіце рознасць прагрэсіі і дзясяты член гэтай прагрэсіі. Якую формулу вы выкарысталі?

4.88. Паслядоўнасць (c_n) — арыфметычная прагрэсія, $c_1 = 8$, $d = -1,5$. Ці з'яўляецца членам гэтай прагрэсіі лік:

а) -132 ; б) -37 ?

4.89. Турыст плануе ўзяць напакат аўтамабіль. Кошт пракату ўключае аплату за першыя суткі (100 р.) і аплату за кожныя наступныя суткі пракату (30 р.). Колькі трэба будзе заплаціць за аўтамабіль, узяты напакат на 3 сутак; на 5 сутак? Колькі сутак карыстаўся аўтамабілем турыст, які заплаціў за пракат 280 р.? На колькі сутак можа ўзяць аўтамабіль напакат турыст, які разлічвае патраціць на гэта не больш за 250 р.?

4.90. Паслядоўнасць (a_n) — арыфметычная прагрэсія. Знайдзіце першы член гэтай прагрэсіі, калі $a_{15} = 29$, $d = -3$.

4.91. Выкарыстайце формулу n -га члена арыфметычнай прагрэсіі і знайдзіце рознасць арыфметычнай прагрэсіі (x_n), калі вядома, што $x_1 = 56,7$, $x_{24} = -12,3$.

4.92. У арыфметычнай прагрэсіі $a_{13} = 25$, $d = -2$. Знайдзіце a_1 , a_7 , a_{25} .

4.93. У арыфметычнай прагрэсіі $a_{11} = -6,5$, $a_{12} = -7,3$. Знайдзіце a_1 , d , a_{13} , a_{21} .

4.94. У арыфметычнай прагрэсіі (a_n) вядома, што $a_9 = -19$, $a_{17} = 13$. Знайдзіце a_1 , d , a_{32} .

4.95. Вызначце, калі магчыма, колькі адмоўных членаў змяшчае арыфметычная прагрэсія $-112; -108; -104; \dots$.

4.96. Знайдзіце першы дадатны член арыфметычнай прагрэсіі (a_n) , калі $a_1 = -9,5$; $d = 0,4$. Вызначце яго нумар.

4.97. Паміж лікамі $-3\sqrt{5}$ і $9\sqrt{5}$ устаўце шэсць такіх лікаў, каб яны разам з дадзенымі лікамі ўтварылі арыфметычную прагрэсію. Які нумар будзе мець лік $9\sqrt{5}$? Чаму роўна рознасць гэтай арыфметычнай прагрэсіі?

4.98. Знайдзіце пятнаццаты член і рознасць арыфметычнай прагрэсіі, калі чатырнаццаты і шаснаццаты яе члены адпаведна роўны $-43,6$ і $-28,4$. Якую ўласцівасць вы выкарысталі?

4.99. Выкарыстайце характарыстычную ўласцівасць арыфметычнай прагрэсіі і знайдзіце, пры якім значэнні зменнай значэнні выказаў $9 - 4x$; $2x + 5$ і $3x - 1$ будуць паслядоўнымі членамі арыфметычнай прагрэсіі.

4.100*. Дакажыце, што паслядоўнасць $a_n = 5n - 1$ з'яўляецца арыфметычнай прагрэсіяй.

4.101*. Прааналізуйце ўмову і знайдзіце першы член і рознасць арыфметычнай прагрэсіі (a_n) , калі:

а) $a_4 + a_{13} = 47$ і $a_9 + a_{15} = 68$;

б) $a_2 + a_6 = 42$ і $a_{10} - a_4 = 54$.

4.102*. У арыфметычнай прагрэсіі трэці і дзясяты члены адпаведна роўны 12 і -2 . Знайдзіце суму другога і адзінаццатага членаў прагрэсіі.

4.103*. Дадзена арыфметычная прагрэсія (a_n) . Вызначце, ці з'яўляецца арыфметычнай прагрэсіяй паслядоўнасць $-a_1; -a_3; -a_5; \dots$.



4.104. Вылічыце: $(3\sqrt{2} + 2)^2 + (6 - \sqrt{2})^2$.

4.105. Знайдзіце значэнне выразу

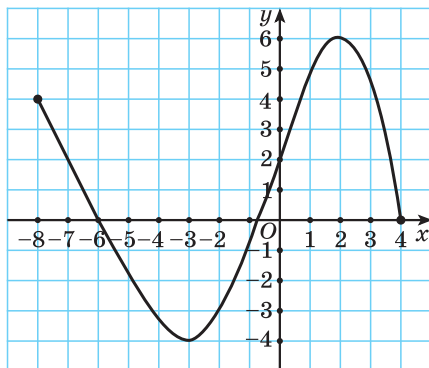
$$\text{НАК}(16; 24; 48) + \text{НАД}(48; 49).$$

4.106. На рысунку 93 паказаны відарыс графіка функцыі $y = f(x)$. Пабудуйце графік функцыі:

- а) $y = f(x - 1)$;
- б) $y = f(x + 2)$;
- в) $y = f(x) - 2$;
- г) $y = f(x) + 3$.

4.107. Рашыце няроўнасць метадам інтэрвалаў:

- а) $(x - 1)(x^2 - 6x + 9)(5 - x) \geq 0$;
- б) $\frac{(x^2 - 4)(x + 5)}{x^2 + 4x + 4} \leq 0$.



Рыс. 93

§ 16. Формула сумы n першых членаў арыфметычнай прагрэсіі



4.108. Выразіце n з формулы сумы вуглоў n -вугольніка $S = (n - 2) \cdot 180^\circ$.

4.109. Па формуле колькасці ўсіх дыяганалей n -вугольніка знайдзіце колькасць дыяганалей 20-вугольніка.

4.110. Знайдзіце суму рацыянальнымі спосабам:

$$2 + 0,34 - 1,246 + 0,66 - 2,754.$$



Разгледзім задачу. Два сябры рашылі палепшыць веданне англійскай мовы і кожны дзень вучыць на 3 новыя словы больш, чым у папярэдні. Колькі слоў вывучыць кожны з сяброў за 10 дзён, калі яны пачнуць з аднаго слова?

Для рашэння гэтай задачы трэба знайсці суму дзесяці першых членаў арыфметычнай прагрэсіі (a_n) , у якой $a_1 = 1$, $d = 3$.

Узнікае пытанне: як знайсці гэту суму, не вылічваючы ўсіх дзесяці членаў прагрэсіі?

У агульным выглядзе гэта задача прыводзіць да неабходнасці вываду формулы сумы n першых членаў арыфметычнай прагрэсіі: $a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Для таго каб вывесці гэту формулу, дакажам уласцівасць: сумы двух членаў канечнай арыфметычнай прагрэсіі, роўнааддаленых ад яе канцоў, роў-

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$$