2.41. В сплав входят медь, олово и цинк в отношении 12 : 13 : 25. Найдите, сколько процентов в сплаве составляет медь.

§ 7. Свойства функции

2.42. Функция $f(x)$ задана формулой $f(x) = 5x^2 - 3x$. Найдите нули функции.

2.43. Найдите наибольшее значение функции $g(x) = 4 - x^2$.

2.44. Найдите промежутки знакопостоянства функции:

а) $f(x) = 5x^2 - 3x$; б) $g(x) = 4 - x^2$.

При изучении функций в 7—8-х классах вы познакомились с их свойствами, например такими как нули функции, промежутки знакопостоянства функции, промежутки монотонности функции. Обобщим эти свойства для функции числового аргумента $y = f(x)$, заданной графически и аналитически.

Нули функции

Значение аргумента, при котором значение функции равно нулю, называют **нулем функции.**

Нулями функции $y = f(x)$, график которой изображен на рисунке 11, являются значения аргумента, равные –2, 4 и 8, так как при $x = -2$, $x = 4$, $x = 8$ значение функции равно нулю.

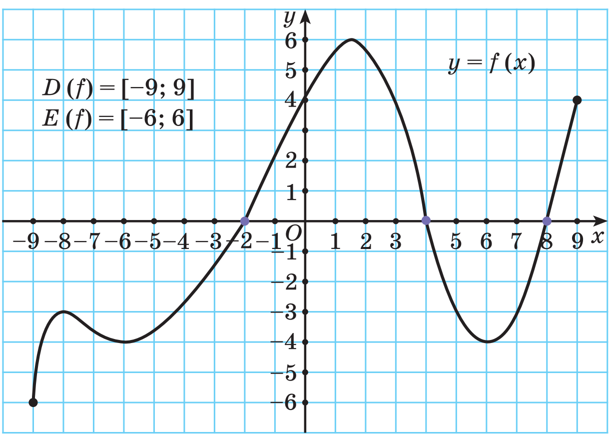

Рис. 11

В точках с абсциссами –2, 4 и 8 график функции $y = f(x)$ пересекает ось абсцисс.

Найдем нули функции $h(x) = (x + 1)(x - 1)(2x - 5)$, заданной аналитически. Для этого решим уравнение $h(x) = 0$, т. е. $(x + 1)(x - 1)(2x - 5) = 0$.

Произведение нескольких множителей равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю, т. е.

$$\left[\begin{array}{l} x + 1 = 0, \\ x - 1 = 0, \\ 2x - 5 = 0; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 1, \\ x = 2{,}5. \end{array}\right.$$

$f(x_0) = 0$,

x_0 — нуль функции $y = f(x)$

Значит, числа –1, 1 и 2,5 являются нулями функции

$h(x) = (x + 1)(x - 1)(2x - 5)$.

Промежутки знакопостоянства функции

Промежуток, на котором функция принимает значения только одного знака, называется **промежутком знакопостоянства функции.**

На промежутках $[-9; -2)$ и $(4; 8)$ график функции $y = f(x)$ лежит ниже оси абсцисс (рис. 12), следовательно, значения функции на этих промежутках отрицательны, т. е. $y < 0$ при $x \in [-9; -2) \cup (4; 8)$.

На промежутках $(-2; 4)$ и $(8; 9]$ график функции $y = f(x)$ лежит выше оси абсцисс (см. рис. 12), следовательно, значения

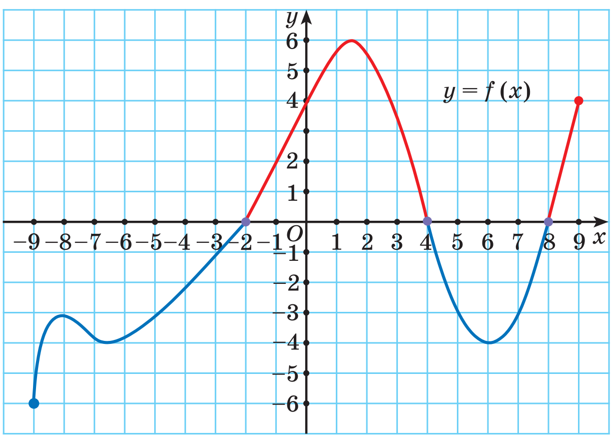

Рис. 12

функции на этих промежутках положительны, т. е. $y > 0$ при $x \in (-2; 4) \cup (8; 9]$.

