



3.55. Найдите количество простых чисел на промежутке $[1; 27]$.

3.56. Выберите все верные равенства:

- а) $3\% = 0,3$; б) $75\% = \frac{3}{4}$; в) $12,5\% = 1,25$;
 г) $280 = 2,8\%$; д) $43\% = 0,43$.

3.57. Вычислите:

- а) $(125 \cdot 5^{-4})^2$; б) $\frac{3^{-4} \cdot 3^{-9}}{3^{-12}}$; в) $1000^{-6} \cdot (10^2)^9$.

3.58. Из равенства $2m - 5n = 10$ выразите:

- а) m через n ; б) n через m .

3.59. Докажите, что $\sqrt{26} + \sqrt{82} > 14$.

3.60. Решите графически систему уравнений $\begin{cases} x - 2y = 1, \\ x - y = 2. \end{cases}$

3.61. Сократите дробь $\frac{a^2 - a - 12}{16 - a^2}$.

3.62. Найдите значение выражения $|-3,21| - |-2,2| + |-7|$.

3.63. Докажите, что функция $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$ является четной.

3.64. Найдите расстояние от начала координат до точки пересечения прямой $3x + 7y + 21 = 0$ с осью абсцисс.

§ 11. Системы нелинейных уравнений



3.65. Решите способом подстановки систему уравнений

$$\begin{cases} x - 5y = -1, \\ 2x - 7y = 6. \end{cases}$$

3.66. Решите способом сложения систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 5y = -12, \\ -2x - 7y = 36. \end{cases}$$

3.67. Постройте графики уравнений системы $\begin{cases} 2x + y = -1, \\ -2x + y = 1 \end{cases}$ и определите число решений системы.



Рассмотрим задачу. Из листа картона прямоугольной формы нужно изготовить коробку без крышки, сделав надрезы в углах длиной 4 см (рис. 67). Найдите длину и ширину листа, зная, что его периметр равен 60 см, а объем коробки должен быть равен 160 см^3 .

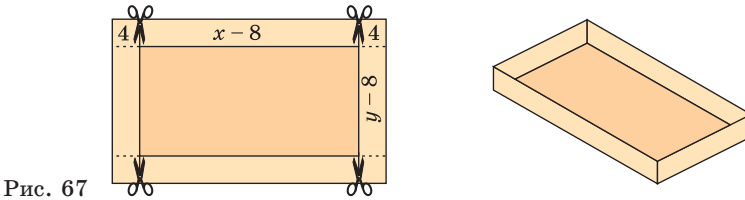


Рис. 67

Решение. Обозначим длину и ширину листа соответственно x см и y см. Так как в углах листа сделаны надрезы длиной 4 см, то высота коробки равна 4 см, а длина и ширина коробки равны $(x - 8)$ см и $(y - 8)$ см соответственно.

По условию задачи периметр листа прямоугольной формы равен 60 см, а объём коробки равен 160 см^3 , значит, $(x + y) \cdot 2 = 60$ и $(x - 8) \cdot (y - 8) \cdot 4 = 160$. Оба полученных условия должны быть выполнены, поэтому объединим их в систему уравнений

$$\begin{cases} (x + y) \cdot 2 = 60, \\ (x - 8) \cdot (y - 8) \cdot 4 = 160. \end{cases}$$

Полученная система уравнений содержит **нелинейное рациональное уравнение** $(x - 8) \cdot (y - 8) \cdot 4 = 160$. Такие системы называют **системами нелинейных уравнений**. Рассмотрим способы решения систем нелинейных уравнений.

Способ подстановки

Решим полученную в задаче систему уравнений способом подстановки:

$$\begin{cases} (x + y) \cdot 2 = 60, \\ (x - 8) \cdot (y - 8) \cdot 4 = 160 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 30, \\ (x - 8)(y - 8) = 40. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы выразим переменную x и получим $x = 30 - y$.

Заменим во втором уравнении переменную x на $30 - y$ и получим уравнение $(30 - y - 8)(y - 8) = 40$. Решим это уравнение:

$$\begin{aligned} (22 - y)(y - 8) &= 40 \Leftrightarrow 22y - 176 - y^2 + 8y = 40 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y^2 - 30y + 216 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 12, \\ y = 18. \end{cases} \end{aligned}$$

Найденные значения y подставим в выражение $x = 30 - y$. Тогда если $y = 12$, то $x = 30 - 12 = 18$, а если $y = 18$, то $x = 30 - 18 = 12$.

