

4.273*. Тры дадатныя лікі, якія даюць у суме 30, утвараюць арыфметычную прагрэсію. Калі ад першага ліку адняць 5, ад другога — 4, а трэці лік пакінуць без змен, то атрыманыя лікі ўтвораць геаметрычную прагрэсію. Знайдзіце гэтыя лікі.



4.274. Параўнайце дробы:

а) $\frac{3}{7}$ і $\frac{11}{13}$; б) $-\frac{8}{9}$ і $-\frac{15}{17}$.

4.275. Знайдзіце значэнне выразу $a^{-1} + b^{-1}$ пры $a = \frac{1}{3}$ і $b = -0,25$.

4.276. Неабходна сабраць аднолькавыя камплекты, якія складаюцца з ручак, алоўкаў і сшыткаў. Знайдзіце, якую найбольшую колькасць камплектаў можна сабраць з 304 ручак, 190 алоўкаў і 114 сшыткаў, выкарыстаўшы пры гэтым усе прадметы.

4.277. Рашыце сукупнасць няроўнасцей
$$\begin{cases} x^2 - 6x + 5 > 0, \\ x - 2 \leq 0. \end{cases}$$

4.278. За перавод грошай з аднаго рахунку на другі банк бярэ 1,5 % ад сумы пераводу. Якую найбольшую суму грошай можна перавесці, маючы на рахунку дакладна 1000 р.?

4.279. Рашыце ўраўненне $(3x^2 - x - 4)(3x^2 - x + 2) = 7$, выкарыстаўшы метад замены зменнай.

§ 19. Сума бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі



4.280. Якія з наступных дробаў можна запісаць у выглядзе канечнага дзесятковага дробу: $\frac{2}{25}$; $\frac{7}{75}$; $\frac{4}{45}$; $\frac{3}{125}$; $\frac{11}{120}$?

4.281. Знайдзіце значэнне выразу $\frac{1}{25} + \frac{1}{3} - \frac{1}{45}$.

4.282. Ці праўда, што $\frac{1}{6} = 0,166... = 0,1(6)$?



Любы звычайны дроб можна запісаць у выглядзе дзесятковага дробу — канечнага або бясконцага перыядычнага дробу. Напрыклад, $\frac{2}{50} = 0,04$ — канечны дзесятковы дроб. Бясконцы перыядычны дзесятковы дроб атрымліваецца ў

выпадку, калі дзяленне «не заканчваецца», напрыклад $\frac{2}{3} = 0,6666\dots = 0,(6)$, $\frac{6}{11} = 0,5454\dots = 0,(54)$.

Вы разглядалі правіла запісу канечнага дзесятковага дробу ў выглядзе звычайнага дробу (напрыклад, $0,17 = \frac{17}{100}$, $0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ і да т. п.).

Высветлім, як бясконцы перыядычны дзесятковы дроб запісаць у выглядзе звычайнага дробу.

Разгледзім, напрыклад, бясконцы перыядычны дзесятковы дроб $0,(7) = 0,7777\dots$. Вызначым, якому звычайнаму дробу роўны гэты лік.

Запішам дроб $0,(7)$ у выглядзе сумы разрадных складаемых:

$$0,7777\dots = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \dots$$

У дадзеным выпадку неабходна знайсці суму бясконцай колькасці складаемых.

Складаемыя гэтай сумы з'яўляюцца членамі бясконцай геаметрычнай прагрэсіі з назоўнікам $q = \frac{1}{10} < 1$. Такія геаметрычныя прагрэсіі называюцца **бясконца спадальнымі геаметрычнымі прагрэсіямі**.

Азначэнне. Бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіяй называецца такая бясконца геаметрычная прагрэсія, у якой назоўнік $|q| < 1$.

Напрыклад, геаметрычная прагрэсія $8; 4; 2; \dots$ з'яўляецца бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіяй, паколькі $q = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} < 1$.

Геаметрычная прагрэсія $9; -3; 1; -\frac{1}{3}; \dots$ таксама з'яўляецца бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіяй, паколькі $|q| = \left| \frac{-3}{9} \right| = \frac{1}{3} < 1$.

Для таго каб запісаць бясконцы перыядычны дзесятковы дроб у выглядзе звычайнага, трэба знайсці суму **бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі**. Яе абазначаюць літарай S і знаходзяць па формуле

$$S = \frac{b_1}{1-q}, \quad |q| < 1.$$



Пакажам ідэю вываду формулы сумы бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі.