Промежутки $[-9; -2)$ и $(4; 8)$, $(-2; 4)$ и $(8; 9]$ являются промежутками знакопостоянства данной функции.

Обычно при изучении свойств функций рассматривают промежутки знакопостоянства максимальной длины.

Найдем промежутки знакопостоянства функции $g(x) = -2x + 6$, заданной аналитически. Для этого решим неравенства $g(x) < 0$ и $g(x) > 0$, т. е. выясним, при каких значениях аргумента значения данной функции отрицательны, а при каких положительны. Получим: $-2x + 6 < 0$; $-2x < -6$; $x > 3$, т. е. $g(x) < 0$ при $x \in (3; +\infty)$.

Очевидно, что $g(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 3)$, т. е. на промежутке $(-\infty; 3)$ значения функции положительны.

Промежутки $(-\infty; 3)$, $(3; +\infty)$ являются промежутками знакопостоянства функции $g(x) = -2x + 6$.

Монотонность функции

Функция $y = f(x)$ **возрастает** на некотором промежутке из области определения, если для любых двух значений аргумента x_1 и x_2 из этого промежутка, таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$ (рис. 13).

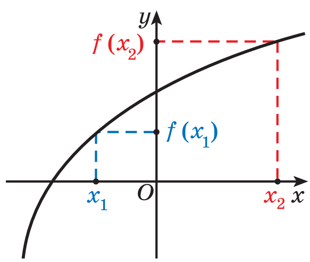

Рис. 13

Другими словами, функция возрастает на некотором промежутке, если для любых значений аргумента из этого промежутка **большему** значению аргумента соответствует **большее** значение функции.

Функция $y = f(x)$ **убывает** на некотором промежутке из области определения, если для любых двух значений аргумента x_1 и x_2 из этого промежутка, таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$ (рис. 14).

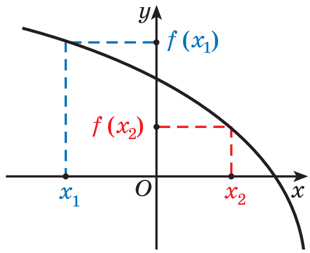

Рис. 14

Иначе говоря, функция убывает на некотором промежутке, если для любых значений аргумента из этого промежутка **большему** значению аргумента соответствует **меньшее** значение функции.

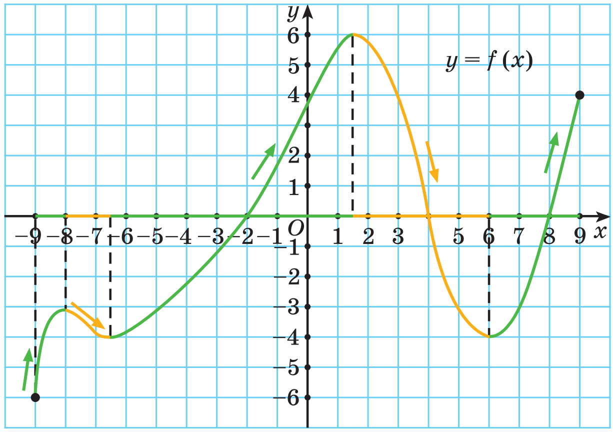

Рис. 15

Промежутки возрастания и убывания функции называют **промежутками монотонности** функции, а функцию называют **монотонной** на промежутке возрастания или убывания.

Если функция возрастает на всей области определения, то ее называют **возрастающей функцией**, а если убывает, то **убывающей функцией**.