Решениями системы уравнений являются пары чисел $(12; 18)$ и $(18; 12)$. Таким образом, размер прямоугольного листа картона 12×18 см.



Чтобы решить систему уравнений способом подстановки, нужно:

- ① Из одного уравнения системы выразить одну из переменных.
- ② Заменить в другом уравнении эту переменную на ее выражение.
- ③ Решить полученное уравнение.
- ④ Найденные значения одной переменной подставить в выражение для другой переменной и найти значение другой переменной.
- ⑤ В виде упорядоченных пар чисел записать ответ.

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ x - 4y = 0. \end{cases}$$

- ① Из второго уравнения системы выразим переменную x :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ x = 4y. \end{cases}$$
- ② Заменим в первом уравнении переменную x на $4y$: $(4y)^2 + y^2 = 17$,

$$x = 4y.$$
- ③ Решим уравнение $(4y)^2 + y^2 = 17$ и получим: $16y^2 + y^2 = 17$; $17y^2 = 17$; $y^2 = 1$; $y_1 = 1$, $y_2 = -1$.
- ④ Найденные значения y подставим в выражение $x = 4y$.
 Если $y_1 = 1$, то $x_1 = 4 \cdot 1 = 4$.
 Если $y_2 = -1$, то $x_2 = 4 \cdot (-1) = -4$.
- ⑤ **Ответ:** (4; 1), (-4; -1).

Способ сложения



Чтобы решить систему уравнений способом сложения, нужно:

- ① Одно из уравнений системы оставить без изменения, а другое заменить суммой уравнений системы.
- ② Из полученного уравнения (суммы) найти значения одной из переменных.
- ③ Подставить эти значения переменной в оставленное без изменения уравнение системы и найти значения другой переменной.
- ④ Записать ответ.

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

- ①
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ 2x^2 = 8. \end{cases}$$
- ② $2x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = -2. \end{cases}$
- ③ При $x = 2$ получим:
 $4 + y^2 = 5 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1, \\ y = -1. \end{cases}$
 При $x = -2$ получим:
 $4 + y^2 = 5 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1, \\ y = -1. \end{cases}$
- ④ **Ответ:** (2; 1), (2; -1), (-2; 1), (-2; -1).

Графический метод решения систем нелинейных уравнений

Решим систему уравнений $\begin{cases} xy = 1, \\ y = x^2 - 2x + 2 \end{cases}$ графическим

методом. Для этого построим в одной системе координат графики каждого из уравнений системы.

Первое уравнение системы равносильно уравнению $y = \frac{1}{x}$, графиком которого является гипербола, проходящая через точки (1; 1), (0,5; 2) (рис. 68).

Графиком второго уравнения системы $y = x^2 - 2x + 2$ является парабола с вершиной в точке (1; 1), пересекающая ось ординат в точке (0; 2).

Единственная точка пересечения гиперболы $y = \frac{1}{x}$ и параболы $y = x^2 - 2x + 2$ имеет координаты (1; 1).

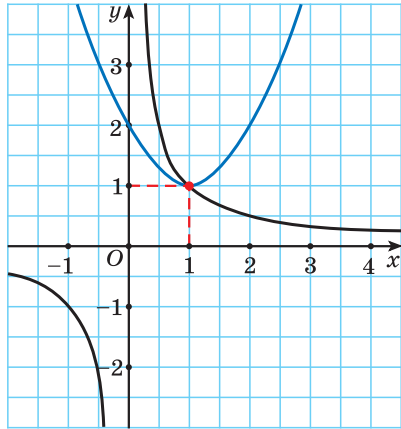


Рис. 68



Поскольку графический метод решения систем уравнений не является точным, то полученный результат необходимо проверить.

Подставим пару чисел (1; 1) в каждое из уравнений системы $\begin{cases} xy = 1, \\ y = x^2 - 2x + 2 \end{cases}$ и получим верные равенства. Таким образом, данная система имеет единственное решение (1; 1).

В рассмотренной системе решением оказалась пара целых чисел, которую легко было найти с помощью построенных графиков. В других случаях найти точные значения переменных по графику может оказаться затруднительно. Но, как правило, с помощью графического метода можно определить число решений системы уравнений.

