

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

§ 1. Рациональная дробь



1.1. Найдите значение многочлена $3x^3 - 2x^2 + x - 3$ при:

- а) $x = 1$; б) $x = -1$.

1.2. Из выражений $a^4 + 2a^3 - 7$; $\frac{x^2}{4}$; $b - c$; 5 ; $x : (y - 1)$; $m^2 - 7m$; y^4 выберите:

- а) одночлены; б) многочлены.

1.3. Найдите область определения выражения:

- а) $3 : (x - 8)$; б) $5 : (x^2 + 7x)$;
в) $(2x - 1) : (x^2 - 36)$; г) $2 : (x^2 + 1)$.



Рассмотрим задачу. Туристы в первый день проплыли на лодке по течению реки m км, а во второй — на 6 км больше. Сколько времени продолжалось все путешествие, если собственная скорость лодки равна $v \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а скорость течения реки — $2 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$?

Решение. Так как за два дня туристы преодолели $(2m + 6)$ км по течению реки, а скорость движения лодки по течению реки равна $(v + 2) \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, то время, затраченное на весь путь, равно $(2m + 6) : (v + 2)$ ч. Частное $(2m + 6) : (v + 2)$ можно записать в виде дроби $\frac{2m + 6}{v + 2}$.

Ответ: $\frac{2m + 6}{v + 2}$ ч.

При решении этой задачи получили дробь, в числителе и знаменателе которой записаны многочлены. Такая дробь называется рациональной.

Определение. Дробь, числитель и знаменатель которой — многочлены, называется **рациональной дробью**.

Например, выражения $\frac{a - b}{a + b}$; $\frac{x^2 - 1}{x^3 + 7}$; $\frac{y - 6}{y}$; $\frac{m}{n}$; $\frac{c + 2d}{15}$; $\frac{8}{11}$ являются рациональными дробями.

Рациональная дробь является рациональным выражением.

Выражения, составленные из чисел, переменных с помощью действий сложения, вычитания, умножения, деления,

возведения в натуральную степень, называют **рациональными выражениями**.

Если рациональное выражение **не содержит деления на выражение с переменными**, то оно называется **целым рациональным выражением**.

Например, выражения $2x^2y$; $(2+a)(-3d)$; $4x^2 - 1$; $\frac{5a}{3} - 1$ являются целыми рациональными выражениями.

Рациональное выражение, **содержащее деление на выражение с переменными**, называют **дробным рациональным выражением**.

Например, выражения $\frac{x+3}{y-2}$;
 $\frac{5}{ab}$; $\frac{4x^2-y}{2x^2-3x+1}$; $\frac{1}{a} - 2,5$; $\frac{2m}{n^2+4}$

являются дробными рациональными выражениями, поскольку содержат (кроме действий сложения, вычитания, умножения) деление на выражение с переменными.

Связь между понятиями «рациональная дробь», «целое рациональное выражение» и «дробное рациональное выражение» иллюстрирует рисунок 1.

Целые рациональные выражения имеют смысл при любых значениях входящих в них переменных.

Например, область определения выражения $9x^3 - 4x^2 - 1$ является множество всех действительных чисел.

Целые рациональные выражения

$$8a^3b; x^2 - y^4; (a-b)^2;$$

$$\frac{m-n}{5}; (x-y):3;$$

$$x + \frac{x^3-1}{12}$$

Дробные рациональные выражения

$$\frac{6}{x-9}; \frac{m}{n}; 5 + \frac{x^2-1}{2x+3};$$

$$\frac{15}{x^2-y^2} + \frac{6}{x}$$

Рациональные выражения



Рис. 1

Дробные рациональные выражения имеют смысл при всех значениях переменных, кроме тех, которые обращают знаменатели дробей в нуль.

Например, выражение $8x - \frac{6}{x+5}$ при $x = -5$ не имеет смысла, так как при $x = -5$ знаменатель дроби $\frac{6}{x+5}$ обращается в нуль. Значит, данное выражение имеет смысл при всех значениях переменной, кроме -5 .

Рациональная дробь $\frac{4}{a^2 - 36}$ имеет смысл при любых значениях переменной, кроме чисел -6 и 6 , так как при $a = -6$ и при $a = 6$ знаменатель дроби обращается в нуль.



Областью определения рациональной дроби является множество всех значений входящих в нее переменных, кроме тех, которые обращают ее знаменатель в нуль.

Пример. Найдите область определения рациональной дроби:

а) $\frac{5x}{x-4}$; б) $\frac{6y-1}{y(y+8)}$; в) $\frac{7a-4}{a^2+9}$.

