

## РАЦЫЯНАЛЬНЫЯ ВЫРАЗЫ

### § 1. Рацыянальны дроб



1.1. Знайдзіце значэнне мнагачлена  $3x^3 - 2x^2 + x - 3$  пры:

- а)  $x = 1$ ;                      б)  $x = -1$ .

1.2. Сярод выразаў  $a^4 + 2a^3 - 7$ ;  $\frac{x^2}{4}$ ;  $b - c$ ;  $5$ ;  $x : (y - 1)$ ;  $m^2 - 7m$ ;  $y^4$  выберыце:

- а) адначлены;                      б) мнагачлены.

1.3. Знайдзіце абсяг вызначэння выразу:

- а)  $3 : (x - 8)$ ;                      б)  $5 : (x^2 + 7x)$ ;  
 в)  $(2x - 1) : (x^2 - 36)$ ;              г)  $2 : (x^2 + 1)$ .



Разгледзім задачу. Турысты за першы дзень праплылі на лодцы па цячэнні ракі  $m$  км, а за другі — на 6 км больш. Колькі часу працягвалася ўсё падарожжа, калі ўласная скорасць лодкі роўна  $v \frac{\text{км}}{\text{г}}$ , а скорасць цячэння ракі —  $2 \frac{\text{км}}{\text{г}}$ ?

*Рашэнне.* Паколькі за два дні турысты пераадолелі  $(2m + 6)$  км па цячэнні ракі, а скорасць руху лодкі па цячэнні ракі роўна  $(v + 2) \frac{\text{км}}{\text{г}}$ , то час, затрачаны на ўвесь шлях, роўны  $(2m + 6) : (v + 2)$  г. Дзель  $(2m + 6) : (v + 2)$  можна запісаць у выглядзе дробу  $\frac{2m + 6}{v + 2}$ .

*Адказ:*  $\frac{2m + 6}{v + 2}$  г.

Пры рашэнні гэтай задачы атрымалі дроб, у лічніку і назоўніку якога запісаны мнагачлены. Такі дроб называецца рацыянальным.

**Азначэнне.** Дроб, лічнік і назоўнік якога — мнагачлены, называецца **рацыянальным дробам**.

Напрыклад, выразы  $\frac{a - b}{a + b}$ ;  $\frac{x^2 - 1}{x^3 + 7}$ ;  $\frac{y - 6}{y}$ ;  $\frac{m}{n}$ ;  $\frac{c + 2d}{15}$ ;  $\frac{8}{11}$  з'яўляюцца рацыянальнымі дробамі.

Рацыянальны дроб з'яўляецца рацыянальным выразам.

Выразы, якія складаюцца з лікаў, зменных з дапамогай дзеянняў складання, аднімання, множання, дзялення, узв'язаныя

дзе  $n$  — натуральную ступень, называюць **рацыянальнымі выразамі**.

Калі рацыянальны выраз не змяшчае дзялення на выраз са зменнымі, то ён называецца **цэлым рацыянальным выразам**.

Напрыклад, выразы  $2x^2y$ ;  $(2+a)(-3d)$ ;  $4x^2-1$ ;  $\frac{5a}{3}-1$  з'яўляюцца цэлымі рацыянальнымі выразамі.

Рацыянальны выраз, які змяшчае дзяленне на выраз са зменнымі, называюць **дробавым рацыянальным выразам**.

Напрыклад, выразы  $\frac{x+3}{y-2}$ ;  
 $\frac{5}{ab}$ ;  $\frac{4x^2-y}{2x^2-3x+1}$ ;  $\frac{1}{a}-2,5$ ;  $\frac{2m}{n^2+4}$

з'яўляюцца дробавымі рацыянальнымі выразамі, паколькі змяшчаюць (акрамя дзяленняў складання, аднімання, множання) дзяленне на выраз са зменнымі.

Сувязь паміж паняццямі «рацыянальны дроб», «цэлы рацыянальны выраз» і «дробавы рацыянальны выраз» ілюструе рысунак 1.

