§ 18. Формула сумы n першых членаў геаметрычнай прагрэсіі

4.234. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\left(2^{-1}+3^{-1}\right)^{-1}$; б) $2^4 \cdot 16 : (-8)^3$.

4.235. Рашыце ўраўненне $(x-6)\left(x^2-3\right)=x-6$.

Нямала легенд звязана з геаметрычнай прагрэсіяй. Найбольш вядомая з іх расказвае пра вынаходніка шахмат.

Паводле легенды, калі стваральнік шахмат паказаў сваю вынаходку правіцелю краіны, таму так спадабалася гульня, што ён даў вынаходніку права самому выбраць узнагароду. Мудрэц папрасіў у правіцеля за першую клетку шахматнай дошкі заплаціць яму адно зерне пшаніцы, за другую — два, за трэцюю — чатыры і г. д., падвойваючы колькасць зярнят на кожнай наступнай клетцы (рыс. 96).

Рыс. 96

Правіцель хутка пагадзіўся і загадаў казначэю выдаць мудрацу патрэбную колькасць зярнят. Аднак калі казначэй выканаў разлікі, то аказалася, што расплаціцца немагчыма, хіба толькі асушыць моры і акіяны і засеяць усё пшаніцай.

Колькасць зярнят, якую папрасіў мудрэц, роўна суме членаў геаметрычнай прагрэсіі 1; 2; 2^2; 2^3; ...; 2^{63}, г. зн. $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{63}$.

Выведзем формулу, па якой можна знаходзіць суму n першых членаў геаметрычнай прагрэсіі.

Абазначым суму n першых членаў геаметрычнай прагрэсіі (b_n) праз S_n, тады:

$$S_n = b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \ldots + b_1 \cdot q^{n-1}.$$

Памножым абедзве часткі гэтай роўнасці на назоўнік прагрэсіі q і атрымаем:

$$S_n \cdot q = b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + b_1 \cdot q^3 + \ldots + b_1 \cdot q^n.$$

Аднімем ад другой роўнасці першую і атрымаем:

$$
\begin{array}{r}
-\begin{array}{l} S_n \cdot q = b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + b_1 \cdot q^3 + \ldots + b_1 \cdot q^n \\ S_n = b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \ldots + b_1 \cdot q^{n-1} \end{array} \\
\hline
S_n \cdot q - S_n = b_1 \cdot q^n - b_1,
\end{array}
$$

г. зн. $S_n \cdot (q-1) = b_1(q^n - 1)$. Выразім з гэтай роўнасці S_n пры $q \neq 1$ і атрымаем формулу сумы n першых членаў геаметрычнай прагрэсіі $S_n = \dfrac{b_1(q^n-1)}{q-1}$.

> **Формула сумы n першых членаў геаметрычнай прагрэсіі**
>
> $$S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$$

Калі $q = 1$, то ўсе члены прагрэсіі роўны першаму члену, і суму n першых членаў такой геаметрычнай прагрэсіі можна знайсці па формуле $S_n = nb_1$.

Вылічым па формуле сумы n першых членаў геаметрычнай прагрэсіі колькасць зярнят, якую папрасіў як узнагароду мудрэц, г. зн. суму

$$S_{64} = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63}.$$

Першы член геаметрычнай прагрэсіі $b_1 = 1$, назоўнік $q = 2$, колькасць членаў прагрэсіі роўна 64.

Тады $S_{64} = \dfrac{1 \cdot (2^{64} - 1)}{2 - 1} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$

Такой колькасці пшаніцы чалавецтва не сабрала за ўсю сваю гісторыю.

Прыклад 1. Знайдзіце суму дзесяці першых членаў геаметрычнай прагрэсіі (b_n), у якой $b_1 = 0{,}5$, $q = 2$.