Например, определим число решений системы уравнений $\begin{cases} xy = 5, \\ y = -x^2 + 6. \end{cases}$ Построим в одной системе координат графики

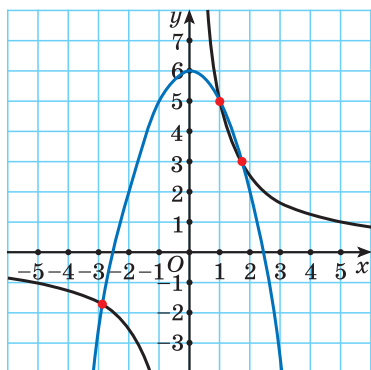


Рис. 69

каждого из уравнений системы (рис. 69). Графиком первого уравнения системы является гипербола, проходящая через точки (1; 5), (5; 1). График второго уравнения — парабола, ветви которой направлены вниз, с вершиной в точке (0; 6). Графики пересекаются в трех точках, значит, система уравнений имеет три решения.

Моделирование реальных процессов с помощью систем нелинейных уравнений

Системы нелинейных уравнений также являются математическими моделями при решении задач.

Например, решим задачу. Лечебными травами было решено засеять прямоугольный участок площадью 180 м^2 . При вспашке участка одну его сторону уменьшили на 3 м, а другую — на 2 м. Его площадь стала равна 120 м^2 . Какими были первоначальные размеры участка?

Решение. В задаче речь идет о длине и ширине прямоугольного участка и его площади.

Если одну сторону участка обозначить через x , а другую — через y , то планируемая площадь участка равна $xy \text{ м}^2$. По условию она равна 180 м^2 , значит, получится уравнение $xy = 180$.

После уменьшения размеров участка площадь станет равной $(x - 3)(y - 2) \text{ м}^2$. По условию задачи составим уравнение $(x - 3)(y - 2) = 120$.

Объединим оба уравнения в систему
$$\begin{cases} xy = 180, \\ (x - 3)(y - 2) = 120. \end{cases}$$

Получили математическую модель задачи в виде системы нелинейных уравнений. Решим ее, используя способ подстановки.

$$\begin{cases} xy = 180, \\ (x - 3)(y - 2) = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 180, \\ xy - 2x - 3y + 6 = 120 \end{cases} \Leftrightarrow$$

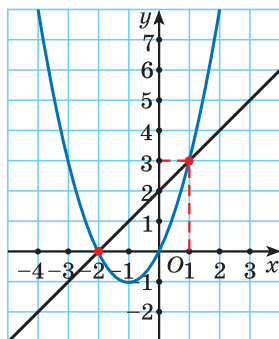
$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 180, \\ 3y + 2x = 66 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 180, \\ x = 33 - 1,5y \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 1,5y^2 - 33y + 180 = 0, \\ x = 33 - 1,5y \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 12, \\ y = 10, \\ x = 33 - 1,5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15, \\ y = 12, \\ x = 18, \\ y = 10. \end{cases} \end{aligned}$$

Условию задачи удовлетворяют найденные решения системы: стороны участка равны либо 15 м и 12 м, либо 18 м и 10 м.

Ответ: 15 м, 12 м или 18 м, 10 м.

 Решение систем нелинейных уравнений	
1. Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y^2 + xy = -10, \\ 5y - 2xy = 17. \end{cases}$	а) Решим систему способом подстановки: $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - y, \\ (3 - y)^2 + y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - y, \\ -6y + 2y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - y, \\ \begin{cases} y = 0, \\ y = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 0, \\ x = 0, \\ y = 3. \end{cases}$ Ответ: (3; 0), (0; 3). б) Применим способ сложения. Умножим первое уравнение на 2, сложим со вторым и получим: $\begin{cases} 2y^2 + 2xy = -20, \\ 5y - 2xy = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 + 5y = -3, \\ 5y - 2xy = 17 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 + 5y + 3 = 0, \\ 5y - 2xy = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1, \\ y = -1,5, \\ 5y - 2xy = 17 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1, \\ 5y - 2xy = 17, \\ y = -1,5, \\ 5y - 2xy = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1, \\ x = 11, \\ y = -1,5, \\ x = 8\frac{1}{6}. \end{cases}$ Ответ: (11; -1), $(8\frac{1}{6}; -1,5)$.
2. Решите графически систему уравнений $\begin{cases} y - x - 2 = 0, \\ y - (x + 1)^2 = -1. \end{cases}$	Построим графики уравнений системы $\begin{cases} y - x - 2 = 0, \\ y - (x + 1)^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2, \\ y = (x + 1)^2 - 1. \end{cases}$

График первого уравнения — прямая, проходящая через точки $(-2; 0)$, $(1; 3)$. График второго уравнения — парабола с вершиной в точке $(-1; -1)$, пересекающая ось абсцисс в точках $(-2; 0)$ и $(0; 0)$, проходящая через точку $(1; 3)$.



