

ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

§ 10. Дробно-рациональные уравнения



3.1. Решите уравнение $(3x - 2)(x + 4) = 0$.

3.2. Найдите область определения рациональной дроби $\frac{2x}{x-6}$.

3.3. При каком значении переменной:

а) числитель дроби $\frac{2x-1}{x^2-36}$ равен нулю;

б) знаменатель дроби $\frac{2x-1}{x^2-36}$ равен нулю?



Рассмотрим задачу. В дроби числитель на 2 больше знаменателя. Если числитель этой дроби уменьшить на 3, а знаменатель увеличить на 3, то новая дробь будет равна $\frac{1}{2}$. Найдите знаменатель первоначальной дроби.

Решение. Обозначим знаменатель первоначальной дроби через x , тогда ее числитель равен $(x + 2)$.

Если числитель дроби уменьшить на 3, то получится числитель новой дроби: $(x + 2) - 3 = x - 1$. Знаменатель новой дроби после увеличения на 3 будет равен $(x + 3)$, а новая дробь будет иметь вид $\frac{x-1}{x+3}$. Так как по условию задачи она равна $\frac{1}{2}$, то получим уравнение $\frac{x-1}{x+3} = \frac{1}{2}$. В левой части этого уравнения записано дробное рациональное выражение.

Решение многих задач приводит к уравнениям, у которых в левой или правой (или в той и другой) частях записаны дробные рациональные выражения. Такие уравнения называют **дробно-рациональными уравнениями**.

Например, уравнения

$\frac{x^2-3x+2}{x-2} = 0$; $\frac{x+2}{x-2} - \frac{x+1}{x-1} = 3$; $x^2 + 3x + \frac{6}{2-3x-x^2} = 1$ являются дробно-рациональными.

Дробно-рациональные уравнения

$$\frac{x}{x-6} = 2$$

$$x - 4 = \frac{5}{x^2 + 2}$$

$$\frac{x+6}{x-8} = 7 - \frac{x+1}{x+5}$$

Рассмотрим дробно-рациональное уравнение $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = 0$.
 Это уравнение можно решить, используя условие равенства рациональной дроби нулю.



Рациональная дробь равна нулю тогда и только тогда, когда числитель дроби равен нулю, а знаменатель не равен нулю.

$$\frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0, \\ B \neq 0 \end{cases}$$

Таким образом, получим:

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0, \\ x - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = 1, \Leftrightarrow x = 1. \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Ответ: 1.

Вернемся к уравнению $\frac{x-1}{x+3} = \frac{1}{2}$. Выполним тождественные преобразования уравнения.

1) Перенесем все слагаемые из правой части уравнения в левую: $\frac{x-1}{x+3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+3} - \frac{1}{2} = 0$.

2) Преобразуем левую часть уравнения к рациональной дроби: $\frac{x-1}{x+3} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-2-x-3}{2(x+3)} = 0 \Leftrightarrow \frac{x-5}{2(x+3)} = 0$.

3) Применим условие равенства дроби нулю:

$$\frac{x-5}{2(x+3)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5 = 0, \\ 2(x+3) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5, \\ x \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$$

Ответ: 5.



Чтобы решить дробно-рациональное уравнение, нужно:

- ① Перенести все слагаемые из правой части уравнения в левую.
- ② Преобразовать левую часть уравнения к рациональной дроби.
- ③ Применить условие равенства дроби нулю.
- ④ Записать ответ.

Решите уравнение $\frac{9x^2 - 4}{x - 1} = \frac{5 - 10x}{1 - x}$.

① $\frac{9x^2 - 4}{x - 1} - \frac{5 - 10x}{1 - x} = 0$.

② $\frac{9x^2 - 4}{x - 1} + \frac{5 - 10x}{x - 1} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{9x^2 - 4 + 5 - 10x}{x - 1} = 0 \Leftrightarrow \frac{9x^2 - 10x + 1}{x - 1} = 0$.

③ $\begin{cases} 9x^2 - 10x + 1 = 0, \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{9}, \\ x = 1, \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}. \\ x \neq 1 \end{cases}$

④ Ответ: $\frac{1}{9}$.

Пример 1. Решите уравнение

$$\frac{x+2}{x-2} - \frac{x+1}{x-1} = 3.$$

Решение. ① $\frac{x+2}{x-2} - \frac{x+1}{x-1} - 3 = 0.$

$$\textcircled{2} \frac{(x+2)(x-1) - (x+1)(x-2) - 3(x-1)(x-2)}{(x-2)(x-1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2 - 11x + 6}{(x-2)(x-1)} = 0.$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} 3x^2 - 11x + 6 = 0, \\ (x-2)(x-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x = \frac{2}{3}, \\ x \neq 1, x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3; \\ x = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

④ **Ответ:** $\frac{2}{3}; 3.$

Пример 2. Решите уравнение

$$\frac{2}{a-3} = \frac{15}{a^2-6a+9} - 1.$$

Решение. ① $\frac{2}{a-3} - \frac{15}{a^2-6a+9} + 1 = 0.$

$$\textcircled{2} \frac{2}{a-3} - \frac{15}{(a-3)^2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{2(a-3) - 15 + (a-3)^2}{(a-3)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a-6-15+a^2-6a+9}{(a-3)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2-4a-12}{(a-3)^2} = 0.$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} a^2 - 4a - 12 = 0, \\ (a-3)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6, \\ a = -2, \\ a \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6, \\ a = -2. \end{cases}$$