Разгледзім бясконцую геаметрычную прагрэсію (b_n) , у якой $|q| < 1$. Сума n першых членаў дадзенай прагрэсіі

$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$ вылічваецца па формуле $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

Запішам гэту формулу ў выглядзе $S_n = \frac{b_1}{1 - q} \cdot (1 - q^n)$.

Будзем лічыць, што n неабмежавана нарастае (гавораць, што імкнецца да бясконцасці, і запісваюць $n \rightarrow \infty$). Паколькі $|q| < 1$, то пры неабмежаваным павелічэнні ліку n ступень q^n імкнецца да нуля, а значэнне рознасці $1 - q^n$ імкнецца да адзінкі. Значыць, пры неабмежаваным павелічэнні ліку n сума $S_n = \frac{b_1}{1 - q} \cdot (1 - q^n)$ імкнецца

да ліку $\frac{b_1}{1 - q}$, што можна запісаць у выглядзе $S_n \rightarrow \frac{b_1}{1 - q}$ пры $n \rightarrow \infty$.

Лік $\frac{b_1}{1 - q}$ называюць сумай бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі (b_n) , у якой $|q| < 1$. Такім чынам, $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots = \frac{b_1}{1 - q}$.

Абазначым суму бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі літарай S і атрымаем формулу: $S = \frac{b_1}{1 - q}$.

Вылічым па гэтай формуле суму разрадных складаемых:
 $0,7777\dots = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \dots$

Складаемыя гэтай сумы ўтвараюць бясконца спадальную геаметрычную прагрэсію $\frac{7}{10}; \frac{7}{100}; \frac{7}{1000}; \dots$, першы член якой роўны $\frac{7}{10}$, а назоўнік роўны $\frac{1}{10}$.

Паколькі $|q| < 1$, то можна знайсці суму гэтай бясконцай прагрэсіі. Падставім $b_1 = \frac{7}{10}$ і $q = \frac{1}{10}$ у формулу $S = \frac{b_1}{1 - q}$ і атрымаем: $S = \frac{\frac{7}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{7}{9}$.

**Сума бясконца
спадальнай геаметрычнай
прагрэсіі**

$$S = \frac{b_1}{1 - q}, \quad |q| < 1$$

$$\text{Значыць, } 0,(7) = 0,7777\dots = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \dots = \frac{7}{9}.$$

Такім чынам, бясконцы перыядычны дзесятковы дроб $0,(7)$ можна запісаць у выглядзе звычайнага дробу $\frac{7}{9}$, г. зн. $0,(7) = \frac{7}{9}$.

Такім жа спосабам можна любы бясконцы перыядычны дзесятковы дроб запісаць у выглядзе звычайнага дробу.



Каб запісаць бясконцы перыядычны дзесятковы дроб у выглядзе звычайнага дробу, трэба:

① Запісаць лік у выглядзе сумы разрадных складаемых.

② Вылучыць суму бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі.

③ Назваць першы член b_1 і знайсці назоўнік гэтай прагрэсіі q .

④ Знайсці суму бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі па формуле $S = \frac{b_1}{1 - q}$.

⑤ Вылічыць суму першых складаемых і знойдзенага значэння сумы бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі.

Запішыце ў выглядзе звычайнага дробу лік $2,4(15)$.

$$\textcircled{1} \quad 2,4(15) = 2,41515\dots = 2 + 0,4 + 0,015 + 0,00015 + \dots$$

$$\textcircled{2} \quad S = 0,015 + 0,00015 + \dots$$

$$\textcircled{3} \quad b_1 = 0,015; \quad q = \frac{0,00015}{0,015} = 0,01.$$

$$\textcircled{4} \quad S = \frac{0,015}{1 - 0,01} = \frac{0,015}{0,99} = \frac{15}{990} = \frac{1}{66}.$$

$$\textcircled{5} \quad 2,4 + \frac{1}{66} = 2\frac{4}{10} + \frac{1}{66} = 2\frac{2}{5} + \frac{1}{66} = 2\frac{137}{330}.$$

$$2,4(15) = 2\frac{137}{330}.$$



Бясконца спадальная геаметрычная прагрэсія

1. У бясконцай геаметрычнай прагрэсіі $b_1 = -36$, $b_2 = 6$.

Ці з'яўляецца гэта прагрэсія бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіяй?