Решение. а) Областью определения рациональной дроби $\frac{5x}{x-4}$ является множество всех действительных чисел, кроме числа 4 , так как при $x = 4$ знаменатель дроби обращается в нуль. Можно записать: $x \in (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$.

б) Найдем, при каких значениях переменной знаменатель дроби $\frac{6y-1}{y(y+8)}$ обращается в нуль. Для этого решим уравнение $y(y+8) = 0$. Корнями данного уравнения являются числа -8 и 0 . Значит, областью определения дроби $\frac{6y-1}{y(y+8)}$ является множество всех действительных чисел, кроме чисел -8 и 0 , т. е. $y \in (-\infty; -8) \cup (-8; 0) \cup (0; +\infty)$.

в) Поскольку выражение $a^2 + 9$ является положительным числом при любых значениях переменной, то нет таких значений переменной, при которых знаменатель дроби $\frac{7a-4}{a^2+9}$ был бы равен нулю. Значит, рациональная дробь имеет смысл при любых значениях переменной, т. е. областью определения дроби является множество всех действительных чисел, $a \in \mathbf{R}$.

 Рациональные выражения	
<p>1. Какие из следующих выражений:</p> <p>а) $6,7z + \frac{2}{3}xy$;</p> <p>б) $2\sqrt{xy}$;</p> <p>в) $\frac{x+y}{x-6}$;</p> <p>г) $4 + \frac{1}{30}x^2y$;</p> <p>д) $\sqrt{2x}$ — являются рациональными?</p>	<p>Выражения а), в), г) и д) являются рациональными, так как составлены из чисел, переменных и содержат действия сложения, вычитания, умножения и деления.</p> <p>Выражение б) не является рациональным, так как содержит действие извлечения корня из выражения с переменными.</p>
<p>2. Какие из следующих выражений:</p> <p>а) $0,2x + \frac{x}{3}$; б) $\frac{2x^2 - y^4}{x}$;</p> <p>в) $\frac{x-5y}{2x+y}$; г) $\frac{4-y}{3}$;</p> <p>д) $\frac{y+5}{4x-6}$ — являются дробными рациональными?</p>	<p>Выражения б), в), д) являются дробными рациональными, так как составлены из чисел, переменных, натуральных степеней переменных с помощью действий сложения, вычитания, умножения и содержат действие деления на рациональное выражение с переменными.</p>
<p>3. Какие из следующих выражений:</p> <p>а) $\frac{14c}{15}$; б) $\frac{2x}{x^4+2}$;</p> <p>в) $\frac{6}{p-5}$; г) $\frac{m}{6m^2+3}$;</p> <p>д) $\frac{8}{9c}$ — являются рациональными дробями?</p>	<p>Выражения а) — д) являются рациональными дробями, так как каждое из них представляет собой дробь, числитель и знаменатель которой являются многочленами.</p>
<p>4. Найдите значение выражения:</p> <p>а) $\frac{x+3}{x-3}$ при $x=0$;</p> <p>б) $a + \frac{8}{a-1}$ при $a = \frac{1}{2}$;</p> <p>в) $\frac{2m-n}{3m+2n}$ при $m=4, n=-5$.</p>	<p>а) Подставим $x=0$ в выражение $\frac{x+3}{x-3}$ и получим: $\frac{x+3}{x-3} = \frac{0+3}{0-3} = -1$.</p> <p>б) При $a = \frac{1}{2}$ имеем:</p> $a + \frac{8}{a-1} = \frac{1}{2} + \frac{8}{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} + 8 : \left(-\frac{1}{2}\right) =$ $= \frac{1}{2} - 16 = -15,5.$ <p>в) Если $m=4, n=-5$, то $\frac{2m-n}{3m+2n} =$</p> $= \frac{2 \cdot 4 - (-5)}{3 \cdot 4 + 2 \cdot (-5)} = \frac{8+5}{12-10} = \frac{13}{2} = 6,5.$