④ **Ответ:** $-2; 6.$



Пример 3. Решите уравнение $x^2 + 3x + \frac{6}{2-3x-x^2} = 1.$

Решение. Выполним замену переменной $x^2 + 3x = t$ и получим уравнение $t + \frac{6}{2-t} = 1$, которое является дробно-рациональным. Решим его, применив алгоритм:

$$t + \frac{6}{2-t} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{t(2-t) + 6 - (2-t)}{2-t} = 0 \Leftrightarrow \frac{-t^2 + 3t + 4}{2-t} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 3t - 4 = 0, \\ t \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4, \\ t = -1, \\ t \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4, \\ t = -1. \end{cases}$$

Подставим найденные значения t в равенство $x^2 + 3x = t$ и получим:

$$\begin{cases} x^2 + 3x = 4, \\ x^2 + 3x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 4 = 0, \\ x^2 + 3x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4, \\ x = 1, \\ x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}, \\ x = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $-4; 1; \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}; \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$.

Дробно-рациональные уравнения используются как математические модели для решения задач, описывающих реальные ситуации.

Например, рассмотрим задачу. На тушение лесных пожаров площадью 200 га отправлено несколько вертолетов с водосливными устройствами. По информации метеорологов предполагается усиление ветра, поэтому было выделено еще 5 вертолетов, в связи с чем площадь для сброса воды каждым вертолетом уменьшилась на 20 га. Сколько вертолетов участвовало в тушении пожаров первоначально?

Решение.

① *Выясним, о каких величинах и зависимостях между ними в задаче идет речь.* В задаче речь идет о площади лесных пожаров и количестве вертолетов для тушения пожаров.

② *Выясним, какие значения величин и зависимости между ними известны.* Известна зависимость между количеством вертолетов и площадью для сброса воды.

③ *Выясним, какие значения величин и зависимости между ними не известны.* Неизвестно, сколько потребовалось вертолетов.

④ *Обозначим неизвестное значение одной величины через x , а остальные выразим через x и зависимости между величинами.* Обозначим через x первоначальное количество вертолетов и получим, что $(x + 5)$ вертолетов направлено на тушение пожаров после сообщения метеорологов. Составим таблицу зависимостей между величинами.

Величины	Количество вертолетов, шт.	Общая площадь лесных пожаров, га	Площадь сброса воды вертолетом, га
Первоначальное значение	x	200	$\frac{200}{x}$
Значение после сообщения метеорологов	$x + 5$	200	$\frac{200}{x + 5}$

⑤ Используя зависимости между известными и неизвестными значениями величин, составим уравнение (математическую модель задачи) и решим его.

По условию задачи $\frac{200}{x+5}$ га на 20 га меньше, чем $\frac{200}{x}$ га.

Значит, разность между большим и меньшим числом равна 20, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{200}{x} - \frac{200}{x+5} = 20 &\Leftrightarrow \frac{200}{x} - \frac{200}{x+5} - 20 = 0 \Leftrightarrow \frac{10}{x} - \frac{10}{x+5} - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{50 - x^2 - 5x}{(x+5)x} = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x - 50 = 0, \\ x(x+5) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -10, \\ x = 5, \\ x \neq 0, x \neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -10, \\ x = 5. \end{cases} \end{aligned}$$

⑥ Запишем ответ в соответствии со смыслом задачи. Поскольку x — число вертолетов, то выбираем число 5.

Ответ: 5 вертолетов.

Многие задачи, описывающие реальные процессы, имеют одну и ту же математическую модель. К таким относятся, например, задачи на движение, работу и т. п.

Рассмотрим две задачи.

Задача 1. Два велосипедиста выехали одновременно из поселка А в поселок В. Скорость первого велосипедиста на $2 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ больше скорости второго, поэтому он прибыл в поселок В на 0,5 ч раньше. С какими скоростями двигались велосипедисты, если расстояние между поселками равно 30 км?

Задача 2. Для заполнения водой резервуара объемом 30 м^3 используют два крана: первый кран заполняет резервуар на 0,5 ч быстрее второго, так как в час через него наливается на 2 м^3 больше, чем через второй. Найдите скорость заполнения резервуара водой через каждый кран.

В обеих задачах речь идет о процессах: в первой — о процессе движения, во второй — о процессе заполнения резервуара водой.

Составим таблицу зависимостей между величинами.