Определим промежутки возрастания функции $y = f(x)$, заданной графически (рис. 15). При увеличении абсциссы от –9 до –8 значения функции увеличиваются (точки на графике «поднимаются вверх»), значит, на отрезке [–9; –8] функция $y = f(x)$ возрастает. Функция $y = f(x)$ возрастает еще на двух промежутках: [–6,5; 1,5] и [6; 9].

При увеличении абсциссы от –8 до –6,5 значения функции уменьшаются (точки на графике «опускаются вниз»), значит, на отрезке [–8; –6,5] функция $y = f(x)$ убывает. Данная функция убывает также на промежутке [1,5; 6].

Пример. Докажите, что при $k > 0$ линейная функция $h(x) = kx + b$, $D(h) = \boldsymbol{R}$, возрастает на области определения, т. е. является возрастающей, а при $k < 0$ убывает на области определения, т. е. является убывающей.

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента из области определения функции, причем $x_2 > x_1$.

Тогда $h(x_1) = kx_1 + b$ и $h(x_2) = kx_2 + b$. Рассмотрим разность $h(x_2) - h(x_1) = (kx_2 + b) - (kx_1 + b) = kx_2 + b - kx_1 - b =$
$= kx_2 - kx_1 = k(x_2 - x_1)$.

Поскольку $x_2 > x_1$, т. е. $x_2 - x_1 > 0$, то знак произведения $k(x_2 - x_1)$ зависит от знака числа k.

Если $k > 0$, то $k(x_2 - x_1) > 0$, тогда $h(x_2) - h(x_1) > 0$, т. е. $h(x_2) > h(x_1)$.

Значит, для $x_2 > x_1$ при $k > 0$ получим, что $h(x_2) > h(x_1)$, т. е. функция $h(x) = kx + b$ при $k > 0$ является возрастающей.

Если $k < 0$, то $k(x_2 - x_1) < 0$, тогда $h(x_2) - h(x_1) < 0$, т. е. $h(x_2) < h(x_1)$.

Значит, для $x_2 > x_1$ при $k < 0$ получим, что $h(x_2) < h(x_1)$, т. е. функция $h(x) = kx + b$ при $k < 0$ является убывающей.

Свойства функции

1. На рисунке 16 изображен график функции $y = f(x)$.
Найдите:
а) нули функции;
б) промежутки знакопостоянства функции;
в) промежутки монотонности функции.

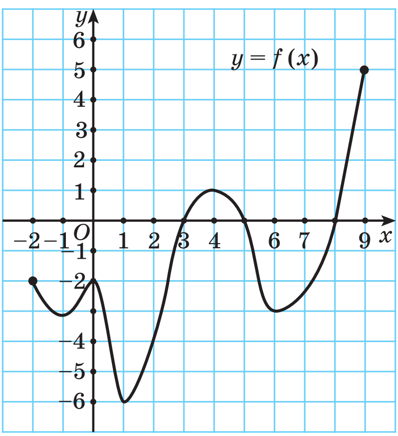

Рис. 16

а) Найдем абсциссы точек пересечения графика с осью абсцисс: $x = 3$, $x = 5$, $x = 8$. При этих значениях аргумента значения функции равны нулю, т. е. числа 3; 5 и 8 являются нулями функции.

б) Функция принимает положительные значения (график функции расположен выше оси абсцисс) на промежутках $(3; 5)$ и $(8; 9]$, а отрицательные значения (график функции расположен ниже оси абсцисс) на промежутках $[-2; 3)$ и $(5; 8)$.

в) Функция убывает (при увеличении абсцисс точек графика ординаты точек графика уменьшаются) на промежутках: $[-2; -1]$; $[0; 1]$ и $[4; 6]$.

Функция возрастает (при увеличении абсцисс точек графика ординаты точек графика увеличиваются) на промежутках: $[-1; 0]$; $[1; 4]$ и $[6; 9]$.