Область определения рационального выражения	
<p>5. Найдите область определения рациональной дроби:</p> <p>а) $\frac{x+5}{6-2x}$;</p> <p>б) $\frac{2x-7}{x(x+2)}$;</p> <p>в) $\frac{x+15}{x^2-16}$.</p>	<p>а) Найдем, при каком значении переменной знаменатель дроби обращается в нуль. Для этого решим уравнение $6-2x=0$; $x=3$. Областью определения данной дроби является множество всех действительных чисел, кроме числа 3, т. е. $x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$;</p> <p>б) $x(x+2) \neq 0$; $x \neq 0$; $x \neq -2$. Областью определения данной дроби является множество всех действительных чисел, кроме чисел -2 и 0, т. е. $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; +\infty)$;</p> <p>в) $x^2-16 \neq 0$; $(x-4)(x+4) \neq 0$; $x \neq 4$, $x \neq -4$. Областью определения данной дроби является множество всех действительных чисел, кроме чисел -4 и 4. Значит, $x \in (-\infty; -4) \cup (-4; 4) \cup (4; +\infty)$.</p>
<p>6. Найдите область определения рационального выражения:</p> <p>а) x^3-4x^2+2;</p> <p>б) $\frac{5}{x-1} + \frac{x+6}{x+3}$.</p>	<p>а) Выражение x^3-4x^2+2 является целым рациональным, его областью определения является множество всех действительных чисел, т. е. $x \in \mathbf{R}$.</p> <p>б) Знаменатель первой дроби обращается в нуль при $x=1$, а знаменатель второй дроби равен нулю при $x=-3$. Значит, областью определения данного выражения является множество всех действительных чисел, кроме чисел 1 и -3. Таким образом, $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 1) \cup (1; +\infty)$.</p>

- ?** 1. Верно ли, что целое рациональное выражение не содержит действия деления?
 2. В какой области на рисунке 1 находятся многочлены?



1.4. Из выражений $\frac{5x}{7y^2}$; $\frac{2a^3}{5} - \frac{b}{4}$; $12 + \frac{m}{n}$; $\frac{2}{9x-7}$; $\frac{y-3}{y+3}$; $2,4a^5b^6$; $5\sqrt{ab}$; $\frac{c^4+2c+3}{c}$; $\frac{x^2-xy}{6}$; $\frac{5}{7}$ выберите: а) целые рациональные выражения; б) дробные рациональные выражения; в) рациональные дроби.

1.5. Приведите пример рациональной дроби, являющейся:

- а) целым рациональным выражением;
 б) дробным рациональным выражением.

1.6. Найдите значение рациональной дроби $\frac{m^2+5m}{2m-1}$ при:

- а) $m = -2$; б) $m = 0$.

1.7. Чему равно значение рациональной дроби $\frac{4a-b}{2a+5b}$, если:

- а) $a = -3, b = 1$; б) $a = 0,1, b = -0,3$?

1.8. Определите, рациональным или иррациональным числом является значение выражения:

- а) $b - \frac{3b-1}{b^2+1}$, если $b = 7$;
 б) $\frac{x^3-2x}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{x}$, если $x = \sqrt{3}$;
 в) $\frac{x+5}{y} - \frac{y-1}{x-3}$, если $x = -2,5, y = 10$;
 г) $\frac{a-b}{a+b} - \frac{a+b}{a-b}$, если $a = \sqrt{10}, b = \sqrt{7}$.

1.9. Приведите пример значений переменных a и b , при которых значение рациональной дроби $\frac{a+1}{b}$ является:

- а) целым числом; б) дробным числом;
 в) отрицательным числом; г) иррациональным числом.

1.10. Найдите значение функции $y = \frac{x^2-x}{x-3}$ при значении аргумента, равном:

- а) 1; б) $2\frac{1}{3}$; в) 1,5; г) $\sqrt{2} + 3$.

Выберите из этих значений: 1) целые; 2) рациональные; 3) иррациональные.

1.11. Найдите область определения рациональной дроби:

- а) $\frac{x-1}{x-4}$; б) $\frac{3c+5}{1-5c}$; в) $\frac{8m-5}{m}$; г) $\frac{8}{x(x+2)}$;
 д) $\frac{12a+7}{a^2-8a}$; е) $\frac{8b-1}{(b-3)(b+2)}$; ж) $\frac{5y}{y^2-9}$; з) $\frac{3a-1}{a^2-7}$;
 и) $\frac{x+4}{12}$; к) $\frac{9}{n^2+7}$; л) $\frac{6x}{2x^2+1}$; м) $\frac{12c-1}{c^2}$.

1.12. Приведите пример рациональной дроби, областью определения которой является множество всех действительных чисел, кроме: а) числа 5; б) чисел -4 и 2 ; в) чисел 0 и 15 .

1.13. Найдите, при каких значениях переменной имеет смысл выражение:

а) $x^2 + 8x - 5$; б) $x + \frac{x-4}{7}$; в) $\frac{x-6}{x} + \frac{5}{x-2}$;
 г) $\frac{2x-1}{3x+2} - \frac{x-7}{x-4}$; д) $\frac{5}{x^2+3x} + \frac{8}{x-1}$; е) $\frac{9}{x^2-25} + \frac{7}{x^2+16}$.