Процесс	Скорость	Результат (пройденный путь, объем воды в резервуаре)	Время
Движение первого велосипедиста	$x \frac{\text{км}}{\text{ч}}$	30 км	$\frac{30}{x}$ ч
Движение второго велосипедиста	$(x - 2) \frac{\text{км}}{\text{ч}}$	30 км	$\frac{30}{x - 2}$ ч
Заполнение резервуара водой через первый кран	$x \frac{\text{м}^3}{\text{ч}}$	30 м ³	$\frac{30}{x}$ ч
Заполнение резервуара водой через второй кран	$(x - 2) \frac{\text{м}^3}{\text{ч}}$	30 м ³	$\frac{30}{x - 2}$ ч

Поскольку первый велосипедист прибыл в поселок на 0,5 ч раньше второго, а один кран заполняет резервуар на 0,5 ч быстрее другого, то уравнение $\frac{30}{x - 2} - \frac{30}{x} = 0,5$ является математической моделью каждой из предложенных задач. Решим полученное уравнение:

$$\frac{30}{x - 2} - \frac{30}{x} = 0,5 \Leftrightarrow \frac{60 - 0,5x^2 + x}{(x - 2)x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0,5x^2 - x - 60 = 0, \\ (x - 2)x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 12, \\ x = -10, \\ x \neq 2, x \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12, \\ x = -10. \end{cases}$$

По условию каждой задачи подходит число 12.

Ответ: скорость первого велосипедиста $12 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, скорость второго велосипедиста $10 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Ответ: скорость заполнения резервуара водой через первый кран $12 \frac{\text{м}^3}{\text{ч}}$, через второй кран — $10 \frac{\text{м}^3}{\text{ч}}$.



**Дробно-рациональные уравнения.
Условие равенства дроби нулю**

<p>1. Является ли дробно-рациональным уравнение:</p> <p>а) $\frac{x}{3} + 1 = x$;</p> <p>б) $\frac{x-5}{x+5} = 1$;</p> <p>в) $\frac{x^2-25}{x-5} = 2x$;</p> <p>г) $\frac{x+5}{x-5} = \frac{1}{2}$?</p>	<p>Уравнение а) не является дробно-рациональным, так как его левая и правая части — целые рациональные выражения. Уравнения б)—г) являются дробно-рациональными, так как левые части этих уравнений — дробно-рациональные выражения.</p>
<p>2. Решите уравнение, используя условие равенства дроби нулю:</p> <p>а) $\frac{x-6}{x+6} = 0$;</p> <p>б) $\frac{x^2-36}{x-6} = 0$;</p> <p>в) $\frac{x^2-6x}{x+6} = 0$;</p> <p>г) $\frac{x+6}{x^2-36} = 0$.</p>	<p>а) $\frac{x-6}{x+6} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-6=0, \\ x+6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6, \\ x \neq -6 \end{cases} \Leftrightarrow x=6.$ <i>Ответ:</i> 6.</p> <p>б) $\frac{x^2-36}{x-6} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-36=0, \\ x-6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6, \\ x=-6, \\ x \neq 6 \end{cases} \Leftrightarrow x=-6.$ <i>Ответ:</i> -6.</p> <p>в) $\frac{x^2-6x}{x+6} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x=0, \\ x+6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ x=6, \\ x \neq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ x=6. \end{cases}$ <i>Ответ:</i> 0; 6.</p> <p>г) $\frac{x+6}{x^2-36} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+6=0, \\ x^2-36 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-6, \\ x \neq 6, \\ x \neq -6 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$ <i>Ответ:</i> нет корней.</p>
<p>3. Какие из уравнений:</p> <p>а) $x+5=0$;</p> <p>б) $\frac{x-5}{x+5}=0$;</p> <p>в) $\frac{x^2-25}{x-5}=0$;</p> <p>г) $\frac{x+5}{x-5}=0$ — равносильны?</p>	<p>а) $x+5=0 \Leftrightarrow x=-5$;</p> <p>б) $\frac{x-5}{x+5}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=5, \\ x \neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow x=5$;</p> <p>в) $\frac{x^2-25}{x-5}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=5, \\ x=-5, \\ x \neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x=-5$;</p> <p>г) $\frac{x+5}{x-5}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5, \\ x \neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x=-5.$ <i>Ответ:</i> уравнения а), в), г) имеют один и тот же корень (уравнения равносильны).</p>

**Решение дробно-рациональных уравнений
и уравнений, сводящихся к ним**

4. Решите уравнение:

а) $\frac{1}{x^2-9} - \frac{1}{x(x-3)} = \frac{3}{2x+6}$;

б) $\frac{x}{x^2-5x+6} + \frac{3}{x-2} = \frac{2}{x-3}$.

а) ① $\frac{1}{x^2-9} - \frac{1}{x(x-3)} - \frac{3}{2x+6} = 0$.

② $\frac{1}{(x-3)(x+3)} - \frac{1}{x(x-3)} - \frac{3}{2(x+3)} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2x-2x-6-3x^2+9x}{2x(x-3)(x+3)} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3x^2-9x+6}{2x(x-3)(x+3)} = 0$.

③ $\begin{cases} 3x^2-9x+6=0, \\ 2x(x-3)(x+3) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ x=2, \\ 2x(x-3)(x+3) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ x=2. \end{cases}$

④ *Ответ:* 1; 2.

б) $\frac{x}{x^2-5x+6} + \frac{3}{x-2} = \frac{2}{x-3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x}{x^2-5x+6} + \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-3} = 0$.

Разложим на множители квадратный трехчлен в знаменателе первой дроби и получим:

$\frac{x}{(x-2)(x-3)} + \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-3} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x+3(x-3)-2(x-2)}{(x-2)(x-3)} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2x-5}{(x-2)(x-3)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5=0, \\ (x-2)(x-3) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2,5, \\ (x-2)(x-3) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2,5$.