2. Найдите нули функции: а) $f(x) = 6 - 1{,}5x$; б) $g(x) = x^2 - 4x + 3$; в)* $h(x) = \|x\| + 5$.	а) Для того чтобы найти нули данной функции, нужно решить уравнение $f(x) = 0$, т. е. $6 - 1{,}5x = 0$; $1{,}5x = 6$; $x = 4$. Значение аргумента $x = 4$ является нулем данной функции. б) Нулями данной функции являются корни уравнения $g(x) = 0$. Решим квадратное уравнение $x^2 - 4x + 3 = 0$. Воспользуемся теоремой Виета и получим: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Числа 1 и 3 являются нулями функции $g(x) = x^2 - 4x + 3$. в)* Решим уравнение $h(x) = 0$, т. е. $\|x\| + 5 = 0$; $\|x\| = -5$. Поскольку модуль не может быть равен отрицательному числу, то уравнение не имеет корней, а значит, функция $h(x) = \|x\| + 5$ не имеет нулей.
3. Найдите промежутки знакопостоянства функции: а) $f(x) = 6 - 1{,}5x$; б) $g(x) = x^2 - 4x + 3$; в)* $h(x) = \|x\| + 5$.	а) Найдем, при каких значениях аргумента функция $f(x) = 6 - 1{,}5x$ принимает положительные значения, т. е. решим неравенство: $6 - 1{,}5x > 0$; $-1{,}5x > -6$; $1{,}5x < 6$; $x < 4$. Таким образом, $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 4)$. Функция принимает отрицательные значения, т. е. $f(x) < 0$ при $x \in (4; +\infty)$. б) Найдем промежутки знакопостоянства функции $g(x) = x^2 - 4x + 3$: $g(x) > 0$, т. е. $x^2 - 4x + 3 > 0$ при $x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$; $g(x) < 0$, т. е. $x^2 - 4x + 3 < 0$ при $x \in (1; 3)$. Таким образом, на промежутках $(-\infty; 1)$ и $(3; +\infty)$ значения функции положительны, а на промежутке $(1; 3)$ значения функции отрицательны.

	в)* Решим неравенство $h(x) > 0$, т. е. $\lvert x\rvert + 5 > 0$; $\lvert x\rvert > -5$. Решением полученного неравенства является любое действительное число ($x \in \boldsymbol{R}$). Значит, функция принимает положительные значения при любых значениях аргумента, т. е. $h(x) > 0$ при $x \in \boldsymbol{R}$.
4*. Найдите промежутки монотонности функции $g(x) = -\frac{10}{x}$.	Покажем, что функция возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента из промежутка $(0; +\infty)$, причем $x_2 > x_1$. По свойству числовых неравенств, если $x_2 > x_1 > 0$, то $\frac{1}{x_1} < \frac{1}{x_2}$ и $-\frac{10}{x_2} > -\frac{10}{x_1}$. Следовательно, функция $g(x)$ возрастает на промежутке $(0; +\infty)$. Если x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента из промежутка $(-\infty; 0)$, причем $0 > x_2 > x_1$, то по свойству числовых неравенств $\frac{1}{x_1} < \frac{1}{x_2}$, а $-\frac{10}{x_2} > -\frac{10}{x_1}$. Значит, функция $g(x)$ возрастает на промежутке $(-\infty; 0)$. Таким образом, функция $g(x) = -\frac{10}{x}$ возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Отметим, что функция $g(x) = -\frac{10}{x}$ возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, но не возрастает на всей ее области определения $D(g) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Покажем это, приведя контрпример. Пусть $x_1 = -5$, а $x_2 = 1$, тогда $g(x_1) = g(-5) = -\frac{10}{-5} = 2$, а $g(x_2) = g(1) = -\frac{10}{1} = -10$. В данном случае для $x_2 > x_1$ получили $g(x_2) < g(x_1)$, что противоречит определению.

1. Верно ли, что если функция не имеет нулей, то ее график на всей области определения функции лежит:

а) выше оси абсцисс;

б) ниже оси абсцисс;

в) по разные стороны от оси абсцисс?

2. На рисунке 17 функция $r(x)$ задана графически на множестве $\boldsymbol{R}$. Можно ли, используя график, решить неравенство:

а) $r(x) > 0$; б) $r(x) < 0$?