Рашэнне. Прыменім формулу сумы $S_n = \dfrac{b_1(q^n-1)}{q-1}$ для $n = 10$, атрымаем $S_{10} = \dfrac{b_1(q^{10}-1)}{q-1} = \dfrac{0{,}5(2^{10}-1)}{2-1} = 0{,}5 \cdot (1024 - 1) =$
$= 0{,}5 \cdot 1023 = 511{,}5.$

Адказ: 511,5.

Прыклад 2. Знайдзіце суму дванаццаці першых членаў геаметрычнай прагрэсіі 3; –6; 12; –24; ... .

Рашэнне. Падставім у формулу $S_n = \dfrac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q - 1}$ значэнні $b_1 = 3$, $q = -2$, $n = 12$: $S_{12} = \dfrac{3\cdot\left((-2)^{12} - 1\right)}{-2 - 1} = \dfrac{3\cdot\left(2^{12} - 1\right)}{-3} = -(2^{12} - 1) = -4095$.

Адказ: -4095.

Формула сумы n першых членаў геаметрычнай прагрэсіі	
1. Знайдзіце суму пяці першых членаў геаметрычнай прагрэсіі (b_n), калі $b_2 = -1$, $b_3 = -\dfrac{1}{2}$.	Знойдзем назоўнік і першы член геаметрычнай прагрэсіі: $q = \dfrac{b_3}{b_2} = \left(-\dfrac{1}{2}\right):(-1) = \dfrac{1}{2}$, тады $b_1 = \dfrac{b_2}{q} = (-1):\dfrac{1}{2} = -2$. Па формуле $S_n = \dfrac{b_1\cdot\left(q^n - 1\right)}{q - 1}$ знойдзем $S_5 = \dfrac{-2\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \dfrac{-2\cdot\left(\frac{1}{32} - 1\right)}{-\frac{1}{2}} = \dfrac{-2\cdot\frac{31}{32}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{-62}{32}:\dfrac{1}{2} = \dfrac{-62}{16} = -3\dfrac{7}{8}$.
2. Сума членаў геаметрычнай прагрэсіі роўна 605. Знайдзіце колькасць членаў прагрэсіі, калі $b_1 = 5$, $q = 3$.	Падставім у формулу $S_n = \dfrac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q - 1}$ значэнні $S_n = 605$, $b_1 = 5$, $q = 3$ і знойдзем n: $605 = \dfrac{5\left(3^n - 1\right)}{3 - 1}$; $5\left(3^n - 1\right) = 605\cdot 2$; $3^n - 1 = 242$; $3^n = 243$; $3^n = 3^5$; $n = 5$.
3. У геаметрычнай прагрэсіі (b_n) вядома, што $b_5 = 6$; $b_6 = -36$. Знайдзіце S_3.	Знойдзем назоўнік прагрэсіі: $q = b_6 : b_5 = -36 : 6 = -6$. Падставім у формулу n-га члена геаметрычнай прагрэсіі $b_5 = 6$ і $q = -6$ і знойдзем першы член прагрэсіі: $b_5 = b_1\cdot q^4$; $6 = b_1\cdot(-6)^4$; $b_1 = \dfrac{1}{216}$.

	Па формуле $S_n = \dfrac{b_1 \cdot \left(q^n - 1\right)}{q - 1}$ знойдзем суму трох першых членаў геаметрычнай прагрэсіі: $S_3 = \dfrac{\frac{1}{216}\left(\left(-6\right)^3 - 1\right)}{-6 - 1} = \dfrac{31}{216}$.
4. У геаметрычнай прагрэсіі (b_n) вядома, што $b_3 = 16$, $q = 2$, $b_n = 64$. Знайдзіце суму n першых членаў гэтай прагрэсіі.	Ведаючы, што трэці член геаметрычнай прагрэсіі роўны 16, а яе назоўнік роўны 2, па формуле $b_3 = b_1 \cdot q^2$ знойдзем першы член прагрэсіі: $16 = b_1 \cdot 2^2$; $b_1 = 4$. Выкарыстаем формулу n-га члена геаметрычнай прагрэсіі $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ і знойдзем n: $64 = 4 \cdot 2^{n-1}$; $2^{n-1} = 16$; $2^{n-1} = 2^4$; $n - 1 = 4$; $n = 5$. Па формуле сумы n першых членаў геаметрычнай прагрэсіі знойдзем S_5: $S_5 = \dfrac{4 \cdot (2^5 - 1)}{2 - 1} = 124$.