Цэлыя рацыянальныя выразы маюць сэнс пры любых значэннях зменных, якія ўваходзяць у іх.

Напрыклад, абсягам вызначэння выразу  $9x^3-4x^2-1$  з'яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў.

### Цэлыя рацыянальныя выразы

$$8a^3b; x^2 - y^4; (a - b)^2;$$

$$\frac{m-n}{5}; (x-y):3;$$

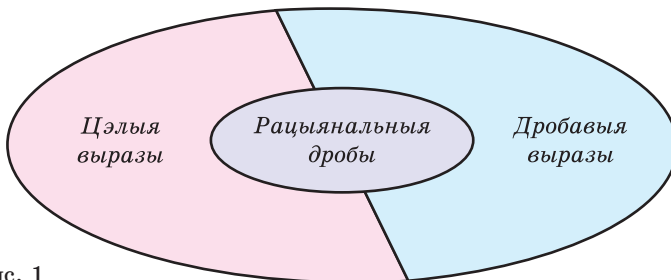
$$x + \frac{x^3-1}{12}$$

### Дробавыя рацыянальныя выразы

$$\frac{6}{x-9}; \frac{m}{n}; 5 + \frac{x^2-1}{2x+3};$$

$$\frac{15}{x^2-y^2} + \frac{6}{x}$$

Рацыянальныя выразы



Рыс. 1

Дробавыя рацыянальныя выразы маюць сэнс пры ўсіх значэннях зменных, акрамя тых, што ператвараюць назоўнікі дробаў у нуль.

Напрыклад, выраз  $8x - \frac{6}{x+5}$  пры  $x = -5$  не мае сэнсу, паколькі пры  $x = -5$  назоўнік дробу  $\frac{6}{x+5}$  ператвараецца ў нуль. Значыць, дадзены выраз мае сэнс пры ўсіх значэннях зменнай, акрамя  $-5$ .

Рацыянальны дроб  $\frac{4}{a^2-36}$  мае сэнс пры любых значэннях зменнай, акрамя лікаў  $-6$  і  $6$ , паколькі пры  $a = -6$  і пры  $a = 6$  назоўнік дробу ператвараецца ў нуль.



**Абсягам вызначэння рацыянальнага дробу з'яўляецца мноства ўсіх значэнняў зменных, што ўваходзяць у яго, акрамя тых, што ператвараюць яго назоўнік у нуль.**


*Прыклад.* Знайдзіце абсяг вызначэння рацыянальнага дробу:

а)  $\frac{5x}{x-4}$ ;      б)  $\frac{6y-1}{y(y+8)}$ ;      в)  $\frac{7a-4}{a^2+9}$ .

*Рашэнне.* а) Абсягам вызначэння рацыянальнага дробу  $\frac{5x}{x-4}$  з'яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў, акрамя ліку  $4$ , паколькі пры  $x = 4$  назоўнік дробу ператвараецца ў нуль. Можна запісаць:  $x \in (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$ .

б) Знайдзем, пры якіх значэннях зменнай назоўнік дробу  $\frac{6y-1}{y(y+8)}$  ператвараецца ў нуль. Для гэтага рэшым ураўненне  $y(y+8) = 0$ . Каранямі дадзенага ўраўнення з'яўляюцца лікі  $-8$  і  $0$ . Значыць, абсягам вызначэння дробу  $\frac{6y-1}{y(y+8)}$  з'яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў, акрамя лікаў  $-8$  і  $0$ , г. зн.  $y \in (-\infty; -8) \cup (-8; 0) \cup (0; +\infty)$ .

в) Паколькі выраз  $a^2+9$  з'яўляецца дадатным лікам пры любых значэннях зменнай, то няма такіх значэнняў зменнай, пры якіх назоўнік дробу  $\frac{7a-4}{a^2+9}$  быў бы роўны нулю. Значыць, рацыянальны дроб мае сэнс пры любых значэннях зменнай, г. зн. абсягам вызначэння дробу з'яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў,  $a \in \mathbf{R}$ .