Знойдзем назоўнік прагрэсіі:

$$q = \frac{6}{-36} = -\frac{1}{6}.$$

Паколькі $|q| < 1$, то дадзеная прагрэсія з'яўляецца бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіяй.

<p>2. Ці з'яўляецца бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсія:</p> <p>а) $4; \frac{4}{3}; \frac{4}{9}; \frac{4}{27}; \dots$;</p> <p>б) $1; -\frac{1}{3}; \frac{1}{9}; -\frac{1}{27}; \dots$;</p> <p>в) $2; -4; 8; -16; \dots$?</p>	<p>а) Кожны член гэтай геаметрычнай прагрэсіі, пачынаючы з другога, роўны папярэдняму, памножанаму на лік $\frac{1}{3}$. Паколькі $q = \frac{1}{3} < 1$, то прагрэсія з'яўляецца бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіяй.</p> <p>б) Паколькі $q = \left -\frac{1}{3} \right = \frac{1}{3} < 1$, то прагрэсія з'яўляецца бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіяй.</p> <p>в) Назоўнік прагрэсіі $q = -2$. Паколькі $-2 > 1$, то прагрэсія не з'яўляецца бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіяй.</p>
Сума бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі	
<p>3. Знайдзіце суму бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі, у якой $b_1 = 5$, $q = -\frac{1}{2}$.</p>	<p>Па формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$ атрымаем:</p> $S = \frac{5}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{5}{\frac{3}{2}} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}.$
<p>4. У бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі $S = 90$, $q = 0,1$. Знайдзіце першы член гэтай прагрэсіі.</p>	<p>У формулу сумы бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі $S = \frac{b_1}{1-q}$ падставім $S = 90$, $q = 0,1$ і атрымаем</p> $90 = \frac{b_1}{1 - 0,1}.$ <p>Рэшым атрыманае ўраўненне:</p> $90 = \frac{b_1}{0,9}, \quad b_1 = 81.$
<p>5. Запішыце бясконцы перыядычны дзесятковы дроб $15,2(3)$ у выглядзе звычайнага дробу.</p>	<p>① $15,2(3) = 15 + 0,2 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + \dots$</p> <p>② $S = 0,03 + 0,003 + 0,0003 + \dots$</p> <p>③ $b_1 = 0,03; \quad q = \frac{0,003}{0,03} = 0,1.$</p> <p>④ $S = \frac{0,03}{1 - 0,1} = \frac{0,03}{0,9} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}.$</p> <p>⑤ $15,2 + \frac{1}{30} = 15\frac{1}{5} + \frac{1}{30} = 15\frac{7}{30}.$</p> $15,2(3) = 15\frac{7}{30}.$



1. Кожны член бясконцай паслядоўнасці, пачынаючы з другога, меншы за папярэдні ў 3 разы. Гэта паслядоўнасць: а) з'яўляецца арыфметычнай прагрэсіяй; б) з'яўляецца геаметрычнай прагрэсіяй; в) з'яўляецца бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіяй; г) не з'яўляецца прагрэсіяй. Выберыце правільны адказ.

2. Калі ў бясконцай геаметрычнай прагрэсіі $|q| < 1$, тады сума членаў гэтай прагрэсіі вылічваецца па формуле:

а) $S = b_1 \cdot q$; б) $S = b_1 : q$; в) $S = b_1 \cdot (q - 1)$; г) $S = \frac{b_1}{1 - q}$.

Выберыце правільны адказ.



4.283. Сярод дадзеных геаметрычных прагрэсій выберыце бясконца спадальныя:

- а) 3; 9; 27; 81; ...; б) 4; 1; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{16}$; ...;
 в) -5; 10; -20; 40; ...; г) 8; -4; 2; -1; $\frac{1}{2}$;

4.284. Якую формулу трэба прымяніць, каб знайсці суму бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі (b_n) з назоўнікам q ? Знайдзіце гэту суму, калі:

- а) $b_1 = 12$, $q = \frac{1}{4}$; б) $b_1 = -25$, $q = -\frac{2}{5}$;
 в) $b_1 = 21$, $q = -\frac{1}{3}$; г) $b_1 = -0,1$, $q = 0,9$.