1. У геаметрычнай прагрэсіі (b_n) сума n першых членаў вылічваецца па формуле:

а) $S_n = b_1 \cdot 2q^n$; б) $S_n = b_1 \cdot q^n$;

в) $S_n = b_1 \cdot q^{n-1}$; г) $S_n = \dfrac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}$.

Выберыце правільны адказ.

2. У геаметрычнай прагрэсіі (b_n) вядома, што $b_1 = -12$, $q = 5$. Ці праўда, што сума n першых членаў дадзенай прагрэсіі пры любым n з'яўляецца адмоўным лікам?

4.236. Знайдзіце суму 99 першых членаў геаметрычнай прагрэсіі 7; –7; 7; –7; ... .

4.237. Знайдзіце суму шасці першых членаў геаметрычнай прагрэсіі:

а) 5; 10; 20; ...; б) 9; 3; 1; ...;

в) $\frac{1}{2}$; –1; 2; ...; г) 3; $3\sqrt{3}$; 9; ... .

4.238. У геаметрычнай прагрэсіі (b_n) знайдзіце:

а) S_5, калі $b_1 = 1$, $q = 5$;

б) S_8, калі $b_1 = -4$, $q = -0{,}5$;

в) S_{10}, калі $b_1 = -2$, $q = \sqrt{2}$.

4.239. Прадпрыемства на працягу паўгода праводзіла мадэрнізацыю вытворчасці, у выніку чаго расходы на выпуск адзінкі прадукцыі памяншаліся штомесячна на 10 % у параўнанні з папярэднім месяцам. Вызначце, колькі сродкаў прадпрыемства здолела сэканоміць за шэсць месяцаў, калі да мадэрнізацыі расходы на выпуск адзінкі прадукцыі складалі 100 р. і штомесячна прадпрыемства выпускала 500 адзінак прадукцыі.

4.240. Прадпрымальнік запланаваў на працягу месяца кожны дзень адкладваць грошы. Прычым у першы дзень ён плануе адкласці 1 к., у другі — 2 к., у трэці — 4 к., у чацвёрты — 8 к. і г. д. Ці зможа ён рэалізаваць свой план, калі яго штомесячны заробак складае 1200 р.?

4.241. Вядомы шаснаццаты член геаметрычнай прагрэсіі і назоўнік прагрэсіі, не роўны 1. Складзіце план вылічэння сумы 9 першых членаў гэтай прагрэсіі.

4.242. Знайдзіце суму васьмі першых членаў геаметрычнай прагрэсіі (x_n), калі вядома, што $x_3 = \frac{3}{32}$; $q = \frac{1}{2}$.

4.243. Знайдзіце суму пяці першых членаў геаметрычнай прагрэсіі (b_n), калі $b_1 = 9$; $b_5 = \frac{16}{9}$. Колькі рашэнняў мае задача?

4.244. Вядомы дзявяты і шосты члены геаметрычнай прагрэсіі з назоўнікам, не роўным 1. Складзіце план вылічэння сумы 10 першых членаў гэтай прагрэсіі.

4.245. У геаметрычнай прагрэсіі (b_n) знайдзіце S_6, калі вядома, што:

а) $b_4 = 216$; $b_5 = -648$;

б) $b_2 = 25$; $b_5 = 125\sqrt{5}$;

в) $b_3 = -12$; $b_5 = -48$.

4.246. Знайдзіце b_n і S_n для геаметрычнай прагрэсіі, у якой:

а) $b_1 = 0{,}1$; $q = 10$; $n = 6$;

б) $b_1 = -3$; $q = \sqrt{3}$; $n = 8$.

