

1.204*. Представьте частное $\frac{x^2 + ax + bx + ab}{x^2 - ax + cx - ac} : \frac{x^2 - a^2}{x^2 - c^2}$ в виде несократимой рациональной дроби.

1.205*. Выполните умножение рациональных выражений:

$$\frac{a - b + c}{a^2 - b^2 + c^2 + 2ac} \cdot (a^2 + ab - bc - c^2).$$



1.206. Определите порядок действий в выражении $(\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3} \cdot 0,15) : 0,3$ и найдите его значение.

1.207. График функции $f(x) = x^3$ проходит через точку, абсцисса которой равна 4. Чему равна ордината этой точки? Найдите значение выражения $f(-1) + f(0) - f(2)$.

1.208. Выполните действия:

а) $(5\frac{1}{3})^5 \cdot (\frac{3}{16})^5$; б) $\frac{4^7 \cdot 64}{16^4}$.

1.209. Вычислите, используя свойства квадратных корней:

а) $\sqrt{50 \cdot 44 \cdot 550}$; б) $3\sqrt{8} \cdot 5\sqrt{26} \cdot 2\sqrt{13}$.

1.210. Решите двойное неравенство $-1 \leq 2 - 5x < 3$.

1.211. В школьную библиотеку доставили упаковки с новыми учебниками. Число учебников в каждой упаковке на 15 меньше числа упаковок. Сколько учебников в одной упаковке, если всего доставлено 700 учебников?

§ 5. Преобразования рациональных выражений



1.212. Найдите значение выражения $4\frac{8}{11} \cdot \frac{6}{13} - 1\frac{8}{11} \cdot \frac{1}{26}$.

1.213. Упростите выражение:

а) $\sqrt{(-3,47)^2}$; б) $\sqrt{y^2}$, если $y > 0$.

1.214. Вычислите: $4^7 \cdot (\frac{1}{2})^{-4} : (-2)^{15}$.



При решении многих задач требуется упрощать рациональные выражения, приводя их к рациональным дробям. Для этого выполняют преобразования рациональных выражений.



Чтобы преобразовать рациональное выражение, нужно:

<p>① Установить порядок действий в выражении.</p> <p>② Выполнить действия по порядку, используя правила сложения, вычитания, умножения и деления рациональных дробей.</p>	<p>Упростите выражение</p> $\frac{m}{n} : \left(\frac{3m}{n} - \frac{m}{3n} \right).$ <p>2) 1)</p> <p>① $\frac{m}{n} : \left(\frac{3m}{n} - \frac{m}{3n} \right).$</p> <p>② 1) $\frac{3m}{n} - \frac{m}{3n} = \frac{9m - m}{3n} = \frac{8m}{3n};$</p> <p>2) $\frac{m}{n} : \frac{8m}{3n} = \frac{m}{n} \cdot \frac{3n}{8m} = \frac{3}{8}.$</p>
---	---

Пример 1. Представьте выражение $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \cdot \frac{b}{a-b}$ в виде рациональной дроби.

Решение. ① Сначала необходимо выполнить вычитание выражений, стоящих в скобках, а затем выполнить умножение.

$$\begin{aligned} \text{② 1) } \frac{a}{b} - \frac{b}{a} &= \frac{a^2}{ba} - \frac{b^2}{ab} = \frac{(a-b)(a+b)}{ab}; \\ \text{2) } \frac{(a-b)(a+b)}{ab} \cdot \frac{b}{a-b} &= \frac{(a-b)(a+b)b}{ab(a-b)} = \frac{a+b}{a}. \end{aligned}$$

Преобразование рационального выражения можно выполнять не по действиям, а «цепочкой». В данном случае получим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \cdot \frac{b}{a-b} &= \left(\frac{a^2}{ba} - \frac{b^2}{ab} \right) \cdot \frac{b}{a-b} = \\ &= \left(\frac{a^2 - b^2}{ab} \right) \cdot \frac{b}{a-b} = \frac{(a-b)(a+b)b}{ab(a-b)} = \frac{a+b}{a}. \end{aligned}$$

Пример 2. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{2}{2x+y} - \frac{1}{2x-y} - \frac{3y}{y^2-4x^2} \right) \cdot \left(\frac{y^2}{8x^2} - \frac{1}{2} \right) \text{ при } x = \frac{1}{8}.$$

Решение. Упростим выражение, выполнив действия по порядку:

$$\begin{aligned} \text{1) } \frac{2}{2x+y} - \frac{1}{2x-y} - \frac{3y}{y^2-4x^2} &= \frac{2}{2x+y} - \frac{1}{2x-y} + \frac{3y}{4x^2-y^2} = \\ &= \frac{2(2x-y) - (2x+y) + 3y}{(2x+y)(2x-y)} = \frac{4x-2y-2x-y+3y}{(2x+y)(2x-y)} = \frac{2x}{(2x-y)(2x-y)}; \\ \text{2) } \frac{y^2}{8x^2} - \frac{1}{2} &= \frac{y^2-4x^2}{8x^2} = -\frac{4x^2-y^2}{8x^2} = -\frac{(2x-y)(2x+y)}{8x^2}; \\ \text{3) } \frac{2x}{(2x-y)(2x-y)} \cdot \left(-\frac{(2x-y)(2x+y)}{8x^2} \right) &= -\frac{1}{4x}. \end{aligned}$$

При $x = \frac{1}{8}$ получим: $-\frac{1}{4x} = -\frac{8}{4} = -2$.