 <b>Рацыянальныя выразы</b>	
<p><b>1. Якія з наступных выказаў:</b></p> <p>а) <math>6,7z + \frac{2}{3}xy</math>;</p> <p>б) <math>2\sqrt{xy}</math>;</p> <p>в) <math>\frac{x+y}{x-6}</math>;</p> <p>г) <math>4 + \frac{1}{30}x^2y</math>;</p> <p>д) <math>\sqrt{2x}</math> — з'яўляюцца рацыянальнымі?</p>	<p>Выразы а), в), г) і д) з'яўляюцца рацыянальнымі, паколькі складаюцца з лікаў, зменных і змяшчаюць дзеянні складання, аднімання, множання і дзялення.</p> <p>Выраз б) не з'яўляецца рацыянальным, паколькі змяшчае дзеянне здабывання караня з выразу са зменнымі.</p>
<p><b>2. Якія з наступных выказаў:</b></p> <p>а) <math>0,2x + \frac{x}{3}</math>;      б) <math>\frac{2x^2 - y^4}{x}</math>;</p> <p>в) <math>\frac{x-5y}{2x+y}</math>;      г) <math>\frac{4-y}{3}</math>;</p> <p>д) <math>\frac{y+5}{4x-6}</math> — з'яўляюцца дробавымі рацыянальнымі?</p>	<p>Выразы б), в), д) з'яўляюцца дробавымі рацыянальнымі, паколькі складаюцца з лікаў, зменных, натуральных ступеней зменных з дапамогай дзеянняў складання, аднімання, множання і змяшчаюць дзеянне дзялення на рацыянальны выраз са зменнымі.</p>
<p><b>3. Якія з наступных выказаў:</b></p> <p>а) <math>\frac{14c}{15}</math>;      б) <math>\frac{2x}{x^4+2}</math>;</p> <p>в) <math>\frac{6}{p-5}</math>;      г) <math>\frac{m}{6m^2+3}</math>;</p> <p>д) <math>\frac{8}{9c}</math> — з'яўляюцца рацыянальнымі дробамі?</p>	<p>Выразы а) — д) з'яўляюцца рацыянальнымі дробамі, паколькі кожны з іх уяўляе сабой дроб, лічнік і назоўнік якога з'яўляюцца мнагачленамі.</p>
<p><b>4. Знайдзіце значэнне выразу:</b></p> <p>а) <math>\frac{x+3}{x-3}</math> пры <math>x=0</math>;</p> <p>б) <math>a + \frac{8}{a-1}</math> пры <math>a = \frac{1}{2}</math>;</p> <p>в) <math>\frac{2m-n}{3m+2n}</math> пры <math>m=4, n=-5</math>.</p>	<p>а) Падставім <math>x=0</math> у выраз <math>\frac{x+3}{x-3}</math> і атрымаем: <math>\frac{x+3}{x-3} = \frac{0+3}{0-3} = -1</math>.</p> <p>б) Пры <math>a = \frac{1}{2}</math> маем:</p> $a + \frac{8}{a-1} = \frac{1}{2} + \frac{8}{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} + 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 16 = -15,5.$ <p>в) Калі <math>m=4, n=-5</math>, то <math>\frac{2m-n}{3m+2n} = \frac{2 \cdot 4 - (-5)}{3 \cdot 4 + 2 \cdot (-5)} = \frac{8+5}{12-10} = \frac{13}{2} = 6,5</math>.</p>