4.247. Сума чатырох першых членаў геаметрычнай прагрэсіі роўна 65. Знайдзіце першы член прагрэсіі, калі яе назоўнік роўны $\frac{2}{3}$.

4.248. Сума членаў геаметрычнай прагрэсіі роўна –85. Знайдзіце колькасць членаў прагрэсіі, калі $b_1 = 1$, $q = -2$.

4.249. Знайдзіце суму, ведаючы, што яе складаемыя — паслядоўныя члены геаметрычнай прагрэсіі:

а) $1 + 2 + 4 + \ldots + 256$; б) $1 - 3 + 9 - \ldots + 729$.

4.250. Геаметрычная прагрэсія зададзена формулай:

а) $b_n = 2 \cdot 3^n$; знайдзіце S_6;

б) $b_n = \frac{3}{8} \cdot 2^{n-1}$; знайдзіце S_9.

4.251. Рознасць чацвёртага і трэцяга членаў геаметрычнай прагрэсіі роўна 24, а рознасць трэцяга і другога членаў роўна 12. Знайдзіце суму пяці першых членаў гэтай прагрэсіі.

4.252*. Знайдзіце колькасць членаў геаметрычнай прагрэсіі, у якой $q = -\frac{1}{3}$, $b_n = \frac{1}{9}$, $S_n = 6\frac{7}{9}$.

4.253*. У геаметрычнай прагрэсіі (c_n) з дадатнымі членамі сума чатырох першых членаў роўна 255 і $c_1 + c_3 = 51$. Знайдзіце q.

4.254*. У геаметрычнай прагрэсіі $S_7 = 14$, $S_{14} = 18$. Знайдзіце суму членаў гэтай прагрэсіі з 15-га па 21-ы ўключна.

4.255*. Выведзіце формулу здабытку n першых членаў геаметрычнай прагрэсіі.

4.256*. Знайдзіце суму квадратаў шасці першых членаў геаметрычнай прагрэсіі, першы член якой роўны $5\sqrt{2}$, а назоўнік роўны $\sqrt{2}$.

4.257*. Сума трох дадатных лікаў, якія ўтвараюць арыфметычную прагрэсію, роўна 21. Калі да іх адпаведна дадаць 2, 3 і 9, то атрыманыя лікі ўтвораць геаметрычную прагрэсію. Знайдзіце гэтыя лікі.

4.258*. Знайдзіце суму чатырох дадатных лікаў, з якіх першыя тры ўтвараюць арыфметычную прагрэсію, а апошнія тры — геаметрычную прагрэсію. Сума трох першых лікаў роўна 12, а сума трох апошніх — 19.

4.259*. Знайдзіце чатыры цэлыя лікі, з якіх першыя тры з'яўляюцца паслядоўнымі членамі геаметрычнай прагрэсіі, а апошнія тры — паслядоўнымі членамі арыфметычнай прагрэсіі, калі сума крайніх лікаў роўна 21, а сума сярэдніх лікаў роўна 18.

4.260. У геаметрычнай прагрэсіі (b_n) знайдзіце:

а) S_8, калі $b_1 = 9$, $q = 2$; б) S_5, калі $b_1 = 81$, $q = -\frac{1}{3}$.

4.261. Знайдзіце суму васьмі першых членаў геаметрычнай прагрэсіі:

а) 7; 14; 28; ...; б) –3; 3; –3; ...; в) 5; $5\sqrt{5}$; 25; ... .

4.262. Дзякуючы эфектыўнай рэкламнай кампаніі на прадпрыемстве плануюць у першы месяц дадаткова рэалізаваць 1000 вырабаў. Далей мяркуецца штомесячнае павелічэнне дадатковай рэалізацыі ў 1,5 раза. За колькі месяцаў прадпрыемства зможа рэалізаваць па гэтым плане дадаткова 8125 вырабаў?

4.263. Вядомы трэці член геаметрычнай прагрэсіі і яе назоўнік. Складзіце план знаходжання 7 першых членаў гэтай прагрэсіі. Прапануйце два спосабы.