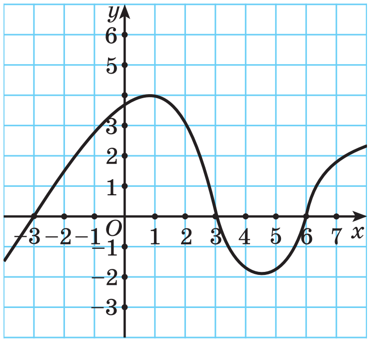

Рис. 17

2.45. Функция $y = f(x)$ задана графически (рис. 18). Найдите:

1) нули функции;

2) промежутки знакопостоянства функции;

3) промежутки монотонности функции.

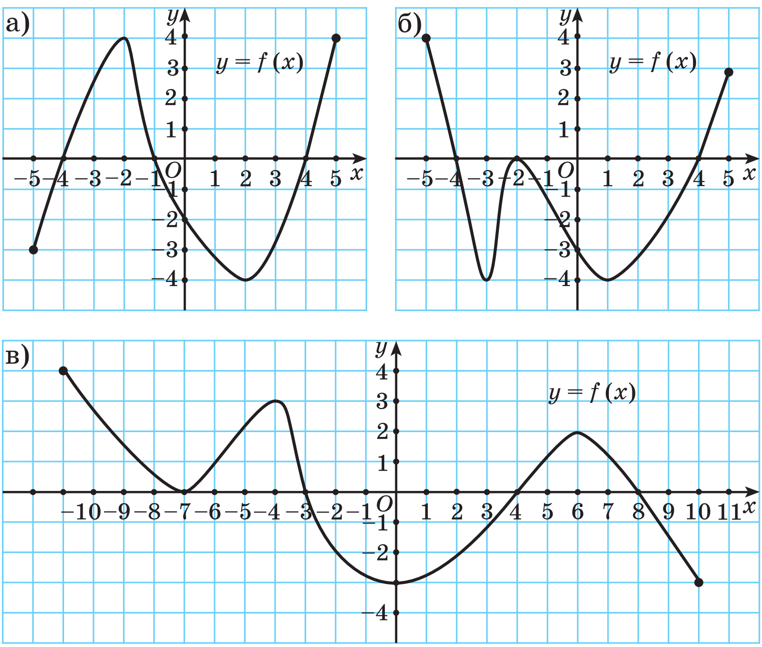

Рис. 18

2.46. На рисунке 19 изображен график функции $y = f(x)$. Выберите неверное утверждение: а) $D = [-7;\ 7]$; б) $E = [-3;\ 5]$; в) $f(x) > 0$ при $x \in (-6;\ -1) \cup (5;\ 7]$; г) функция убывает на промежутке $(-1;\ 5)$; д) нулями функции являются числа -6; -1; 5.

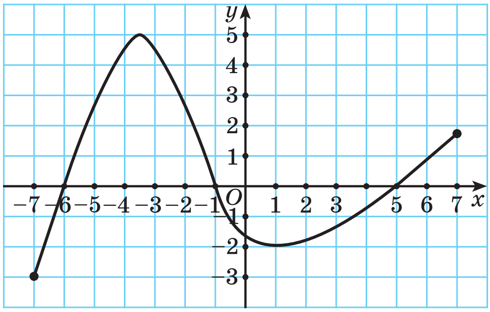

Рис. 19

2.47. Изобразите график функции $y = f(x)$, для которой известно, что: а) $D(f) = [-5;\ 6]$; б) $E(f) = [-4;\ 2]$; в) нулями функции являются числа -3 и 4; г) функция убывает на промежутке $[-5;\ -1]$ и возрастает на промежутке $[-1;\ 6]$.

2.48. На рисунке 20 изображен график функции $y = f(x)$. Найдите: а) промежутки знакопостоянства функции; б) промежутки возрастания функции. Сколько нулей имеет данная функция?