Преобразования рациональных выражений можно выполнять наряду с другими, ранее изученными преобразованиями.

Пример 3. Упростите выражение $(a^{-1} + a^{-2}) : \frac{a^2-1}{a} - \frac{1}{a-1}$, приведя его к рациональной дроби.

Решение. 1) $a^{-1} + a^{-2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} = \frac{a+1}{a^2}$;

2) $\frac{a+1}{a^2} : \frac{a^2-1}{a} = \frac{a+1}{a^2} \cdot \frac{a}{a^2-1} = \frac{(a+1) \cdot a}{a^2(a-1)(a+1)} = \frac{1}{a(a-1)}$;

3) $\frac{1}{a(a-1)} - \frac{1}{a-1} = \frac{1}{a(a-1)} - \frac{1 \cdot a}{(a-1)a} = \frac{1-a}{(a-1)a} = -\frac{a-1}{(a-1)a} = -\frac{1}{a}$.

Правила преобразования рациональных выражений можно использовать и для преобразования выражений, содержащих корни.

Пример 4. Сократите дробь:

а) $\frac{x-3\sqrt{x}}{5\sqrt{x}}$; б) $\frac{3\sqrt{a}-a}{a-9}$; в) $\frac{b-2\sqrt{b}+1}{\sqrt{b}-b}$.

Решение. а) $\frac{x-3\sqrt{x}}{5\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x})^2-3\sqrt{x}}{5\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{5\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-3}{5}$;

б) $\frac{3\sqrt{a}-a}{a-9} = \frac{3\sqrt{a}-(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{a})^2-9} = \frac{\sqrt{a}(3-\sqrt{a})}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)} = -\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-3)}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)} = -\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3}$;

в) $\frac{b-2\sqrt{b}+1}{\sqrt{b}-b} = \frac{(\sqrt{b}-1)^2}{\sqrt{b}(1-\sqrt{b})} = \frac{(1-\sqrt{b})^2}{\sqrt{b}(1-\sqrt{b})} = \frac{1-\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$.

Пример 5. Упростите выражение $\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Решение. 1) $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} =$
 $= \frac{(\sqrt{x}+1)^2 - (\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x})^2 - 1} = \frac{x+2\sqrt{x}+1 - x+2\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{4\sqrt{x}}{x-1}$;

2) $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x})^2 - 1}{\sqrt{x}} = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$;

3) $\frac{4\sqrt{x}}{x-1} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x}} = 4$.

 Преобразования рациональных выражений	
<p>1. Представьте выражение</p> $\left(1 - \frac{2a}{b} + \frac{a^2}{b^2}\right) \cdot \frac{b}{a-b}$ <p>в виде дроби.</p>	<p>1) $1 - \frac{2a}{b} + \frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2}{b^2} - \frac{2ab}{b^2} + \frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2 - 2ab + a^2}{b^2} = \frac{(a-b)^2}{b^2};$</p> <p>2) $\frac{(a-b)^2}{b^2} \cdot \frac{b}{a-b} = \frac{(a-b)^2 \cdot b}{b^2 \cdot (a-b)} = \frac{a-b}{b}.$</p>
<p>2. Найдите значение выражения</p> $\left(a + 1 + \frac{1}{a-1}\right) : \frac{a^2}{1-2a+a^2}$ <p>при $a = -2, 13$.</p>	<p>Преобразуем данное выражение «цепочкой»:</p> $\left(a + 1 + \frac{1}{a-1}\right) : \frac{a^2}{1-2a+a^2} = \frac{(a+1)(a-1)+1}{a-1} : \frac{a^2}{(a-1)^2} = \frac{a^2-1+1}{a-1} \cdot \frac{(a-1)^2}{a^2} = \frac{a^2 \cdot (a-1)^2}{(a-1) \cdot a^2} = a-1.$ <p>При $a = -2, 13$ получим: $a-1 = -2, 13 - 1 = -3, 13.$</p>
<p>3. Упростите выражение</p> $\left(\frac{a-4}{a^2-2a+1} - \frac{a+2}{a^2+a-2}\right) : \frac{1}{(2a-2)^2}.$	<p>1) Корнями квадратного трехчлена $a^2 + a - 2$ являются числа $a_1 = -2, a_2 = 1$, значит, $a^2 + a - 2 = (a+2)(a-1)$, тогда:</p> $\frac{a-4}{a^2-2a+1} - \frac{a+2}{a^2+a-2} = \frac{a-4}{(a-1)^2} - \frac{a+2}{(a+2)(a-1)} = \frac{a-4}{(a-1)^2} - \frac{1}{a-1} = \frac{a-4-(a-1)}{(a-1)^2} = \frac{-3}{(a-1)^2};$ <p>2) $\frac{-3}{(a-1)^2} : \frac{1}{(2a-2)^2} = \frac{-3}{(a-1)^2} \cdot \frac{(2a-2)^2}{1} = \frac{-3(2a-2)^2}{(a-1)^2} = \frac{-3 \cdot 4(a-1)^2}{(a-1)^2} = -12.$</p>