Прямая пересекается с параболой в точках с координатами $(-2; 0)$, $(1; 3)$.

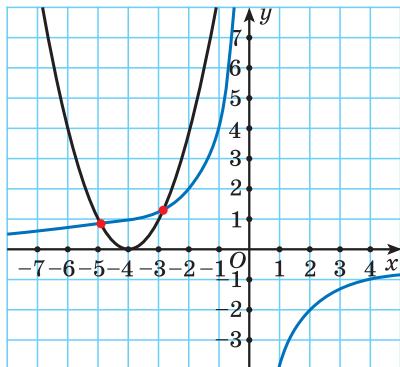
С помощью проверки убеждаемся, что пары чисел $(-2; 0)$ и $(1; 3)$ являются решениями данной системы.

Ответ: $(-2; 0)$, $(1; 3)$.

3. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} xy = -4, \\ y = (x + 4)^2? \end{cases}$$

Построим в одной системе координат графики уравнений системы. Графиком первого уравнения системы является гипербола, проходящая через точки $(-1; 4)$, $(-4; 1)$. График второго уравнения — парабола с вершиной в точке $(-4; 0)$, пересекающая ось ординат в точке $(0; 16)$.



	На рисунке видны только две точки пересечения графиков. Но, учитывая то, что парабола пересекает ось ординат, а гипербола не пересекает, делаем вывод, что графики пересекаются еще в одной точке. Таким образом, графики пересекаются в трех точках, а, значит, система имеет три решения.
4*. Решите систему уравнений $\begin{cases} (x+y)xy = 20; \\ x+y-xy = 1. \end{cases}$	Решим систему методом замены переменных. Введем новые переменные: $x+y=t$, $xy=k$. Тогда система примет вид $\begin{cases} tk = 20, \\ t - k = 1. \end{cases}$ Решим ее способом подстановки: $\begin{cases} tk = 20, \\ t - k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (k+1)k = 20, \\ t = k+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 + k - 20 = 0, \\ t = k+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -5, \\ k = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = k+1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} k = -5, \\ t = -4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 4, \\ t = 5. \end{cases}$ Подставим $x+y=t$, $xy=k$ и получим: $\begin{cases} xy = -5, \\ x+y = -4, \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 4, \\ x+y = 5. \end{cases}$ Решив каждую из двух систем совокупности способом подстановки, получим следующие решения исходной системы уравнений: $(-5; 1); (1; -5); (4; 1); (1; 4)$. Ответ: $(-5; 1); (1; -5); (4; 1); (1; 4)$.
Моделирование реальных процессов с помощью систем нелинейных уравнений	

Задача 1. Сумма квадратов цифр двузначного числа равна 13. Если из этого числа вычесть 9, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите данное число.

Решение. Обозначим цифру десятков данного числа через x , а цифру единиц через y , тогда данное число будет иметь вид $10x + y$. Числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, будет $10y + x$. По условию задачи: $x^2 + y^2 = 13$ и $10x + y - 9 = 10y + x$. Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ 10x + y - 9 = 10y + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3, \\ y = 2, \\ x = y + 1. \end{cases}$$

По условию задачи подходит только $y = 2$, $x = 3$.

Ответ: 32.

Задача 2*. Из поселка A в поселок B вышел пешеход. Одновременно с ним из поселка B в поселок A выехал велосипедист. Через 50 мин они встретились. Сколько времени потребовалось бы пешеходу для того, чтобы пройти весь путь из A в B , если известно, что велосипедист проделал бы тот же путь на 4 ч быстрее пешехода?

Решение. Составим таблицу зависимостей между величинами.

Процесс	Скорость движения	Пройденный путь	Время движения
Движение пешехода из поселка A в поселок B	v_1	1	$t_1 = \frac{1}{v_1}$
Движение велосипедиста из поселка B в поселок A	v_2	1	$t_2 = \frac{1}{v_2}$
Движение пешехода и велосипедиста навстречу друг другу	$v_1 + v_2$	1	$\frac{1}{v_1 + v_2}$

По условию задачи велосипедист проделал бы тот же путь на 4 ч быстрее пешехода, поэтому получим уравнение $\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} = 4$.