Абсяг вызначэння рацыянальнага выразу	
<p>5. Знайдзіце абсяг вызначэння рацыянальнага дроби:</p> <p>а) <math>\frac{x+5}{6-2x}</math>;</p> <p>б) <math>\frac{2x-7}{x(x+2)}</math>;</p> <p>в) <math>\frac{x+15}{x^2-16}</math>.</p>	<p>а) Знайдзем, пры якім значэнні зменнай назоўнік дроби ператвараецца ў нуль. Для гэтага рэшым ураўненне <math>6-2x=0</math>; <math>x=3</math>. Абсягам вызначэння дадзенага дроби з'яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў, акрамя ліку 3, г. зн. <math>x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)</math>;</p> <p>б) <math>x(x+2) \neq 0</math>; <math>x \neq 0</math>; <math>x \neq -2</math>. Абсягам вызначэння дадзенага дроби з'яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў, акрамя лікаў <math>-2</math> і <math>0</math>, г. зн. <math>x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; +\infty)</math>;</p> <p>в) <math>x^2-16 \neq 0</math>; <math>(x-4)(x+4) \neq 0</math>; <math>x \neq 4</math>, <math>x \neq -4</math>. Абсягам вызначэння дадзенага дроби з'яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў, акрамя лікаў <math>-4</math> і <math>4</math>. Значыць, <math>x \in (-\infty; -4) \cup (-4; 4) \cup (4; +\infty)</math>.</p>
<p>6. Знайдзіце абсяг вызначэння рацыянальнага выразу:</p> <p>а) <math>x^3-4x^2+2</math>;</p> <p>б) <math>\frac{5}{x-1} + \frac{x+6}{x+3}</math>.</p>	<p>а) Выраз <math>x^3-4x^2+2</math> з'яўляецца цэлым рацыянальным, яго абсягам вызначэння з'яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў, г. зн. <math>x \in \mathbf{R}</math>.</p> <p>б) Назоўнік першага дроби ператвараецца ў нуль пры <math>x=1</math>, а назоўнік другога дроби роўны нулю пры <math>x=-3</math>. Значыць, абсягам вызначэння дадзенага выразу з'яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў, акрамя лікаў <math>1</math> і <math>-3</math>. Такім чынам, <math>x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 1) \cup (1; +\infty)</math>.</p>

1. Ці праўда, што цэлы рацыянальны выраз не змяшчае дзеяння дзялення?
2. У якім абсягу на рысунку 1 знаходзяцца мнагачлены?



1.4. З выказаў  $\frac{5x}{7y^2}$ ;  $\frac{2a^3}{5} - \frac{b}{4}$ ;  $12 + \frac{m}{n}$ ;  $\frac{2}{9x-7}$ ;  $\frac{y-3}{y+3}$ ;  $2,4a^5b^6$ ;  
 $5\sqrt{ab}$ ;  $\frac{c^4+2c+3}{c}$ ;  $\frac{x^2-xy}{6}$ ;  $\frac{5}{7}$  выберыце: а) цэлыя рацыянальныя выразы; б) дробавыя рацыянальныя выразы; в) рацыянальныя дроби.

1.5. Прывядзіце прыклад рацыянальнага дробу, які з'яўляецца:

- а) цэлым рацыянальным выразам;  
 б) дробавым рацыянальным выразам.

1.6. Знайдзіце значэнне рацыянальнага дробу  $\frac{m^2 + 5m}{2m - 1}$  пры:

- а)  $m = -2$ ;                      б)  $m = 0$ .

1.7. Чаму роўна значэнне рацыянальнага дробу  $\frac{4a - b}{2a + 5b}$ , калі:

- а)  $a = -3, b = 1$ ;                      б)  $a = 0,1, b = -0,3$ ?

1.8. Вызначце, рацыянальным ці ірацыянальным лікам з'яўляецца значэнне выразу:

а)  $b - \frac{3b - 1}{b^2 + 1}$ , калі  $b = 7$ ;

б)  $\frac{x^3 - 2x}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{x}$ , калі  $x = \sqrt{3}$ ;

в)  $\frac{x + 5}{y} - \frac{y - 1}{x - 3}$ , калі  $x = -2,5, y = 10$ ;

г)  $\frac{a - b}{a + b} - \frac{a + b}{a - b}$ , калі  $a = \sqrt{10}, b = \sqrt{7}$ .