<p>4. Докажите, что значение выражения</p> $\left(\frac{4y}{x^2 - 3xy} - \frac{x}{xy - 3y^2} \right) : \frac{x^2 - 4y^2}{3xy^2 - x^2y}$ <p>не зависит от значений переменных.</p>	<p>Значение выражения при различных значениях переменных из области его определения можно найти, предварительно упростив его:</p> <p>1) $\frac{4y}{x^2 - 3xy} - \frac{x}{xy - 3y^2} =$ $= \frac{4y}{x(x - 3y)} - \frac{x}{y(x - 3y)} =$ $= \frac{4y^2 - x^2}{xy(x - 3y)};$</p> <p>2) $\frac{4y^2 - x^2}{xy(x - 3y)} : \frac{x^2 - 4y^2}{3xy^2 - x^2y} =$ $= \frac{4y^2 - x^2}{xy(x - 3y)} \cdot \frac{xy(3y - x)}{x^2 - 4y^2} =$ $= \frac{(4y^2 - x^2) \cdot xy(3y - x)}{xy(x - 3y) \cdot (x^2 - 4y^2)} =$ $= \frac{xy(x^2 - 4y^2)(x - 3y)}{xy(x - 3y)(x^2 - 4y^2)} = 1.$</p> <p>Получили, что результат упрощения равен числу 1, значит, при любых значениях переменных из области определения значение данного выражения равно 1, т. е. не зависит от значений переменных.</p>
<p>5*. Упростите выражение</p> $a - \frac{4a - 4}{a} \cdot \frac{\frac{2}{a} - 1}{a}.$	<p>Запишем дробь в виде частного и получим:</p> $a - \frac{4a - 4}{a} \cdot \frac{\frac{2}{a} - 1}{a} =$ $= \left(a - \frac{4a - 4}{a} \right) : \left(\frac{2}{a} - 1 \right) =$ $= \frac{a^2 - 4a + 4}{a} : \frac{2 - a}{a} =$ $= \frac{(2 - a)^2 \cdot a}{a \cdot (2 - a)} = 2 - a.$
<p>6. Упростите выражение $(a^{-2} - b^{-2}) \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)^{-2} - 1$, приведя его к несократимой дроби.</p>	<p>1) $a^{-2} - b^{-2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{b^2 - a^2}{a^2b^2};$</p> <p>2) $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)^{-2} = \left(\frac{b - a}{ab} \right)^{-2} =$</p>

	$= \left(\frac{ab}{b-a}\right)^2 = \frac{a^2b^2}{(b-a)^2};$ $3) \frac{b^2 - a^2}{a^2b^2} \cdot \frac{a^2b^2}{(b-a)^2} =$ $= \frac{(b-a)(b+a) \cdot a^2b^2}{a^2b^2 \cdot (b-a)^2} = \frac{b+a}{b-a};$ $4) \frac{b+a}{b-a} - 1 = \frac{b+a}{b-a} - \frac{b-a}{b-a} =$ $= \frac{b+a-b+a}{b-a} = \frac{2a}{b-a}.$
<p>7. Примените к выражению алгоритм сокращения рациональной дроби:</p> <p>а) $\frac{5\sqrt{b} + b\sqrt{5}}{\sqrt{b} + \sqrt{5}};$</p> <p>б) $\frac{m - 2\sqrt{3m} + 3}{3 - m}.$</p>	<p>а) $\frac{5\sqrt{b} + b\sqrt{5}}{\sqrt{b} + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5b}(\sqrt{5} + \sqrt{b})}{\sqrt{b} + \sqrt{5}} =$</p> $= \sqrt{5b};$ <p>б) $\frac{m - 2\sqrt{3m} + 3}{3 - m} =$</p> $= \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{m})^2}{(\sqrt{3} - \sqrt{m})(\sqrt{3} + \sqrt{m})} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{m}}{\sqrt{3} + \sqrt{m}}.$
<p>8. Упростите выражение</p> $\left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{2\sqrt{ab}}{a - b}\right) \cdot \frac{a - 2\sqrt{ab} + b}{a + b}.$	<p>1) $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{2\sqrt{ab}}{a - b} =$</p> $= \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{2\sqrt{ab}}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} =$ $= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + 2\sqrt{ab}}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} =$ $= \frac{a - 2\sqrt{ab} + b + 2\sqrt{ab}}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} =$ $= \frac{a + b}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})};$ <p>2) $\frac{a + b}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \cdot \frac{a - 2\sqrt{ab} + b}{a + b} =$</p> $= \frac{(a + b) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot (a + b)} =$ $= \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$

9. Найдите значение выражения

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} : \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

при $x = 0,6$, $y = 0,006$.

Упростим данное выражение:

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} : \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \\ & = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \\ & = \frac{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \cdot \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \\ & = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{y}}. \end{aligned}$$

При $x = 0,6$ и $y = 0,006$ получим:

$$2 \sqrt{\frac{x}{y}} = 2 \sqrt{\frac{0,6}{0,006}} = 2 \sqrt{100} = 20.$$



Результат преобразования дробного рационального выражения может быть: а) целым рациональным выражением; б) дробным рациональным выражением; в) рациональной дробью; г) рациональным числом; д) иррациональным числом. Выберите правильные ответы. Приведите примеры.