При движении навстречу друг другу пешеход и велосипедист встретились через 50 мин = $\frac{5}{6}$ ч, т. е. $\frac{1}{v_1 + v_2} = \frac{5}{6}$.

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} = 4, \\ \frac{1}{v_1 + v_2} = \frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{v_2 - v_1}{v_1 v_2} = 4, \\ v_1 + v_2 = \frac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{1}{5}, \\ v_2 = 1, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} t_1 = 5, \\ t_2 = 1. \end{cases}$$

Ответ: 5 ч.

Задача 3*. Две бригады, работая вместе, отремонтировали дорогу в течение 6 дней, а затем одна вторая бригада закончила ремонт за 10 дней. За сколько дней могла бы отремонтировать дорогу одна первая бригада, если она может выполнить эту работу на 6 дней быстрее, чем одна вторая?

Решение. Составим таблицу зависимостей между величинами.

Процесс	Скорость работы	Время	Результат
Работа первой бригады	v_1	6	$6v_1$
Работа второй бригады	v_2	16	$16v_2$
Работа первой бригады по ремонту всей дороги	v_1	$t_1 = \frac{1}{v_1}$	1
Работа второй бригады по ремонту всей дороги	v_2	$t_2 = \frac{1}{v_2}$	1

Обозначим объем всей работы через 1, тогда получим уравнение $6v_1 + 16v_2 = 1$.

Зная, что одна первая бригада может выполнить эту работу на 6 дней быстрее, чем одна вторая, составим уравнение $\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} = 6$.

Составим и решим систему уравнений: $\begin{cases} \frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} = 6, \\ 6v_1 + 16v_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{v_1 - v_2}{v_1 v_2} = 6, \\ 6v_1 + 16v_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{1}{18}, \\ v_2 = \frac{1}{24}, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} t_1 = 18, \\ t_2 = 24. \end{cases}$$

Ответ: 18 ч.



1. Какие из следующих систем уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2, \\ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y = 1, \\ -3xy = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x = -5y + 20, \\ y^2 = 4; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 5 \end{cases}$ — являются системами нелинейных уравнений?

2. Какая пара чисел является решением системы уравнений

$\begin{cases} 2x - 3y = 0, \\ x^2 - y^2 = 5; \end{cases}$ а) $(-3; -2)$; б) $(3; 2)$; в) $(3; -2)$; г) $(-3; 2)$?



3.68. Используйте алгоритм и решите систему уравнений способом подстановки:

а) $\begin{cases} x^2 - y = 4, \\ y = x + 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = y - 4, \\ y^2 + 3x = 6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} xy = 21, \\ x + y = 10; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 + 3xy = 1, \\ x - y = 1. \end{cases}$

3.69. Решите систему уравнений способом сложения:

а) $\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ 2x + y = 15; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 - y = 18, \\ x^2 + y = -16; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x - y = 7, \\ x^2 - y = 7; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x^2 - 3y = 6, \\ 2x + y = -2. \end{cases}$

3.70. Произведение двух натуральных чисел равно 143, а их разность равна 2. Найдите эти числа.

3.71. На рисунке 70 изображены графики функций $y = \frac{8}{x}$, $y = x + 2$ и $y = \frac{1}{2}(x + 2)^2 - 4$.

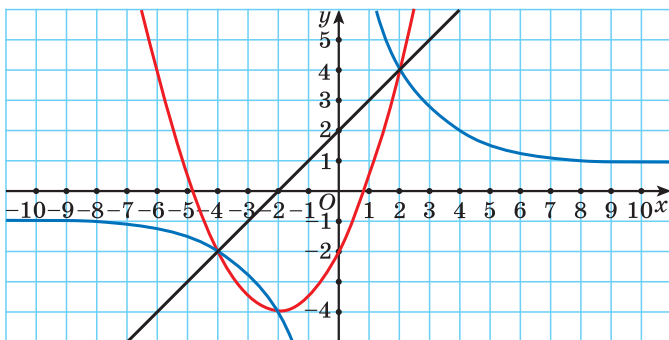


Рис. 70

С помощью рисунка решите систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} xy = 8, \\ y = x + 2; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 4, \\ y - x = 2; \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 4, \\ xy = 8. \end{cases} & \end{array}$$

3.72. Решите графически систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} y - 3x = 0, \\ xy = 12; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} y = x^2, \\ 2x + y = 3; \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} x - y = 0, \\ y + x^2 = 6x; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} y = x^3, \\ y - 4x = 0. \end{cases} \end{array}$$

3.73. Среднее арифметическое двух чисел равно 7, а разность квадратов этих чисел равна 14. Найдите эти числа.