1.9. Прывядзіце прыклад значэнняў зменных  $a$  і  $b$ , пры якіх значэнне рацыянальнага дробу  $\frac{a + 1}{b}$  з'яўляецца:

- а) цэлым лікам;                                      б) дробавым лікам;  
 в) адмоўным лікам;                                      г) ірацыянальным лікам.

1.10. Знайдзіце значэнне функцыі  $y = \frac{x^2 - x}{x - 3}$  пры значэнні аргумента, роўным:

- а) 1;                      б)  $2\frac{1}{3}$ ;                      в) 1,5;                      г)  $\sqrt{2} + 3$ .

Выберыце сярод гэтых значэнняў: 1) цэлыя; 2) рацыянальныя; 3) ірацыянальныя.

1.11. Знайдзіце абсяг вызначэння рацыянальнага дробу:

а)  $\frac{x - 1}{x - 4}$ ;                      б)  $\frac{3c + 5}{1 - 5c}$ ;                      в)  $\frac{8m - 5}{m}$ ;                      г)  $\frac{8}{x(x + 2)}$ ;

д)  $\frac{12a + 7}{a^2 - 8a}$ ;                      е)  $\frac{8b - 1}{(b - 3)(b + 2)}$ ;                      ж)  $\frac{5y}{y^2 - 9}$ ;                      з)  $\frac{3a - 1}{a^2 - 7}$ ;

і)  $\frac{x + 4}{12}$ ;                      к)  $\frac{9}{n^2 + 7}$ ;                      л)  $\frac{6x}{2x^2 + 1}$ ;                      м)  $\frac{12c - 1}{c^2}$ .

1.12. Прывядзіце прыклад рацыянальнага дробу, абсягам вызначэння якога з'яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў, акрамя: а) ліку 5; б) лікаў  $-4$  і  $2$ ; в) лікаў  $0$  і  $15$ .

**1.13.** Знайдзіце, пры якіх значэннях зменнай мае сэнс выраз:

а)  $x^2 + 8x - 5$ ;      б)  $x + \frac{x-4}{7}$ ;      в)  $\frac{x-6}{x} + \frac{5}{x-2}$ ;  
 г)  $\frac{2x-1}{3x+2} - \frac{x-7}{x-4}$ ;      д)  $\frac{5}{x^2+3x} + \frac{8}{x-1}$ ;      е)  $\frac{9}{x^2-25} + \frac{7}{x^2+16}$ .

**1.14.** Знайдзіце абсяг вызначэння выразу:

а)  $\frac{3x-1}{x+2}$ ;      б)  $\frac{x-4}{x} + \frac{9x+1}{2x-3}$ ;      в)  $\frac{3}{8x^2+x}$ ;  
 г)  $\frac{x+4}{x^2-6x+9}$ ;      д)  $\frac{x}{x^2-1} + \frac{x}{9}$ ;      е)  $\frac{7}{x^2-5} + \frac{3}{x^2}$ .

**1.15\*.** Вядома, што  $3a - 12b = 1$ . Знайдзіце, калі гэта магчыма, значэнне выразу:

а)  $a - 4b$ ;      б)  $\frac{5}{6a-24b}$ ;      в)  $\frac{8b-2a}{7}$ ;      г)  $\frac{3}{a^2-8ab+16b^2}$ .

**1.16\*.** Высветліце, ці мае сэнс выраз  $\frac{x}{4-\frac{4}{x}}$  пры:

а)  $x = 0$ ;      б)  $x = 1$ ;      в)  $x = -1$ ;      г)  $x = 0,5$ .

Калі мае, то знайдзіце значэнне выразу пры гэтых значэннях зменных.

**1.17\*.** Знайдзіце абсяг вызначэння выразу:

а)  $\frac{x}{1-\frac{5}{x}}$ ;      б)  $\frac{x}{x-\frac{9}{x}}$ .