Ответ: 2,5.

5. Найдите нули функции

$f(x) = \frac{x^3-7x^2+12x}{x-4}$.

Так как нули функции — это значения аргумента, при которых значение функции равно нулю, то для решения задачи нужно решить уравнение $\frac{x^3-7x^2+12x}{x-4} = 0$.

	<p>Используем условие равенства дроби нулю:</p> $\frac{x^3 - 7x^2 + 12x}{x - 4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 7x^2 + 12x = 0, \\ x - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 - 7x + 12) = 0, \\ x - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 3, \\ x = 4, \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 3. \end{cases}$ <p><i>Ответ:</i> 0; 3.</p>
<p>6*. Найдите корни уравнения</p> $\frac{2x-1}{x} + \frac{x}{2x-1} = 4,25.$	<p>Выполним замену переменной в данном уравнении: $\frac{2x-1}{x} = t$. Получим уравнение $t + \frac{1}{t} = 4\frac{1}{4}$, которое является дробно-рациональным.</p> <p>Решим его:</p> $t + \frac{1}{t} - 4\frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} - \frac{17}{4} = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{4t^2 - 17t + 4}{4t} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4t^2 - 17t + 4 = 0, \\ 4t \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} t = 4, \\ t = \frac{1}{4}, \\ t \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4, \\ t = \frac{1}{4}. \end{cases}$ <p>Выполним подстановку найденных значений переменной t и получим:</p> $\begin{cases} \frac{2x-1}{x} = 4, \\ \frac{2x-1}{x} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}, \\ x = \frac{4}{7}. \end{cases}$ <p><i>Ответ:</i> $-\frac{1}{2}; \frac{4}{7}$.</p>
<p>Моделирование реальных процессов с помощью дробно-рациональных уравнений</p>	

Задача. Катер прошел 15 км по течению реки и 4 км по озеру, затратив на весь путь 1 ч. Чему равна скорость катера при движении по озеру, если скорость течения реки $4 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$?

Решение. В задаче идет речь о процессах движения катера по реке и по озеру. Составим таблицу зависимостей между величинами.

Процесс	Скорость, $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$	Расстояние, км	Время, ч
Движение по озеру	x	4	$\frac{4}{x}$
Движение по реке	$x + 4$	15	$\frac{15}{x + 4}$

Так как по условию задачи на весь путь затрачен 1 ч, то составим уравнение: $\frac{4}{x} + \frac{15}{x + 4} = 1$. Решим его: $\frac{4}{x} + \frac{15}{x + 4} = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 15x - 16 = 0, \\ x(x + 4) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16, \\ x = -1. \end{cases} \text{ По условию подходит число } 16.$$

Ответ: $16 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.



1. Верно ли, что $x = 1$ — корень уравнения:

а) $\frac{x - 1}{x + 1} = 0$; б) $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = 0$?

2. Выберите верные утверждения:

- а) если числитель дроби равен нулю, то дробь равна нулю;
- б) если дробь равна нулю, то ее числитель равен нулю;
- в) если дробь не равна нулю, то ее числитель не равен нулю;
- г) если числитель дроби не равен нулю, то дробь не равна нулю.



3.4. Из данных уравнений выберите все дробно-рациональные уравнения:

а) $\frac{x - 2}{x + 5} = 0$; б) $\frac{x + 4}{7} = 12x$;

в) $9 - x = \frac{x + 8}{x^2 - 7}$; г) $\frac{3x}{x - 1} = \frac{x + 2}{x}$.

3.5. Решите уравнение, используя условие равенства дроби нулю:

а) $\frac{x + 2}{x - 2} = 0$; б) $\frac{3x - 1}{x} = 0$;

в) $\frac{x^2 - 9}{x - 3} = 0$; г) $\frac{x - 7}{x^2 - 49} = 0$;

д) $\frac{x^2 - 6x}{2x - 12} = 0$; е) $\frac{x^2 + 7x}{x^2} = 0$;

ж) $\frac{x^2 - 6x + 5}{x - 1} = 0$; з) $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = 0$.

3.6. Какие из данных уравнений равносильны уравнению $\frac{9-x^2}{x-3} = 0$:

а) $5x + 15 = 0$; б) $\frac{x^2+4x+3}{x+1} = 0$;

в) $x^2 + 3x = 0$; г) $\frac{x^2-6x+9}{x+3} = 0$?

3.7. Придумайте два дробно-рациональных уравнения, равносильных уравнению $8x - 16 = 0$.

3.8. Используйте условие равенства дроби нулю и найдите все значения переменной, при которых дробь $\frac{x^4-5x^2+4}{x^2-1}$ равна нулю.

3.9. Решите уравнение, используя алгоритм:

а) $\frac{x-6}{x} = 4$; б) $\frac{3x}{x+7} = 1$; в) $\frac{9-x}{x} = -3$;

г) $\frac{3x-1}{x-6} = \frac{1}{5}$; д) $\frac{x^2+3}{x} = 4$; е) $\frac{6x^2-4}{x} = 5x$;

ж) $2x = \frac{x^2+x}{x-3}$; з) $\frac{25-7x^2}{6x} = -x$; и) $\frac{3x-20}{x-2} = x$;

к) $x+2 = \frac{15}{x}$; л) $x-3 = \frac{4}{x}$; м) $x = 1 + \frac{2}{x}$.