3.74. Используйте систему уравнений для решения задачи. Дачный участок имеет форму прямоугольника и огорожен забором длиной 120 м. Найдите размеры участка, если его площадь равна 8 а.

3.75. Произведение цифр двузначного числа в три раза меньше самого числа. Если к этому числу прибавить 18, то получится число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите это число.

3.76. Выберите способ и решите систему уравнений:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1,5, \\ x - y = 1; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 1, \\ x + 5y = 3; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} x + y = 4, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4. \end{cases} \end{array}$$

3.77. Решите задачу, используя зависимости между значениями величин для составления системы уравнений.

а) Первый велосипедист преодолевает расстояние 60 км на 1 ч быстрее, чем второй. Если бы первый велосипедист уменьшил скорость на $2 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а второй увеличил свою скорость на 20 %, то они затратили бы на тот же путь одинаковое время. Найдите скорости велосипедистов.

б) Протяженность шоссе между городами А и В составляет 120 км. Из города А выехал грузовой автомобиль, а через 1 ч 40 мин после этого в том же направлении выехал рейсовый автобус, который прибыл в город В одновременно с грузовым автомобилем. Найдите скорости грузового автомобиля

и автобуса, если известно, что грузовой автомобиль за 2 ч проезжает на 10 км меньше, чем автобус за 1 ч.

в) Две линии по производству соков должны были выполнить заказ за 12 дней. После 8 дней совместной работы первая линия была остановлена по техническим причинам, поэтому вторая линия закончила оставшуюся часть заказа за 7 дней. Найдите, за сколько дней был бы выполнен заказ, если бы работала только вторая линия.

г) На изготовление партии продукции первой бригаде требуется на 6 ч больше, чем второй. Если сначала первая бригада отработает 3 ч, а затем, сменив ее, вторая бригада отработает 4 ч, то будет изготовлена только половина партии продукции. Будет ли за 8-часовую смену изготовлена вся партия продукции, если обе бригады будут работать одновременно?

3.78. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2y - x = 2, \\ 2xy = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y^2 + 2x - 4y = 0, \\ 2y = x + 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x^2 + xy = 40, \\ 3x - y = 10; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 16, \\ x - y = 2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x + y = 4; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ 3x - y = 15. \end{cases}$

3.79. После деления двузначного числа на сумму его цифр в частном получается 7 и в остатке 6. После деления этого же двузначного числа на произведение его цифр в частном получается 3 и в остатке 11. Найдите это двузначное число.

3.80. С помощью изображенных на рисунке 71 графиков функций $y = 4 - x^2$, $y = 2x + 4$ и $y = \sqrt{x + 1}$ составьте систему уравнений:

- а) имеющую два решения;
- б) имеющую одно решение;
- в) не имеющую решений.

3.81. Решите систему уравнений $\begin{cases} xy = 12, \\ x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$ графически и аналитически.

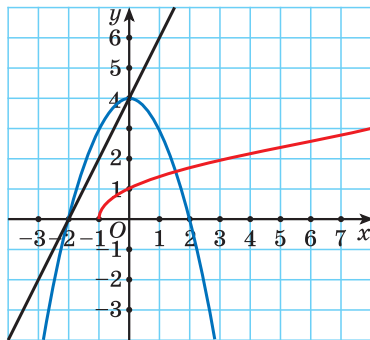


Рис. 71

3.82. Первый упаковщик собрал 60 праздничных наборов на 3 ч быстрее второго. Известно, что, работая вместе, они собирают за 1 ч 30 наборов. Выясните, успеет ли второй упаковщик собрать 150 наборов за три рабочих дня, если он работает по 4 ч в день.

3.83. Выполните анализ условия и решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} xy - x^2 = 1, \\ y + 4x = 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y - x = 5, \\ x^2 - 2xy - y^2 = 17; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = -2, \\ x^2 + y^2 - xy = 16; \end{cases}$

г) $\begin{cases} (x-1)(y-1) = 2, \\ x + y = 5; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x + 2y = 0, \\ x + y = -8; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 2x^2 + x = 2xy - 9, \\ 2y - 3x = 1. \end{cases}$

3.84. Найдите два числа, сумма, разность и произведение которых находятся в отношении 5 : 1 : 18.