1.215. Установите порядок действий и преобразуйте выражение:

а) $\left(\frac{x}{5} - \frac{x}{3}\right) \cdot \frac{9}{x^2}$;

б) $\left(\frac{2}{m} - \frac{1}{n}\right) : \frac{2n - m}{3mn}$;

в) $\frac{x+y}{y^2} \cdot \left(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y}\right)$;

г) $\left(1 - \frac{m}{n}\right) : \left(1 + \frac{m}{n}\right)$.

1.216. Упростите рациональное выражение:

а) $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) \cdot \frac{ab}{(a-b)^2}$;

б) $\left(\frac{9x}{y} - \frac{y}{x}\right) : \frac{(3x+y)^2}{2xy}$;

в) $\frac{3mn}{m+n} \cdot \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$;

г) $\frac{2c-d}{cd} : \left(\frac{4c}{d^2} - \frac{1}{c}\right)$;

д) $\left(\frac{16b}{a} - \frac{a}{4b}\right) \cdot \frac{1}{a-8b}$;

е) $(36m^2 - n^2) : \left(\frac{1}{2m} + \frac{3}{n}\right)$;

ж) $\frac{1}{x} - \frac{x-5}{x} : (x-5)^2$;

з) $(c-4) \cdot \frac{1}{16-c^2} + \frac{3}{c}$.

1.217. Упростите выражение $\frac{3ab}{9b^2 - a^2} \cdot \left(\frac{1}{3b} - \frac{1}{a}\right)$ и найдите его значение при $a = 8\frac{1}{7}$, $b = 1\frac{2}{7}$.

1.218. Выполните действия:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \left(\frac{40}{a-6} + a + 6\right) \cdot \frac{a^2 - 12a + 36}{a^2 + 4}; & \text{б)} \left(x - \frac{x^2 + 1}{x + 1}\right) : \frac{1 - x}{x^2 + 2x + 1}; \\ \text{в)} \frac{1}{c^2 + 6c + 9} \cdot \frac{c^2 - 9}{c} - \frac{c - 9}{c^2 - 9}; & \text{г)} \frac{5}{m - 2} - \frac{m + 2}{m^2 - 2m + 1} : \frac{m^2 - 4}{5m - 5}. \end{array}$$

1.219. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{5b}{4b + 2} - \frac{b}{2 - 4b}\right) : \frac{9b^2 - 3b}{1 - 4b + 4b^2} \quad \text{при } b = 4,5.$$

1.220. Докажите тождество $\left(\frac{1}{1 - 2n} - 2n - 1\right) : \left(\frac{4n^2}{2n - 1} - 2n\right) = -2n$.

1.221. Упростите выражение:

$$\begin{array}{l} \text{а)} \frac{c + 24}{c - 5} - \frac{c}{c + 5} \cdot \frac{c^2 - 25}{c} - \frac{6c - 1}{c - 5}; \\ \text{б)} \frac{2y^2 - y - 1}{y^2 - 1} + \frac{y}{y^2 - 1} : \frac{y}{1 - y} - \frac{y - 1}{y + 1}. \end{array}$$

1.222. Преобразуйте рациональное выражение:

$$\begin{array}{l} \text{а)} \left(\frac{1}{2a - 4} - \frac{4}{a^2 - 4} - \frac{1}{a + 2}\right) \cdot (a^2 - 4a + 4); \\ \text{б)} \left(\frac{2b}{b - 5} + \frac{b}{b^2 - 10b + 25}\right) : \frac{2b - 9}{b^2 - 25} - \frac{5b + 25}{b - 5}; \\ \text{в)} \frac{4xy}{x^2 - y^2} : \left(\frac{1}{x^2 - y^2} - \frac{1}{x^2 + 2xy + y^2}\right); \\ \text{г)} \frac{12}{m^2 - 9} + \frac{6m}{9 - 6m + m^2} \cdot \left(\frac{3}{m^2 + 3m} - \frac{m}{3m + 9}\right). \end{array}$$

1.223. Докажите, что значение выражения не зависит от значений переменных:

$$\begin{array}{l} \text{а)} \left(\frac{b^2}{ab - a^2} + \frac{a}{a - b}\right) : \frac{a + b}{a}; \quad \text{б)} \left(\frac{1}{y + 2} - \frac{4}{4 - y^2}\right) \cdot (y^2 - 2y) - y; \\ \text{в)} \frac{9a^2 - 16b^2}{7a} \cdot \left(\frac{3b - 4a}{4b^2 - 3ab} - \frac{3b + 4a}{4b^2 + 3ab}\right); \\ \text{г)} (m^2 - 2m + 1) \cdot \left(\frac{1}{(1 - m)^2} - \frac{1}{1 - m^2}\right) + \frac{m + 3}{m + 1}. \end{array}$$

1.224. Упростите дробное рациональное выражение, применив законы арифметических действий:

а) $\frac{4y^2 - 9}{2y^2 - 7y + 3} : \frac{3 + 2y}{1 - 2y} + \frac{9 - 4y}{3 - y}$;

б) $\left(\frac{3x - x^2}{x^2 - 6x + 9} + \frac{2x}{2x + 5} \right) \cdot (2x^2 - x - 15)$;

в) $\left(\frac{a}{a^2 - 6a + 9} - \frac{a + 2}{a^2 - a - 6} \right) \cdot (2a - 6)^2$;

г) $\left(\frac{p}{3p^2 + p - 2} + \frac{8}{9p^2 - 4} \right) : \frac{3p + 4}{9p^2 - 4} - \frac{1}{p + 1}$.