3.10. В обыкновенной дроби числитель на 5 меньше знаменателя. Если числитель этой дроби уменьшить на 3, а знаменатель увеличить на 7, то получится дробь $\frac{4}{19}$. Найдите исходную дробь.

3.11. Найдите все значения переменной, при которых равны значения выражений:

а) $\frac{4}{x+4}$ и $4-x$; б) $x+3$ и $\frac{1}{x+3}$.

3.12. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{x^2}{x-4} = \frac{16}{x-4}$; б) $\frac{x^2-x}{x-6} = \frac{5x}{x-6}$;

в) $\frac{x^2-7x}{x+10} = \frac{30}{x+10}$; г) $\frac{x^2-2x}{x-4} = \frac{4-3x}{4-x}$;

д) $\frac{x^2-2x}{2x-1} = \frac{5x-4}{1-2x}$; е) $\frac{x^2+2x}{x^2-3x} = \frac{x-18}{3x-x^2}$.

3.13. Составьте план решения и найдите нули функции:

а) $f(x) = \frac{x^2+2x}{x^2-5x} - \frac{7x+50}{x(x-5)}$; б) $f(x) = \frac{x^2-8x}{x^2-9} - \frac{18-x}{9-x^2}$.

3.14. Решите дробно-рациональное уравнение, используя алгоритм:

$$\text{а) } \frac{x}{x+3} = \frac{1}{x-1}; \quad \text{б) } \frac{x+10}{2-x} = \frac{x-2}{x};$$

$$\text{в) } \frac{3x+4}{x-3} = \frac{2x-9}{x+1}; \quad \text{г) } \frac{2x-1}{3-2x} = \frac{x-1}{2x+3}.$$

3.15. Найдите все значения аргумента, при которых значение функции:

$$\text{а) } y = \frac{2x^2+x-1}{2x-1} \text{ равно } 2;$$

$$\text{б) } y = 3x - \frac{2x^2-3x+1}{x-1} \text{ равно } 4.$$

3.16. Найдите корни уравнения:

$$\text{а) } \frac{2}{x-2} - \frac{5}{x+2} = 1; \quad \text{б) } \frac{x+5}{2x} + \frac{2x}{x+5} = 2;$$

$$\text{в) } \frac{3x-9}{x-1} + \frac{x+6}{x+1} = 3; \quad \text{г) } \frac{3x-1}{2x-3} - 4 = \frac{7}{2x+3};$$

$$\text{д) } \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} = \frac{6}{x+3}; \quad \text{е) } \frac{4}{x+2} + \frac{3}{x+3} = \frac{8x+3}{x+1}.$$

3.17. Найдите все значения переменной, при которых:

$$\text{а) сумма дробей } \frac{1}{x} \text{ и } \frac{2}{x+2} \text{ равна } 1;$$

$$\text{б) разность дробей } \frac{1}{x} \text{ и } \frac{1}{x+4} \text{ равна } \frac{1}{3};$$

$$\text{в) значение дроби } \frac{x-4}{5-x} \text{ на } 2 \text{ меньше значения дроби } \frac{x-6}{x+5}.$$

3.18. Готовясь к вступительным экзаменам, абитуриент должен был решить 180 задач. Ежедневно он решал на 2 задачи больше, чем планировал, и поэтому закончил подготовку на 1 день раньше запланированного срока. За сколько дней абитуриент решил все задачи?

3.19. Решите задачу:

а) При патрулировании катер МЧС прошел 56 км против течения реки и 32 км по течению, затратив на весь путь 3 ч. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость катера составляет $30 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

б) Студент первого и студент второго курса летом работали в строительном отряде. Работая вместе, они покрасили стену за 12 ч. Известно, что второкурсник может покрасить такую же стену на 7 ч быстрее, чем первокурсник. Успеет ли первокурсник покрасить такую стену за три дня, если будет работать один и не более 9 ч в день?

3.20. Решите уравнение:

$$\text{а) } \frac{x+4}{x-2} - \frac{x-3}{x^2-2x} = \frac{x-2}{x};$$

$$\text{б) } \frac{1}{x} - \frac{x-7}{x-6} + \frac{6}{6x-x^2} = 0;$$

$$\text{в) } \frac{x+1}{x-5} + \frac{12}{x^2-25} = 1;$$

$$\text{г) } \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{7x}{x^2-1};$$

$$\text{д) } \frac{x}{3x+7} - \frac{3}{3x-7} = \frac{9x+21}{49-9x^2};$$

$$\text{е) } \frac{6}{x^2-36} + \frac{x-12}{x^2+6x} = \frac{3}{x^2-6x}.$$

3.21. Найдите абсциссы точек пересечения графика функции с осью Ox :

$$\text{а) } f(x) = \frac{x}{x+1} - \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1};$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{1}{9x^2-1} - \frac{4}{3x+1} - \frac{5}{x-3x^2}.$$

3.22. Решите задачу:

а) Протяженность шоссе между двумя городами составляет 300 км. Из одного города в другой одновременно выехали маршрутное такси и рейсовый автобус. Автобус двигался со скоростью на $10 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ меньше, чем маршрутное такси, и прибыл в пункт назначения на 1 ч позже такси. Найдите скорость автобуса.