2.49. На рисунке 21 изображен график функции $y = f(x)$, областью определения которой является множество всех действительных чисел. С помощью графика решите:

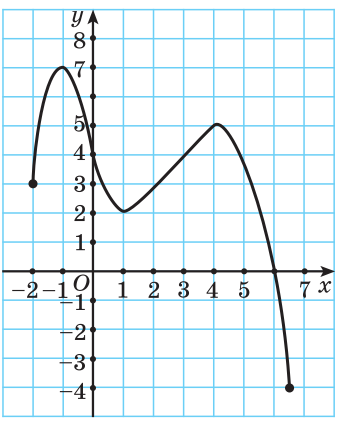

Рис. 20

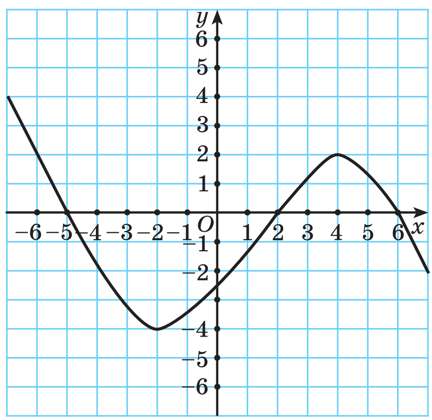

Рис. 21

а) уравнение $f(x) = 0$;

б) неравенство $f(x) < 0$;

в) неравенство $f(x) \geqslant 0$.

2.50. Для функции $y = f(x)$, график которой изображен на рисунке 22, найдите:

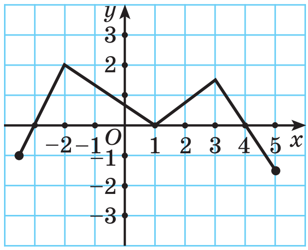

Рис. 22

а) промежутки, на которых функция принимает положительные значения;

б) промежутки убывания функции;

в) количество корней уравнения $f(x) = 0$.

Верно ли, что на промежутке [1; 4] функция возрастает; на промежутке [–2; 1] функция принимает отрицательные значения?

2.51. Определите нули функции, заданной таблицей.

x	-22	$-\sqrt{17}$	-3	-2	0	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{17}$	5	43
y	-8	0	2	6	12	18	0	29	0

2.52. Какие значения аргумента называют нулями функции? Найдите нули функции:

а) $f(x) = 18 - 2x$; б) $g(x) = 6x - x^2 - 5$;

в) $h(x) = x^2 + 8x$; г) $q(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

Приведите пример функции, имеющей один нуль; два нуля; три нуля.

2.53. Верно ли, что функция $g(x) = x^2 + x + 3$ не имеет нулей? Приведите несколько примеров функций, не имеющих нулей.

2.54. Сколько нулей имеет функция:

а) $y = x^3 - 2x^2$; б) $y = 8$; в) $y = 5x$;

г) $y = |x| - 4$; д) $y = x^3 + 1$; е) $y = -\frac{5}{x}$?

2.55. График функции, областью определения которой являются все действительные числа, проходит через точки $A(-5; 7)$ и $B(8; -4)$. Верно ли, что на промежутке $(-5; 8)$ функция имеет хотя бы один нуль?

2.56. Изобразите график функции $y = f(x)$, если известно, что уравнение $f(x) = 0$:

а) имеет один корень;

б) имеет один положительный и два отрицательных корня;

в) не имеет корней.

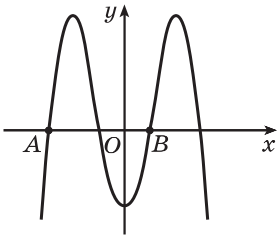

Рис. 23

2.57. На рисунке 23 изображен график функции $y = -9x^4 + 10x^2 - 1$. Точки $A(x_1;\ y_1)$; $B(x_2;\ y_2)$ принадлежат данному графику. Найдите x_1 и x_2.

2.58. Составьте план решения и найдите промежутки знакопостоянства функции:

а) $f(x) = 8 - 3x$; б) $g(x) = x^2 - 9$;

в) $h(x) = 5x - x^2$; г)* $p(x) = |x| + 7$.