1.14. Найдите область определения выражения:

а) $\frac{3x-1}{x+2}$; б) $\frac{x-4}{x} + \frac{9x+1}{2x-3}$; в) $\frac{3}{8x^2+x}$;
 г) $\frac{x+4}{x^2-6x+9}$; д) $\frac{x}{x^2-1} + \frac{x}{9}$; е) $\frac{7}{x^2-5} + \frac{3}{x^2}$.

1.15*. Известно, что $3a - 12b = 1$. Найдите, если это возможно, значение выражения:

а) $a - 4b$; б) $\frac{5}{6a-24b}$; в) $\frac{8b-2a}{7}$; г) $\frac{3}{a^2-8ab+16b^2}$.

1.16*. Выясните, имеет ли смысл выражение $\frac{x}{4-\frac{4}{x}}$ при:

а) $x = 0$; б) $x = 1$; в) $x = -1$; г) $x = 0,5$.

Если имеет, то найдите значение выражения при этих значениях переменных.

1.17*. Найдите область определения выражения:

а) $\frac{x}{1-\frac{5}{x}}$; б) $\frac{x}{x-\frac{9}{x}}$.



1.18. Из выражений $12x^2 - xy$; $\frac{a+2}{a-2}$; $48n - \frac{m}{n}$; $\frac{8x+2}{3x-4}$; $\frac{y^2-18}{6}$; $7\sqrt{mn}$; $8m^2n$; $\frac{b^3-5b+4}{3b}$; $\frac{1}{9}$ выпишите все:

- а) целые рациональные выражения;
 б) рациональные дроби.

1.19. Определите, чему равно значение дроби $\frac{x^2-5x}{x-1}$, если:

а) $x = -3$; б) $x = 0$.

1.20. Найдите значение выражения $\frac{3m+n}{m-3n}$ при:

а) $m = 2$, $n = -5$; б) $m = -0,5$, $n = -0,4$.

1.21. Найдите значение выражения:

а) $\frac{5a-3}{4a+1} - 3a$, если $a = 0,25$; б) $\frac{2\sqrt{5}}{b} - 3b^2$, если $b = \sqrt{5}$.

1.22. Определите, какие из значений функции $y = \frac{2x-1}{x^2+5}$

при значении аргумента, равном: а) -2 ; б) $0,5$; в) $\sqrt{3}$ — являются целыми; рациональными; иррациональными числами.

1.23. Найдите область определения рациональной дроби:

а) $\frac{a+4}{a-6}$; б) $\frac{9x-5}{2x+1}$; в) $\frac{7n+4}{n}$; г) $\frac{12y-1}{y(y-3)}$;

д) $\frac{9}{c^2-8c}$; е) $\frac{x+3}{(x-5)(x+1)}$; ж) $\frac{9d}{d^2-16}$; з) $\frac{15c+2}{c^2-5}$;

и) $\frac{a^2-9}{8}$; к) $\frac{x-6}{x^2+5}$; л) $\frac{8m}{3m^2+2}$; м) $\frac{3x-5}{x^2}$.

1.24. Найдите, при каких значениях переменной имеет смысл выражение:

а) $x^2 - 9x + 1$; б) $3x - \frac{8x+1}{5}$; в) $\frac{x+7}{x-5} - \frac{2}{x}$;

г) $\frac{x+4}{5x-1} + \frac{6x}{x+2}$; д) $\frac{12}{x^2-8x} + \frac{5}{x+6}$; е) $\frac{7}{x^2-36} - \frac{8}{x^2+49}$.

1.25*. Найдите, если это возможно, значение выражения $\frac{x}{x - \frac{16}{x}}$ при:

а) $x = 0$; б) $x = 1$; в) $x = 4$; г) $x = -4$.



1.26. Из дробей $\frac{5}{45}$; $\frac{3}{17}$; $\frac{2}{21}$; $\frac{7}{91}$; $\frac{6}{48}$ выберите все несократимые дроби.

1.27. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{8}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{12}{\sqrt{5}-1}$.

1.28. Разложите на множители квадратный трехчлен:

а) $x^2 - 4x + 3$; б) $2x^2 + 5x + 3$.

1.29. В первый день магазином продано 60 % поступившего товара, а во второй — 30 % остатка. Найдите, сколько процентов поступившего товара осталось непроданным.