**1.18.** З выказаў  $12x^2 - xy$ ;  $\frac{a+2}{a-2}$ ;  $48n - \frac{m}{n}$ ;  $\frac{8x+2}{3x-4}$ ;  $\frac{y^2-18}{6}$ ;  $7\sqrt{mn}$ ;  $8m^2n$ ;  $\frac{b^3-5b+4}{3b}$ ;  $\frac{1}{9}$  выпішыце ўсе:

- а) цэлыя рацыянальныя выразы;  
 б) рацыянальныя дробы.

**1.19.** Вызначце, чаму роўна значэнне дробу  $\frac{x^2-5x}{x-1}$ , калі:

а)  $x = -3$ ;      б)  $x = 0$ .

**1.20.** Знайдзіце значэнне выразу  $\frac{3m+n}{m-3n}$  пры:

а)  $m = 2$ ,  $n = -5$ ;      б)  $m = -0,5$ ,  $n = -0,4$ .

**1.21.** Знайдзіце значэнне выразу:

а)  $\frac{5a-3}{4a+1} - 3a$ , калі  $a = 0,25$ ;      б)  $\frac{2\sqrt{5}}{b} - 3b^2$ , калі  $b = \sqrt{5}$ .

**1.22.** Вызначце, якія са значэнняў функцыі  $y = \frac{2x-1}{x^2+5}$  пры значэнні аргумента, роўным: а)  $-2$ ; б)  $0,5$ ; в)  $\sqrt{3}$ , — з'яўляюцца цэлымі; рацыянальнымі; ірацыянальнымі лікамі.

**1.23.** Знайдзіце абсяг вызначэння рацыянальнага дробу:

а)  $\frac{a+4}{a-6}$ ;      б)  $\frac{9x-5}{2x+1}$ ;      в)  $\frac{7n+4}{n}$ ;      г)  $\frac{12y-1}{y(y-3)}$ ;

д)  $\frac{9}{c^2-8c}$ ;      е)  $\frac{x+3}{(x-5)(x+1)}$ ;      ж)  $\frac{9d}{d^2-16}$ ;      з)  $\frac{15c+2}{c^2-5}$ ;

і)  $\frac{a^2-9}{8}$ ;      к)  $\frac{x-6}{x^2+5}$ ;      л)  $\frac{8m}{3m^2+2}$ ;      м)  $\frac{3x-5}{x^2}$ .

**1.24.** Знайдзіце, пры якіх значэннях зменнай мае сэнс выраз:

а)  $x^2 - 9x + 1$ ;      б)  $3x - \frac{8x+1}{5}$ ;      в)  $\frac{x+7}{x-5} - \frac{2}{x}$ ;

г)  $\frac{x+4}{5x-1} + \frac{6x}{x+2}$ ;      д)  $\frac{12}{x^2-8x} + \frac{5}{x+6}$ ;      е)  $\frac{7}{x^2-36} - \frac{8}{x^2+49}$ .

**1.25\*.** Знайдзіце, калі гэта магчыма, значэнне выразу  $\frac{x}{x - \frac{16}{x}}$  пры:

а)  $x = 0$ ;      б)  $x = 1$ ;      в)  $x = 4$ ;      г)  $x = -4$ .



**1.26.** Сярод дробаў  $\frac{5}{45}$ ;  $\frac{3}{17}$ ;  $\frac{2}{21}$ ;  $\frac{7}{91}$ ;  $\frac{6}{48}$  выберыце ўсе нескарачальныя дробы.

**1.27.** Пазбаўцеся ад ірацыянальнасці ў назоўніку дробу:

а)  $\frac{8}{\sqrt{2}}$ ;      б)  $\frac{12}{\sqrt{5}-1}$ .

**1.28.** Раскладзіце на множнікі квадратны трохчлен:

а)  $x^2 - 4x + 3$ ;      б)  $2x^2 + 5x + 3$ .

**1.29.** У першы дзень у краме прадалі 60 % тавару, што паступіў, а ў другі — 30 % астачы. Знайдзіце, колькі працэнтаў тавару, што паступіў, засталася непрададзеным.