2.59. Найдите, при каких значениях аргумента функция принимает положительные значения:

а) $f(x) = 8x$; б) $f(x) = x^2 + 6x + 9$;

в) $f(x) = \frac{6}{x}$; г) $f(x) = \sqrt{x}$.

2.60. Из функций $y = -x^2 - 5$; $y = -\sqrt{2}$; $y = -6x$; $y = -\sqrt{x}$ выберите те, которые принимают только отрицательные значения для всех значений аргумента из области определения функции. Приведите несколько примеров функций, принимающих только положительные значения для всех значений аргумента из области определения функции.

2.61. Известно, что функция $y = h(x)$ возрастает на промежутке $(-2;\ 5)$. Расположите в порядке возрастания значения выражений $h(0)$; $h\ (-1{,}2)$ и $h(4)$.

2.62. Известно, что функция $y = f(x)$ убывает на множестве действительных чисел и $f(5) = 4$. Выберите верное утверждение:

а) $f(6) > 4$; б) $f(-5) < -4$;

в) $f(10) > 8$; г) $f(0) > 4$.

2.63*. Докажите, что функция:

а) $f(x) = 2x$ является возрастающей;

б) $f(x) = 1 - 3x$ является убывающей.

2.64*. Докажите, что функция $g(x) = \frac{3}{x}$ убывает на промежутке $(0;\ +\infty)$.

2.65*. Найдите расстояние между нулями функций $f(x) = 5x - 12$ и $g(x) = 4x^2 - 4x + 1$.

2.66*. Найдите, при каких значениях числа a функция $f(x) = x^2 - ax - 3a$ не имеет нулей.

2.67*. Докажите, что функция $y = |x + 5|$ возрастает на промежутке $[-5; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; -5]$.

2.68. Функция $y = f(x)$ задана графически (рис. 24). Найдите:

1) нули функции;
2) промежутки знакопостоянства функции;
3) промежутки монотонности функции.

а) б)

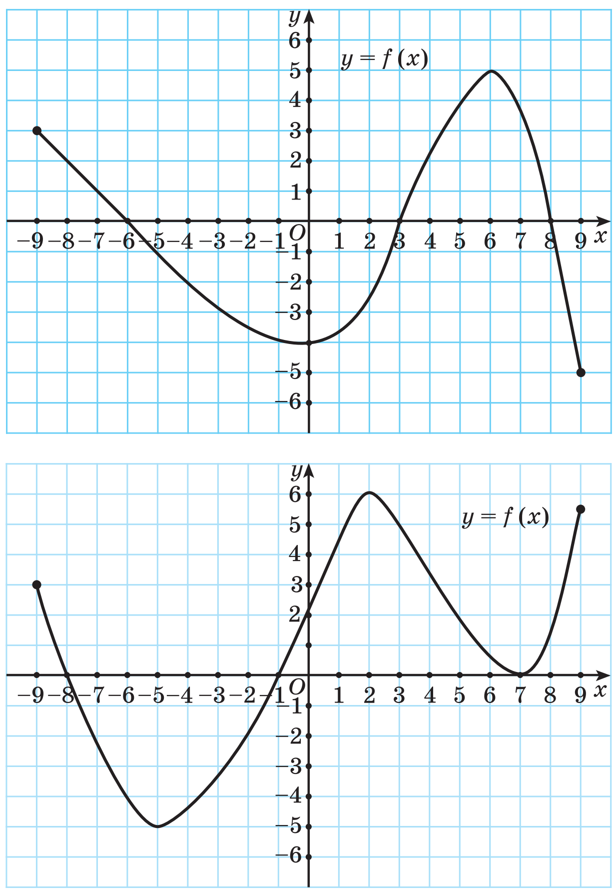

Рис. 24

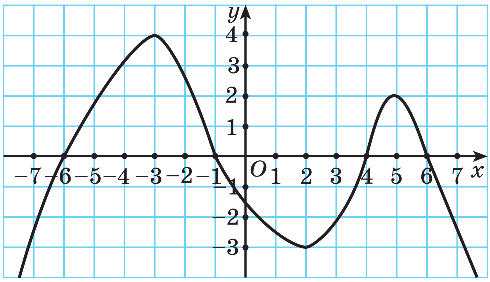

Рис. 25

2.69. На рисунке 25 изображен график функции $y = f(x)$, областью определения которой является множество всех действительных чисел. С помощью графика решите: а) уравнение $f(x) = 0$; б) неравенство $f(x) < 0$; в) неравенство $f(x) \geqslant 0$.