б) В оздоровительном центре два бассейна: объемом 360 м^3 и 480 м^3 . После плановой чистки их необходимо наполнить водой. Из трубы, наполняющей меньший бассейн, вытекает в час на 10 м^3 воды меньше, чем из трубы, наполняющей больший бассейн. Для наполнения меньшего бассейна потребовалось на 2 ч больше, чем для наполнения большего бассейна. Найдите, сколько кубических метров воды вытекает в час из каждой трубы.

3.23. Найдите корни уравнения:

$$\text{а) } \frac{2}{x-3} + 1 = \frac{15}{x^2-6x+9};$$

$$\text{б) } \frac{5}{x^2+2x+1} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{x-1};$$

$$\text{в) } \frac{x+3}{x^2-4x+4} - \frac{x}{x^2-2x} = \frac{5}{x};$$

$$\text{г) } \frac{3}{x^2+4x+4} + \frac{4}{x^2-4} = \frac{1}{x-2};$$

$$д) \frac{4}{x^2 - 10x + 25} + \frac{10}{25 - x^2} = \frac{1}{x + 5};$$

$$е) \frac{4}{9x^2 - 1} = \frac{1}{9x^2 + 6x + 1} - \frac{1}{3x^2 + x}.$$

Какие преобразования вы выполняли во всех уравнениях?

3.24. Найдите все значения аргумента, при которых значение функции $y = \frac{14}{x - 4} - \frac{45}{x^2 - 8x + 16}$ равно 1.

3.25. Решите задачу:

а) Биатлонисту на тренировке необходимо было пробежать расстояние в 30 км. Начав бег на 3 мин позже намеченного срока, биатлонист бежал со скоростью больше предполагавшейся на $1 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ и прибежал к месту назначения вовремя. Найдите скорость, с которой бежал биатлонист.

б) Из одного города в другой к определенному времени грузовой автомобиль должен был доставить груз. Первые 200 км пути автомобиль двигался с запланированной скоростью. Затем погодные условия ухудшились, и последние 150 км грузу пришлось двигаться со скоростью на $20 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ меньше запланированной. На весь путь между городами потребовалось 5 ч. Найдите время, на которое опоздал водитель с доставкой груза.

в) Прогулка по реке на туристическом катере длится 3 ч. За это время катер проплывает 40 км по течению реки и возвращается обратно к пристани. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки составляет $3 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

3.26. Решите уравнение:

$$а) \frac{5}{x + 1} + \frac{4x - 6}{(x + 1)(x + 3)} = 3;$$

$$б) \frac{6}{(x - 1)(x - 3)} + \frac{13 - 7x}{x - 1} = \frac{3}{x - 3};$$

$$в) \frac{x + 4}{x + 5} + \frac{9 + 2x}{x - 2} = \frac{7}{x^2 + 3x - 10};$$

$$г) \frac{2x^2}{x^2 + x - 6} - \frac{x + 1}{x - 2} = 1;$$

$$д) 5 - \frac{x^2 - 14x - 51}{x^2 - x - 12} = \frac{3x}{x - 4};$$

$$е) \frac{2x - 7}{x^2 - 9x + 14} - \frac{1}{x - 1} = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}.$$

3.27. Поезд отправился со станции по расписанию и до следующей остановки должен был пройти 64 км. Когда он проехал 24 км, то по указанию диспетчера был задержан возле семафора на 12 мин. После этого поезд увеличил скорость на $10 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ и прибыл в пункт назначения с опозданием на 4 мин.

Найдите первоначальную скорость поезда.

3.28. Найдите, при каких значениях переменной:

а) сумма дробей $\frac{2x^2}{x^2+4x}$ и $\frac{27}{2x^2+7x-4}$ равна дроби $\frac{7-2x}{2x-1}$;

б) разность дробей $\frac{5x-1}{2x-1}$ и $\frac{1}{x+2}$ равна дроби $\frac{3}{2-3x-2x^2}$.

3.29*. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^2+2} = \frac{3}{x^3-x^2+2x-2}$;

б) $\frac{4}{x^2-16} - \frac{1}{x^2+8x+16} = \frac{10}{x^3-16x-4x^2+64}$.

3.30*. Выполните замену переменной и решите уравнение:

а) $3x^2 - 2 + \frac{1}{3x^2-2} = 2$; б) $\frac{x^2+2}{x} + \frac{x}{x^2+2} = 3\frac{1}{3}$;

в) $x^2 - 4x - \frac{15}{x^2-4x} = 2$; г) $\frac{21}{x^2-4x+10} - x^2 + 4x = 6$;

д) $\frac{x^2+x-10}{2} - \frac{3}{2x^2+2x-20} = 1$; е) $\frac{1}{x^2+6x} - \frac{1}{(x+3)^2} = \frac{9}{10}$.