3.85. Школьный бассейн можно наполнять водой через два крана. Если их открыть одновременно, то бассейн наполнится за 4 ч 30 мин. Если же половину бассейна наполнить через один кран, а затем открыть только другой, то для наполнения бассейна потребуется 12 ч. За какое время бассейн наполняется через первый кран, если известно, что производительность первого крана больше?

3.86. С помощью графического метода определите, сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} xy = -4, \\ y = x^2 - 2x + 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = x^3, \\ y - (x+2)^2 = -7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ xy = 6; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y - |x-1| = 0, \\ 2x + y - 5 = 0. \end{cases}$

3.87. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 4x^2 - 4xy + y^2 = 2x + 2y \end{cases}$ двумя способами.

3.88. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения:

а) параболы $y = x^2 + 1$ и прямой $x + 2y = 5$;

б) параболы $y = 3x^2 + 1$ и прямой $y - 2x = 2$;

в) гиперболы $xy = -20$ и прямой $x + y = 8$;

г) гиперболы $xy = 12$ и прямой $3x + 2y = 12$.

3.89. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 18; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x + 2xy = 6, \\ y - 2xy = -15; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + 3x + y^2 = 2, \\ x^2 + 3x - y^2 = -6; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x^2 + xy - 2x - y = 5, \\ 2x^2 - 3xy - 2x + 3y = 1. \end{cases}$

3.90*. Воспользуйтесь методом замены переменных и решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6}, \\ x^2 - y^2 = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{4x}{y} + \frac{y}{x} = 5, \\ xy = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x + y)^2 - 2(x + y) = 15, \\ x + xy + y = 11; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + y + xy = 11, \\ x^2y + xy^2 = 30; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18, \\ x^2 + y^2 + xy = 19. \end{cases}$

3.91*. Используйте зависимость между величинами в условии для решения задачи с помощью системы уравнений. Два велосипедиста движутся по замкнутой дорожке велотрека в одном направлении. Один догоняет другого каждые 12 мин. Известно, что первый велосипедист проходит круг велотрека на 10 с быстрее, чем второй. Найдите, сколько секунд требуется второму велосипедисту, чтобы пройти круг велотрека.

3.92*. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 4x^2 - 2xy + y^2 = 4, \\ 6x^2 - 3xy - y^2 = -4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0, \\ 3x^2 + 2xy - y^2 = 15. \end{cases}$

3.93*. Решите уравнение $x^2 + 4y^2 + |3x - y + 10| = 4xy$.



3.94. Решите систему уравнений способом подстановки:

а) $\begin{cases} x^2 - y = 15, \\ y = x + 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = y - 1, \\ y^2 + 2x = 6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + xy = 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} xy = 18, \\ x + y = 9. \end{cases}$

3.95. Решите систему уравнений способом сложения:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} x^2 + y = 0, \\ 2x - y = 8; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} x^2 + y = 30, \\ x^2 - y = -22; \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} 2x + y = 1, \\ x^2 + y = 1; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} y^2 + 4x = 18, \\ y - 2x = -9. \end{cases} \end{array}$$

3.96. На рисунке 72 изображены графики функций $y = -\frac{6}{x}$, $y = -2x - 3$ и $y = (x - 1)^2 - 7$. С помощью графиков определите, сколько решений имеет система уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} xy = -6, \\ y = -2x - 3; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} y = (x - 1)^2 - 7, \\ y + 2x = -3; \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} y = (x - 1)^2 - 7, \\ xy = -6. \end{cases} & \end{array}$$

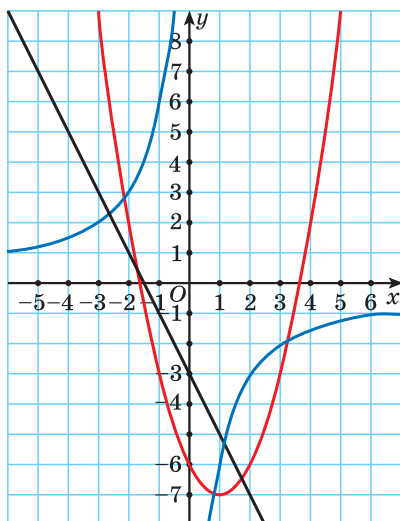


Рис. 72

3.97. Решите графически систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} 2x - y = 0, \\ xy = 8; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} y = x^2, \\ y - x = 6. \end{cases} \end{array}$$

Выполните проверку.