2.70. Какие значения аргумента называют нулями функции? Найдите нули функции:

а) $f(x) = 5x - 7$; б) $g(x) = 49 - x^2$;

в) $h(x) = 7x^2 - 8x + 1$; г) $q(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.

2.71. Какие из данных функций не имеют нулей:

а) $f(x) = |x| - 8$; б) $g(x) = x^2 + 5$;

в) $h(x) = \frac{7}{x}$; г) $q(x) = \sqrt{x} + 2$?

2.72. Приведите пример линейной функции; квадратичной функции, не имеющей нулей.

2.73. Найдите промежутки знакопостоянства функции:

а) $f(x) = 3x - 1$; б) $g(x) = x^2 + 2x$;

в) $h(x) = 3x - x^2 - 2$; г) $p(x) = x^2 + 7$.

2.74. Найдите, при каких значениях аргумента функция принимает отрицательные значения:

а) $f(x) = 3 - x$; б) $f(x) = -x^2 - 2x - 1$; в) $f(x) = \frac{4}{x}$.

2.75. Известно, что функция $y = g(x)$ убывает на промежутке (–7; 4). Расположите в порядке возрастания значения выражений $q(0)$; $q(-5)$ и $q(2)$.

2.76*. Докажите, что функция $f(x) = 2 - 3x$ является убывающей.

2.77*. Докажите, что функция $g(x) = -\frac{7}{x}$ возрастает на промежутке $(0; +\infty)$.

2.78*. Докажите, что функция $y = x^2 - 8x + 16$ возрастает на промежутке $[4; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 4]$.

2.79. Из чисел $\frac{5}{7}$; 8,(3); $\sqrt{15}$; $-\frac{4}{12}$; $\sqrt{2}$; π выберите все те, которые нельзя представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Какому числовому множеству принадлежат все оставшиеся числа?

2.80. Найдите, на какое число нужно умножить сумму чисел $4\frac{1}{3}$ и $3\frac{2}{3}$, чтобы получить их разность.

2.81. Дано: $-2 < a < 7$. Оцените значение выражения:

а) $3a$; б) $-\frac{a}{5}$; в) $a - 8$; г) $2a + 5$.

2.82. Решите систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \frac{3x-7}{4} - \frac{2y-3}{5} = 1, \\ \frac{2x-y}{2} = y - 1. \end{cases}$$

2.83. Найдите значение выражения

$$-0{,}5^2 : 0{,}5^3 + 0{,}3^0 - 2^8 \cdot 4^{-2}.$$

2.84. Упростите выражение $\sqrt{(1-2x)^2} - \sqrt{(2x+1)^2}$, если $x \in (-0{,}2;\ 0{,}1)$.

§ 8. Четные и нечетные функции

2.85. Функция задана формулой $f(x) = 5x^2$. Найдите $f(2)$; $f(-2)$; $f(0{,}5)$; $f(-0{,}5)$.

2.86. Определите координаты точек, симметричных точкам (1; 3), (1; 2), (–5; 0), (–3; –2), (4; –2) относительно: а) оси ординат; б) оси абсцисс; в) начала координат.

2.87. Запишите промежутки, симметричные данным относительно нуля: (0; 3), (1; 2], [–1; 0), [–3; –2], (0; $+\infty$).

Для построения графиков функций, решения уравнений и неравенств вы используете свойства функций. Еще одним свойством, позволяющим найти рациональное решение, является свойство четности (нечетности) функции.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется **четной**, если:

① ее область определения симметрична относительно нуля;

② для любого $x \in D(f)$ выполняется условие $f(-x) = f(x)$.