3.31*. Найдите количество целых корней уравнения $\frac{2}{x^2-6x+8} = \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-2}$ на промежутке $[-1; 7]$.

3.32*. Найдите сумму корней уравнения $\frac{x^{19}-1}{1-x^{17}} = \frac{1-x^{17}}{x^{15}-1}$.

3.33*. Найдите произведение корней уравнения

$$\frac{6}{(x+1)(x+2)} + \frac{8}{(x-1)(x+4)} = 1.$$

3.34*. Найдите меньший корень уравнения

$$\left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right) - \left(x + \frac{4}{x}\right) - 12 = 0.$$



3.35. Решите уравнение, используя условие равенства дроби нулю:

а) $\frac{2x-5}{x+3} = 0$; б) $\frac{x^2-4}{x-2} = 0$; в) $\frac{3x+18}{x^2-36} = 0$;

$$\text{г) } \frac{4x^2 - x}{x} = 0; \quad \text{д) } \frac{x^2 - 10x + 16}{x - 8} = 0; \quad \text{е) } \frac{x^2 - 25}{x^2 + 7x + 10} = 0.$$

3.36. Верно ли, что уравнения $\frac{x^2 - 81}{x - 9} = 0$ и $\frac{x^2 + 11x + 18}{x + 2} = 0$ равносильны? Придумайте пример линейного уравнения, равносильного данным.

3.37. Решите уравнение, используя алгоритм:

$$\text{а) } \frac{x + 10}{x} = 7; \quad \text{б) } \frac{x}{2x - 1} = -\frac{3}{7};$$

$$\text{в) } \frac{7x^2 + 4}{4x} = 2x; \quad \text{г) } \frac{3x^2 + 5}{1 - x^2} = -4.$$

3.38. Числитель обыкновенной дроби на 3 меньше знаменателя. Если числитель этой дроби уменьшить на 5, а знаменатель увеличить на 3, то получится дробь $\frac{8}{19}$. Найдите исходную дробь.

3.39. Найдите все значения переменной, при которых значение дроби $\frac{4}{x + 4}$ равно значению выражения $x + 4$.

3.40. Найдите все корни уравнения:

$$\text{а) } \frac{x^2}{x - 7} = \frac{49}{x - 7}; \quad \text{б) } \frac{x^2 - 2x}{x - 4} = \frac{2x}{x - 4};$$

$$\text{в) } \frac{x^2}{x - 6} = \frac{7x - 6}{x - 6}; \quad \text{г) } \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x} = \frac{16 - 7x}{2x - x^2}.$$

3.41. Найдите нули функции $f(x) = \frac{x^2 - 14}{x^2 - 4} + \frac{5x}{4 - x^2}$.

3.42. Являются ли следующие уравнения дробно-рациональными? Решите уравнение, используя соответствующий алгоритм:

$$\text{а) } \frac{x}{x + 4} = \frac{1}{x - 2}; \quad \text{б) } \frac{x + 7}{2 - x} = \frac{x - 1}{x};$$

$$\text{в) } \frac{5x + 2}{x - 1} = \frac{4x + 13}{x + 7}; \quad \text{г) } \frac{x - 5}{x + 3} = \frac{2x + 3}{2x - 1}.$$

3.43. Найдите все значения аргумента, при которых значение функции $y = 2x - \frac{3x^2 - 4x - 20}{x + 2}$ равно 5.

3.44. Найдите корни уравнения:

$$\text{а) } \frac{12}{x - 1} - \frac{8}{x + 1} = 1; \quad \text{б) } \frac{x + 12}{x + 2} + \frac{9}{x} = 2;$$

$$\text{в) } \frac{5x + 12}{x + 2} - 5 = \frac{x - 7}{2 - x}; \quad \text{г) } \frac{x + 1}{x - 2} + \frac{7}{x + 2} = \frac{x + 10}{x}.$$

3.45. Найдите все значения переменной, при которых:

а) сумма дробей $\frac{x-3}{4x}$ и $\frac{5x-3}{x-3}$ равна 3;

б) разность дробей $\frac{x}{2x-5}$ и $\frac{4}{x}$ равна $\frac{1}{3}$.

3.46. Решите задачу, выполнив анализ зависимостей между значениями величин:

а) Девятиклассник должен был за определенное время выучить 160 новых иностранных слов. Ежедневно он учил на 4 слова больше, чем планировал, поэтому он справился с заданием на 2 дня раньше запланированного срока. Сколько слов в день учил девятиклассник?

б) На оптовый склад торговой сети ежемесячно поступает 180 т фруктов. В прошлом месяце поступившие фрукты были поровну распределены между несколькими магазинами сети. В текущем месяце было решено задействовать на 3 магазина меньше. В каждый магазин было поставлено на 3 т фруктов больше. Сколько магазинов сети было задействовано в предыдущем месяце?

в) Программа экскурсии по живописным местам предусматривает двухчасовую прогулку на теплоходе. За это время теплоход проходит 21 км против течения реки и 8 км по течению. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость теплохода составляет $15 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

г) Два тестировщика программного обеспечения, работая вместе, выполнили задание за 8 ч. За сколько часов может выполнить это задание каждый тестировщик самостоятельно, если одному из них на это нужно на 12 ч больше, чем другому?