4.285. Складзіце план рашэння і знайдзіце суму бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі:

- а) 100; 10; 1; ...; б) 0,2; 0,02; 0,002; ...;
 в) 9; -4,5; 2,25; ...; г) -3; -2; $-\frac{4}{3}$;

4.286. Знайдзіце суму, складаемымі якой з'яўляюцца паслядоўныя члены геаметрычнай прагрэсіі:

- а) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$; б) $3 - \frac{3}{5} + \frac{3}{25} - \frac{3}{125} + \dots$.

4.287. Прымяніце алгарытм для запісу ў выглядзе звычайнага дроби ліку:

- а) 0,(4); б) 0,(12); в) 0,(123);
 г) 14,(31); д) 6,3(8); е) 10,1(26).

4.288. Выкарыстайце формулу сумы бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі і знайдзіце першы член бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі, у якой:

- а) $S = 72$, $q = \frac{2}{9}$; б) $S = 8$, $q = -\frac{3}{4}$.

4.289. Знайдзіце назоўнік бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі, калі:

а) $S = -140$, $b_1 = -35$; б) $S = \frac{2}{3}$, $b_1 = 1$.

4.290. Вызначце, ці з'яўляецца бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсія:

а) 2 ; $\sqrt{2}$; 1 ; ...;

б) $-5\sqrt{5}$; 5 ; $-\sqrt{5}$; ...;

в) 1 ; $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{1}{3}$;

Выкарыстайце адпаведную формулу і знайдзіце яе суму.

4.291. Знайдзіце трэці член бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі, у якой назоўнік роўны $0,4$, а сума прагрэсіі роўна $33\frac{1}{3}$.

4.292. Знайдзіце суму бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі, калі:

а) $b_2 = 1\frac{2}{3}$, $q = \frac{2}{3}$; б) $b_4 = \frac{\sqrt{2}}{8}$, $q = \frac{1}{2}$.

4.293*. Знайдзіце першы член бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі, ведаючы, што сума членаў гэтай прагрэсіі роўна $12,6$, а адносіна 20 -га члена да 17 -га роўна $-\frac{8}{125}$.

4.294*. Знайдзіце назоўнік бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі, першы член якой у $1,5$ раза большы за суму астатніх яе членаў.



4.295. Якую формулу трэба прымяніць, каб знайсці суму бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі (b_n) з назоўнікам q ? Знайдзіце гэту суму, калі:

а) $b_1 = 30$, $q = \frac{2}{3}$; б) $b_1 = -36$, $q = -\frac{1}{4}$.

4.296. Складзіце план рашэння і знайдзіце суму бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі:

а) 125 ; 25 ; 5 ; ...;

б) $0,1$; $0,01$; $0,001$; ...;

в) 18 ; -6 ; 2 ;

4.297. Якую формулу можна выкарыстаць, каб знайсці суму $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$, складаемымі якой з'яўляюцца паслядоўныя члены геаметрычнай прагрэсіі? Знайдзіце гэту суму.

4.298. Выкарыстайце алгарытм і запішыце ў выглядзе звычайнага дроби лік:

а) 0,(6); б) 0,(51); в) 3,(26); г) 17,3(47).

4.299. Сума бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі роўна 3, а яе першы член роўны 4. Знайдзіце назоўнік прагрэсіі.

4.300. Сума бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі роўна 6, а яе назоўнік роўны $\frac{2}{3}$. Знайдзіце першы член прагрэсіі.

4.301. Складзіце план рашэння і знайдзіце суму бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі, калі $b_3 = -1,5$, $q = 0,25$.

4.302*. Знайдзіце назоўнік бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі, у якой сума першых двух членаў у 8 разоў большая за суму астатніх яе членаў.



4.303. Рашыце сістэму ўраўненняў
$$\begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 - y^2 = 8. \end{cases}$$

4.304. Вылічыце: $(2\sqrt{3} + 5)^2 + (10 - \sqrt{3})^2$.

4.305. Скараціце дроб $\frac{x^2 - 1}{17x - 2x^2 - 15}$.

4.306. Магазін прадаў на мінулым тыдні некаторую колькасць тавару. На гэтым тыдні запланавана прадаць таго ж тавару на 10 % менш, але па цане, на 10 % большай. Большую або меншую суму атрымае магазін ад продажу тавару на гэтым тыдні і на колькі працэнтаў?

Выніковая самаацэнка

Пасля вывучэння гэтага раздзела я павінен:

- ведаць спосабы задання паслядоўнасцей і ўмець прымяняць іх для рашэння задач;