1.225. Используйте свойства степени с целым показателем и выполните действия:

а) $(b^{-2} - a^{-2}) \cdot \left(\frac{a + b}{ab} \right)^{-1}$;

б) $(a^{-2} + 2(ab)^{-1} + b^{-2}) \cdot (a + b)^{-1}$;

в) $(a^{-1} - (a - b)^{-1}) \cdot \left(\frac{b}{a - b} \right)^{-2} - 1$;

г) $\frac{a^{-2} + b^{-2}}{a^{-1} + b^{-1}} : \left(\frac{ab}{a^2 + b^2} \right)^{-1}$.

1.226. Какое правило можно применить для сокращения дроби:

а) $\frac{2\sqrt{a} + a}{\sqrt{a}}$;

б) $\frac{2\sqrt{x} - x}{x - 4}$;

в) $\frac{m - 6\sqrt{m} + 9}{3\sqrt{m} - m}$;

г) $\frac{b - 2\sqrt{5b} + 5}{5 - b}$?

Выполните сокращение в соответствии с правилом.

1.227. Выполните вычитание

$$\frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \frac{x + 4\sqrt{xy} + 4y}{\sqrt{x} + 2\sqrt{y}},$$

предварительно сократив дроби.

1.228. Выполните действия:

а) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$;

б) $\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} + \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$;

в) $\frac{10\sqrt{m}}{n - m} + \frac{5}{\sqrt{n} + \sqrt{m}}$;

г) $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b} - 1} - \frac{\sqrt{b}}{b - 1}$.

1.229. Установите порядок действий и упростите выражение:

$$\text{а) } \left(\sqrt{xy} - \frac{xy}{x + \sqrt{xy}} \right) : \frac{x^2 y}{x - y};$$

$$\text{б) } \left(\frac{\sqrt{m} - 2}{\sqrt{m} + 2} + \frac{8\sqrt{m}}{m - 4} \right) : \frac{\sqrt{m} + 2}{m - 2\sqrt{m}};$$

$$\text{в) } \left(\frac{1}{x + x\sqrt{y}} + \frac{1}{x - x\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{y - 1}{2};$$

$$\text{г) } \left(\frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} - 2\sqrt{x} - 1 \right) \cdot (1 - \sqrt{x}).$$

1.230. Докажите, что значение выражения

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a} + a} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1} \right) : \frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a}}$$

не зависит от значений переменной.

1.231. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} + 4\sqrt{x} \right) \cdot \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \text{ при } x = 7,25.$$

1.232*. Представьте выражение в виде рациональной дроби:

$$\text{а) } \frac{1 - \frac{3}{x}}{\frac{6x - 9}{x} - x};$$

$$\text{б) } \frac{a - \frac{bc}{b - c}}{b - \frac{ac}{a - c}};$$

$$\text{в) } \frac{a - 3 + \frac{2}{a}}{a + \frac{1}{a} - 2}.$$

1.233*. Упростите дробное рациональное выражение

$$\left(\frac{y}{xy - x^2} + \frac{x}{xy - y^2} \right) : \frac{x^2 + 2xy + y^2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

и найдите его значение при $x = -\frac{1}{7}$; $y = \frac{1}{3}$.

1.234*. Преобразуйте рациональное выражение

$$\left(\frac{y^2 - xy}{xy^2 + x^3} - \frac{2y^2}{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{x - 1}{y} - \frac{x}{y^2} \right) \cdot \frac{xy}{y + 1}.$$

1.235*. Установите порядок действий и упростите выражение:

$$\text{а) } \left(1 + \frac{3x + x^2}{3 + x} \right) : \left(\frac{1}{x + 1} - \frac{x}{1 + 2x + x^2} \right)^{-1};$$

$$\text{б) } \frac{\frac{2x}{1 - x}}{1 - \left(\frac{1 - x}{2x} \right)^{-1}}.$$

1.236*. Преобразуйте рациональное выражение к несократимой дроби:

$$\text{а) } \frac{x^2 + 2x}{4x^2 - 1} \cdot \left(\frac{1}{x+2} : x - \left(\frac{x^2}{x+2} - x + 2 \right) \right);$$

$$\text{б) } \left(\frac{a^2}{a^2 - b^2} - \frac{a^2 b}{a^2 + b^2} \cdot \left(\frac{a}{ab + b^2} + \frac{b}{a^2 + ab} \right) \right) : \frac{b^2}{a^2 - b^2}.$$

1.237*. Наиболее рациональным способом найдите, при каком значении переменной a значение выражения

$$\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a} + 1 \right) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{x}{a} + 1 \right) \cdot \frac{a}{x^4 + x^2 a^2 - a^4} \text{ равно } -\frac{1}{125}.$$

$$\text{1.238*. Упростите выражение $\frac{1}{a - \frac{3}{b + \frac{1}{c}}} \cdot \frac{3}{c + \frac{1}{b}} - \frac{3b}{abc + a - 3c}.$$$

1.239*. Докажите, что значение выражения

$$\left(\left(\left(\frac{a-4}{a} - a + 3 \right) \left(\frac{1}{a+2} - \frac{a+2}{a^2-4a+4} \right) \right)^{-1} - \frac{a}{8} \right)^{-1}$$

не зависит от значений переменной.