3.47. Решите уравнение:

а) $\frac{x+1}{x} + \frac{2}{x-5} = \frac{10}{x^2-5x}$;

б) $\frac{4}{x^2-9} + \frac{x+1}{x-3} = 1$;

в) $\frac{2x+3}{x+1} + \frac{2}{x^2-1} = \frac{x+1}{x-1}$;

г) $\frac{x}{3x+2} + \frac{5}{2-3x} = \frac{15x+10}{4-9x^2}$.

3.48. Составьте модель условия и решите задачу:

а) Протяженность шоссе между двумя городами составляет 240 км. Для доставки груза из одного города в другой одновременно выехали два автомобиля. Один из них двигался со скоростью на $20 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ больше, чем другой, и прибыл в пункт назначения на 1 ч раньше другого. Найдите скорости автомобилей.

б) Первая труба заполняет водой аквариум объемом 10 м^3 на 5 минут быстрее, чем вторая труба. Найдите, сколько кубических метров воды вытекает в час из каждой трубы, если из первой трубы в час вытекает на 10 м^3 больше воды, чем из второй.

3.49. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{3}{x+2} + 1 = \frac{4}{x^2+4x+4}$;

б) $\frac{3}{x^2-6x+9} + \frac{6}{9-x^2} = \frac{1}{x+3}$;

в) $\frac{4}{2x^2+x} = \frac{3}{4x^2+4x+1} - \frac{3}{1-4x^2}$.

3.50. Туристы шли вдоль реки к остановке автобуса. Не дойдя до остановки 3 км, они решили искупаться и потратили на это 15 мин. Чтобы успеть к автобусу вовремя, им пришлось увеличить скорость на $2 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Найдите, с какой скоростью шли туристы после купания.

3.51. Решите уравнение:

а) $\frac{2}{x-1} + \frac{5}{x-2} = \frac{13}{(x-1)(x-2)}$;

б) $\frac{x+1}{x-2} + \frac{x-2}{x+3} = \frac{15}{(x-2)(x+3)}$;

в) $\frac{1-9x}{x^2+2x-3} + \frac{3x-1}{x-1} = \frac{2x}{x+3}$;

г) $\frac{7-2x}{x^2-5x-6} + \frac{3}{x^2-9x+18} = \frac{1}{3-x}$.

3.52*. Найдите корни уравнения

$$\frac{x}{x^2+6x+5} + \frac{3x+1}{2x^2+8x-10} = \frac{2x+68}{x^3+5x^2-x-5}.$$

3.53*. Выполните замену переменной и решите уравнение:

а) $x^2 - 15 + \frac{1}{x^2-15} = 2$;

б) $\frac{x^2-3}{x} + \frac{x}{x^2-3} = 2\frac{1}{2}$;

в) $x^2 + x + \frac{8}{x^2+x} = 6$;

г) $\frac{3}{x^2+x+1} = 3 - x^2 - x$;

д) $\frac{x^2+x-4}{2} - \frac{3}{2x^2+2x-8} = 1$;

е) $\frac{1}{x^2+4x} - \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{4}{5}$.

3.54*. Найдите произведение корней уравнения

$$\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - 7\left(x - \frac{2}{x}\right) = 4.$$



3.55. Найдите количество простых чисел на промежутке $[1; 27]$.

3.56. Выберите все верные равенства:

- а) $3\% = 0,3$; б) $75\% = \frac{3}{4}$; в) $12,5\% = 1,25$;
 г) $280 = 2,8\%$; д) $43\% = 0,43$.

3.57. Вычислите:

- а) $(125 \cdot 5^{-4})^2$; б) $\frac{3^{-4} \cdot 3^{-9}}{3^{-12}}$; в) $1000^{-6} \cdot (10^2)^9$.

3.58. Из равенства $2m - 5n = 10$ выразите:

- а) m через n ; б) n через m .

3.59. Докажите, что $\sqrt{26} + \sqrt{82} > 14$.

3.60. Решите графически систему уравнений $\begin{cases} x - 2y = 1, \\ x - y = 2. \end{cases}$

3.61. Сократите дробь $\frac{a^2 - a - 12}{16 - a^2}$.

3.62. Найдите значение выражения $|-3,21| - |-2,2| + |-7|$.

3.63. Докажите, что функция $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$ является четной.

3.64. Найдите расстояние от начала координат до точки пересечения прямой $3x + 7y + 21 = 0$ с осью абсцисс.

§ 11. Системы нелинейных уравнений



3.65. Решите способом подстановки систему уравнений

$$\begin{cases} x - 5y = -1, \\ 2x - 7y = 6. \end{cases}$$

3.66. Решите способом сложения систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 5y = -12, \\ -2x - 7y = 36. \end{cases}$$

3.67. Постройте графики уравнений системы $\begin{cases} 2x + y = -1, \\ -2x + y = 1 \end{cases}$ и определите число решений системы.



Рассмотрим задачу. Из листа картона прямоугольной формы нужно изготовить коробку без крышки, сделав надрезы в углах длиной 4 см (рис. 67). Найдите длину и ширину листа, зная, что его периметр равен 60 см, а объем коробки должен быть равен 160 см^3 .