3.98. Произведение двух натуральных чисел равно 180, а их разность равна 3. Найдите эти числа.

3.99. Строительная площадка прямоугольной формы огорожена забором длиной 1 км. Найдите размеры площадки, если ее площадь равна 60 000 м².

3.100. Сумма квадратов цифр двузначного числа равна 25. Если из этого числа вычесть 9, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите это число.

3.101. Способом подстановки решите систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} x - y = -1, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2}; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{8}, \\ x + y = 12. \end{cases} \end{array}$$

3.102. Решите задачу, используя зависимости между величинами для составления системы уравнений:

а) Протяженность шоссе между пунктами A и B составляет 20 км. Из пункта A выехал велосипедист, а через 45 мин после этого в том же направлении из пункта A выехал мотоциклист, который догнал велосипедиста, не доехав 5 км до пункта B . Найдите скорости велосипедиста и мотоциклиста, если за 1 ч велосипедист проезжает на 48 км меньше, чем мотоциклист за 2 ч.

б) Две студенческие бригады выполнили задание за 2 дня. В первый день они выполнили $\frac{1}{3}$ задания, причем первая бригада работала 2 ч, а вторая — на 1 ч больше. Во второй день первая бригада работала 5 ч, а вторая — на 30 мин меньше. Найдите, за сколько часов могла бы выполнить задание вторая бригада, если бы работала одна.

3.103. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x - y = 7, \\ xy = 18; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} xy = 24, \\ x + 2y = 14; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x^2 - y^2 = 24, \\ x + y = 4; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} x - y = 2; \\ x^2 + y^2 = 20. \end{cases}$$

3.104. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 6x^2 + y^2 - 5y = 0, \\ 3x + y = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 - xy = 3; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7, \\ 2x = y - 7; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} (x - 2)(y + 2) = -1, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

3.105. С помощью графического метода определите, сколько решений имеет система уравнений
$$\begin{cases} xy = 12, \\ y - (x + 5)^2 = -3. \end{cases}$$

3.106. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения:

а) параболы $y = 2x^2 + 2$ и прямой $2x + y = 14$;

б) гиперболы $xy = -2$ и прямой $x - y = 3$.

3.107. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 8; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 2, \\ 2x^2 - y^2 + 2x - y = 4. \end{cases}$$

3.108*. Воспользуйтесь методом замены переменных и решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{3x}{y} - \frac{y}{x} = -2, \\ y^2 - x^2 = 8; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x - y + xy = 10, \\ x^2 y - xy^2 = 24. \end{cases}$$



3.109. Из данных дробей выберите дробь, которую нельзя представить в виде конечной десятичной дроби:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \frac{3}{40}; & \text{б) } \frac{1}{625}; & \text{в) } \frac{5}{32}; \\ \text{г) } \frac{7}{100}; & \text{д) } \frac{1}{24}; & \text{е) } \frac{7}{20}. \end{array}$$

3.110. Найдите решение системы неравенств

$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 5, \\ x - 2 > -1. \end{cases}$$

3.111. Найдите решение совокупности неравенств

$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 5, \\ x - 2 > -1. \end{cases}$$

3.112. Определите, рациональным или иррациональным числом является значение выражения $m^2 - 2m\sqrt{5} + 2$ при $m = \sqrt{5} - 3$.

3.113. Найдите НОД и НОК чисел 175 и 280.

3.114. Упростите выражение

$$\left(\frac{4}{b^2 + b} - \frac{2}{b^2 - 1} + \frac{1}{b^2 - b} \right) \cdot (1 + 2b + b^2).$$

3.115. Найдите значение выражения:

$$\text{а) } 2^{12} \cdot 0,5^{13}; \quad \text{б) } 3^7 : 0,3^6.$$

3.116. График функции $y = f(x)$ получен из графика функции $g(x) = -5x^2$ сдвигом его на 4 единицы вправо вдоль оси абсцисс и на 2 единицы вниз вдоль оси ординат. А график функции $y = h(x)$ получен из графика функции $p(x) = 0,1x^2$ сдвигом его на 3 единицы влево вдоль оси абсцисс и на 1 единицу вверх вдоль оси ординат. Имеют ли общие точки графики функций $y = f(x)$ и $y = h(x)$?