1.240*. Разложите числитель дроби на множители и сократите дробь $\frac{x + \sqrt{x+y} - \sqrt{y} - 2\sqrt{xy}}{\sqrt{x-y}}.$



1.241. Представьте в виде рациональной дроби выражение:

$$\text{а) } \frac{21}{m^2} \cdot \left(\frac{m}{7} + \frac{m}{2} \right); \quad \text{б) } \left(\frac{3}{a+b} - \frac{2}{a-b} \right) : \frac{a-5b}{a-b}.$$

1.242. Установите порядок действий и упростите выражение:

$$\text{а) } \left(\frac{x}{y} - \frac{4y}{x} \right) \cdot \frac{xy}{(x+2y)^2}; \quad \text{б) } \frac{m-3n}{mn} : \left(\frac{m}{n^2} - \frac{9}{m} \right);$$

$$\text{в) } \left(\frac{8b}{a} - \frac{a}{2b} \right) : (a+4b); \quad \text{г) } \frac{7}{b^2-4} \cdot (b-2)^2 - \frac{14}{b+2}.$$

1.243. Выполните преобразование рационального выражения:

$$\text{а) } \left(a - \frac{1+a^2}{a-1} \right) : \frac{a^2+2a+1}{a-1};$$

$$\text{б) } \left(\frac{21}{m+4} + m - 4 \right) \cdot \frac{m^2 + 8m + 16}{m^2 + 5};$$

$$\text{в) } \frac{x+6}{x^2-4} - \frac{1}{x^2-4} : \frac{x}{x^2+4x+4}.$$

1.244. Найдите значение выражения $\left(\frac{1}{1-a} - a \right) : \frac{a^2 - a + 1}{a^2 - 2a + 1}$ при $a = -8, 1$.

1.245. Докажите тождество

$$\left(\frac{36}{6-a} - a - 6 \right) : \frac{a^2}{a^2 - 12a + 36} = 6 - a.$$

1.246. Определите порядок действий и упростите рациональное выражение $\frac{5x+21}{9-x^2} + \frac{5}{x^2-9} : \frac{5}{3-x} - \frac{x+3}{3-x}$.

1.247. Выполните преобразование рационального выражения:

$$\text{а) } \left(\frac{1}{4c-16} - \frac{4}{c^2-16} - \frac{1}{2c+8} \right) \cdot (c^2 - 8c + 16);$$

$$\text{б) } \left(\frac{5a}{a+1} - \frac{3a}{a^2+2a+1} \right) : \frac{5a+2}{a^2-1} + \frac{a-1}{a+1}.$$

Целым или дробным выражением получился результат преобразований?

1.248. Докажите, что значение выражения не зависит от значений переменных:

$$\text{а) } \left(a - \frac{a^2+b^2}{a+b} \right) \cdot \left(\frac{1}{b} + \frac{2}{a-b} \right); \quad \text{б) } \left(\frac{m+n}{m-n} - \frac{m-n}{m+n} \right) : \frac{4mn}{n^2-m^2}.$$

1.249. Упростите выражение:

$$\text{а) } \frac{9y^2-4}{2y^2-5y+2} \cdot \frac{2-y}{3y+2} + \frac{y}{1-2y};$$

$$\text{б) } \frac{21}{4y+6} + \frac{y^2-25}{y+2} \cdot \left(\frac{6}{25-y^2} + \frac{y}{2y^2-7y-15} \right).$$

1.250. Примените свойства степени с целым показателем и выполните действия:

$$\text{а) } (a^{-2} - b^{-2}) \cdot \left(\frac{b-a}{ab} \right)^{-1}; \quad \text{б) } \frac{x^{-1} + y^{-1}}{x^{-2} - y^{-2}} : \left(\frac{1}{y^{-1}} - \frac{1}{x^{-1}} \right)^{-1}.$$

1.251. Представьте выражение в виде рациональной дроби

$$\left(\frac{2xy}{4x^2-9y^2} + \frac{y}{3y-2x} \right) \cdot \left(1 - \frac{2x-3y}{2x+3y} \right)^{-1}.$$

1.252. Сократите дробь, используя алгоритм:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \frac{b-5\sqrt{b}}{2\sqrt{b}}; & \text{б) } \frac{c+5\sqrt{c}}{c-25}; \\ \text{в) } \frac{a+8\sqrt{a}+16}{a+4\sqrt{a}}; & \text{г) } \frac{x+2\sqrt{7x}+7}{x-7}. \end{array}$$

1.253. Выполните сложение $\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{4a-b}{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, предварительно сократив дроби.