4.264. Знайдзіце суму шасці першых членаў геаметрычнай прагрэсіі (c_n), калі вядома, што $c_4 = 3$; $q = -3$.

4.265. У геаметрычнай прагрэсіі (b_n) знайдзіце S_7, калі вядома, што:

а) $b_6 = 48{,}6$; $b_7 = 72{,}9$; б) $b_3 = 34$; $b_8 = 1088$.

4.266. Знайдзіце b_n і S_n для геаметрычнай прагрэсіі, у якой $b_1 = -1$; $q = -\frac{2}{3}$; $n = 5$.

4.267. Сума чатырох першых членаў геаметрычнай прагрэсіі роўна 62,4. Знайдзіце першы член прагрэсіі, калі яе назоўнік роўны 0,2.

4.268. Сума членаў геаметрычнай прагрэсіі роўна 684. Знайдзіце колькасць членаў прагрэсіі, калі яе першы член роўны 12, а назоўнік роўны 7.

4.269. Знайдзіце суму $1 - 2 + 4 - ... - 128$, ведаючы, што яе складаемыя — паслядоўныя члены геаметрычнай прагрэсіі.

4.270. Геаметрычная прагрэсія зададзена формулай $b_n = 5 \cdot 2^{n+1}$. Знайдзіце S_8.

4.271*. Знайдзіце колькасць членаў геаметрычнай прагрэсіі, у якой $b_1 = 1$, $b_n = -512$, $S_n = -341$.

4.272*. Знайдзіце суму членаў геаметрычнай прагрэсіі (b_n) з шостага па дзясяты ўключна, калі $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = -2$.

4.273*. Тры дадатныя лікі, якія даюць у суме 30, утвараюць арыфметычную прагрэсію. Калі ад першага ліку адняць 5, ад другога — 4, а трэці лік пакінуць без змен, то атрыманыя лікі ўтвораць геаметрычную прагрэсію. Знайдзіце гэтыя лікі.

4.274. Параўнайце дробы:

а) $\frac{3}{7}$ і $\frac{11}{13}$; б) $-\frac{8}{9}$ і $-\frac{15}{17}$.

4.275. Знайдзіце значэнне выразу $a^{-1}+b^{-1}$ пры $a=\frac{1}{3}$ і $b=-0{,}25$.

4.276. Неабходна сабраць аднолькавыя камплекты, якія складаюцца з ручак, алоўкаў і сшыткаў. Знайдзіце, якую найбольшую колькасць камплектаў можна сабраць з 304 ручак, 190 алоўкаў і 114 сшыткаў, выкарыстаўшы пры гэтым усе прадметы.

4.277. Рашыце сукупнасць няроўнасцей $\left[\begin{array}{l} x^2-6x+5>0, \\ x-2\leqslant 0. \end{array}\right.$

4.278. За перавод грошай з аднаго рахунку на другі банк бярэ 1,5 % ад сумы пераводу. Якую найбольшую суму грошай можна перавесці, маючы на рахунку дакладна 1000 р.?

4.279. Рашыце ўраўненне $\left(3x^2-x-4\right)\left(3x^2-x+2\right)=7$, выкарыстаўшы метад замены зменнай.

§ 19. Сума бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі

4.280. Якія з наступных дробаў можна запісаць у выглядзе канечнага дзесятковага дробу: $\frac{2}{25}$; $\frac{7}{75}$; $\frac{4}{45}$; $\frac{3}{125}$; $\frac{11}{120}$?

4.281. Знайдзіце значэнне выразу $\frac{1}{25}+\frac{1}{3}-\frac{1}{45}$.

4.282. Ці праўда, што $\frac{1}{6}=0{,}166...=0{,}1(6)$?

Любы звычайны дроб можна запісаць у выглядзе дзесятковага дробу — канечнага або бясконцага перыядычнага дробу. Напрыклад, $\frac{2}{50}=0{,}04$ — канечны дзесятковы дроб. Бясконцы перыядычны дзесятковы дроб атрымліваецца ў