1.254. Выполните действия, используя алгоритм сложения дробей:

$$\text{а) } \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}-\sqrt{m}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}; \quad \text{б) } \frac{6\sqrt{a}}{a-b} - \frac{3}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.$$

1.255. Упростите выражение:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \left(\sqrt{ab} + \frac{ab}{a-\sqrt{ab}} \right) : \frac{a^2b}{a-b}; & \text{б) } \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right) \cdot \frac{b-a}{2}; \\ \text{в) } \left(\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - 2\sqrt{x} + 1 \right) \cdot (1+\sqrt{x}); & \\ \text{г) } \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \frac{4\sqrt{a}}{a-1} \right) : \frac{\sqrt{a}-1}{a+\sqrt{a}}. & \end{array}$$

1.256. Докажите тождество

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right) : \frac{a^2+ab}{a-b} = \frac{1}{a}.$$

1.257*. Представьте выражение в виде рациональной дроби:

$$\text{а) } \frac{1-\frac{4}{m}}{\frac{8m-16}{m}-m}; \quad \text{б) } \frac{t-2+\frac{1}{t}}{t+\frac{3}{t}-4}.$$



1.258. Запишите число $3,27 \cdot 10^{-4}$ в виде десятичной дроби.

1.259. График функции $y = x^2 - 2x$ проходит через точку, ордината которой равна 15. Чему равна абсцисса этой точки? Сколько решений имеет задача?

1.260. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{x+2}{3} - \frac{x+2}{2} \leq \frac{x+2}{6}, \\ \frac{x}{2} + x \geq \frac{3x}{4} - \frac{x-7}{8}. \end{cases}$$

1.261. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$.

1.262. Решите уравнение $0,4\left(1,5x - \frac{1}{3}\right) = 0,6x - 0,1$.

1.263. Найдите, при каких значениях переменной имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{5-x}$; б) $\sqrt{x^2-x-2}$.

1.264. Известно, что число девочек в классе относится к числу мальчиков как $2:1$. Выберите все верные утверждения:

- а) девочек в классе в три раза больше, чем мальчиков;
- б) число мальчиков составляет $\frac{1}{3}$ числа учеников класса;
- в) в классе мальчиков больше, чем девочек;
- г) мальчиков в классе в два раза меньше, чем девочек;
- д) число девочек составляет 50 % от числа учеников класса.

1.265. В 9.00 из города A в город B выехал автобус со скоростью $60 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а через 40 мин по тому же маршруту выехал легковой автомобиль со скоростью $80 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Верно ли, что легковой автомобиль догонит автобус еще до полудня?

Итоговая самооценка

После изучения этой главы я должен:

- знать определения целого рационального выражения, дробного рационального выражения, рациональной дроби;
- знать основное свойство дроби, определение понятия «сокращение дроби»;
- уметь сокращать рациональные дроби;
- уметь применять основное свойство рациональной дроби для приведения дробей к новому знаменателю;
- уметь применять алгоритмы сложения и вычитания рациональных дробей для преобразования рациональных выражений;
- уметь применять алгоритм умножения рациональных дробей для преобразования рациональных выражений;
- уметь выполнять действие возведения в степень рациональной дроби;

- уметь выполнять действие деления рациональных дробей и применять правила деления рациональных дробей для упрощения вычислений;
- уметь выполнять задания на действия с рациональными дробями;
- уметь применять правила и алгоритмы преобразования рациональных выражений для упрощения вычислений.

Я проверяю свои знания

1. Из выражений $\frac{3}{8m+n}$; $\frac{3a}{8b^3}$; $\frac{a}{b} + 14$; $\frac{x^2 - x + 7}{3x}$; $3,6x^2y$; $\frac{a+1}{a-7}$; $2x - \frac{y^4}{5}$; $2\sqrt{cd}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{a^2+ac}{5}$ выберите:

- а) целые рациональные выражения;
б) дробные рациональные выражения.

2. Выберите все верные равенства:

а) $\frac{2a+b}{2c} = \frac{a+b}{c}$;

б) $\frac{(a-b)^2}{b-a} = \frac{-(b-a)^2}{b-a}$;

в) $\frac{1}{b} \cdot a^2 = \frac{a^2}{b}$;

г) $\frac{5a+5b}{a+b} = 4a + 4b$;

д) $\frac{1}{a-b} - \frac{1}{b-a} = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{a-b}$;

е) $\frac{(2a-2b)^2}{a-b} = 2a - 2b$.

3. Найдите область определения рациональной дроби $\frac{x^2-2x}{x+1}$ и вычислите значение данной дроби при $x = 9$.

4. Приведите дробь $\frac{a}{x-3}$ к знаменателю:

а) $3 - x$;

б) $x^2 - 3x$;

в) $x^2 - 9$;

г) $x^2 - 6x + 9$.

5. Сократите рациональную дробь:

а) $\frac{18m^2n}{24mn^2}$;

б) $\frac{p^2 - 25q^2}{10q - 2p}$;

в) $\frac{3y^2 + 24y}{y^2 + 16y + 64}$;

г) $\frac{a^2 - 6a + 9}{9 - a^2}$;

д) $\frac{ax + bx - ay - by}{bx - by}$;

е) $\frac{2x - 3}{2x^2 - x - 3}$.

Какие способы разложения многочленов на множители вы использовали?

6. Выполните сложение или вычитание:

а) $\frac{2c}{c-1} + \frac{1-c}{c-1}$;

б) $\frac{2a+1}{a-1} - \frac{2-a}{1-a}$;

в) $\frac{2m-1}{(m-1)^2} - \frac{3-2m}{(1-m)^2}$;

г) $5x^2 - \frac{15x^2 - 1}{3}$;

д) $\frac{5b}{b^2-1} - \frac{5}{b+1};$

е) $\frac{c^2}{c^2-4c+4} + \frac{c}{2-c};$

ж) $\frac{x+7}{xy-9y+5x-45} - \frac{1}{y+5};$

з) $\frac{d^2}{d^2-5d+4} - \frac{1-d}{4-d}.$

7. Каким правилом нужно воспользоваться, чтобы выполнить умножение рациональных дробей; деление рациональных дробей; возведение рациональной дроби в степень? Примените эти правила и выполните действия:

а) $\frac{a^6b^3}{15xy} \cdot \frac{12x^2}{a^4b^3};$

б) $\frac{x^4}{x-y} : \frac{x^3}{2x-2y};$

в) $\left(\frac{a^3b^2}{2c}\right)^5 \cdot 16c^4;$

г) $\left(\frac{3x^2}{y^3z}\right)^2 : \frac{27x^3}{y^5z^2};$

д) $\frac{c^2-1}{c^3+2c^2} \cdot \frac{c^4+2c^3}{(2c-2)^2};$

е) $(a^2+9-6a) : \frac{(3-a)^2}{3a+1};$

ж) $\frac{a^2-1}{4a+8b} \cdot \frac{a^2+4ab+4b^2}{3-3a};$

з) $\frac{m^2+2m}{m^2-3x+mx-3m} : \frac{m^2-4}{m^2-5m+6}.$

8. Определите порядок действий и упростите рациональное выражение:

а) $\left(\frac{5}{x-2} - x - 2\right) \cdot \frac{2-x}{x^2-6x+9};$

б) $\left(\frac{a^2}{a+5} - \frac{a^3}{a^2+10a+25}\right) : \left(\frac{a}{a+5} - \frac{a^2}{a^2-25}\right);$

в) $\left(\frac{a+b}{a^2-ab} - \frac{2b}{a^2-b^2}\right) \cdot \frac{b^2-a^2}{1+\frac{b^2}{a^2}};$

г) $\left(\frac{3}{x-3} + \frac{4}{x^2-5x+6} + \frac{2x}{x-2}\right) : \frac{2x+1}{3} - \frac{x-12}{9-3x}.$

9. Докажите тождество $\frac{x^{-2}+y^{-2}}{(x+y)^2} + \frac{2x^{-1}+2y^{-1}}{(x+y)^3} = x^{-2}y^{-2}.$

10. Постройте график функции:

а) $f(x) = \frac{x^2-10x+25}{x-5} - \frac{2x^2+3x}{x};$

б) $f(x) = \frac{x^3-5x^2+4x}{x-1};$

в) $f(x) = \frac{12x+12}{x^2+x}.$

Практическая математика

1. В некоторых странах мира для измерения температуры пользуются шкалой Фаренгейта. Для перевода температуры из шкалы Цельсия в шкалу Фаренгейта пользуются формулой $F = 1,8C + 32$, где C — температура по Цельсию, а F — температура по Фаренгейту. Выведите формулу, с помощью которой можно перевести температуру из шкалы Фаренгейта в шкалу Цельсия. Нужно ли волноваться, если у ребенка температура 100°F ? При какой температуре число градусов по Цельсию и по Фаренгейту одинаково?

2. Торговая сеть приобрела партию обуви общей стоимостью 180 тыс. р. Первую неделю в магазинах сети обувь продавалась с 25 %-й наценкой. Затем наценка была снижена до 16 %. В итоге вся партия обуви была продана на 20 % дороже, чем куплена. На какую сумму было продано обуви в первую неделю?

Увлекательная математика

Исследуем, обобщаем, делаем выводы

Исследовательское задание.

Верно ли, что $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$? Представьте в виде дроби выражение

$$\frac{1}{(a+1)(a+2)} + \frac{1}{(a+2)(a+3)} + \frac{1}{(a+3)(a+4)} + \frac{1}{(a+4)(a+5)}.$$

Обобщите результат и придумайте аналогичное задание для друзей.

Готовимся к олимпиадам

1. Докажите, что если $\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-a}{a+c} + \frac{c-a}{a+b} = 1$, то $\frac{a+c}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+b}{a+b} = 4$.

2. Трехзначное число разложили на целые множители. После этого некоторые множители увеличили не более чем на 10 %, так, чтобы снова получилось целое число. На какое наибольшее число процентов могло увеличиться произведение?

3. Сократите дробь $\frac{x^3 + 2x^2 - 16x - 32}{(x-1)^5 + (1-x)^5 + (x-1)^2 - 9}$.