§ 12. Формула длины отрезка с заданными координатами его концов. Уравнение окружности

3.117. Какое из следующих уравнений не является уравнением прямой:

а) $3x - 7y - 5 = 0$; б) $4x - 5 = 0$;

в) $6x^2 + 5y + 2 = 0$; г) $2y = 0$?

3.118. Определите, графикам каких из данных функций принадлежит точка (1; 1):

а) $f(x) = \sqrt{x}$; б) $h(x) = x^2$;

в) $g(x) = x^3$; г) $g(x) = 2x - 1$.

3.119. Найдите с помощью графиков функций $f(x) = \sqrt{x}$ и $h(x) = x^2$ корни уравнения $\sqrt{x} = x^2$.

Для применения графического метода решения систем необходимо знать графики различных уравнений. Многие из них вам уже знакомы. Это, например, прямая, гипербола, парабола.

Расширим возможности использования графического метода решения систем нелинейных уравнений и выведем уравнение окружности с центром в заданной точке с заданным радиусом. Для этого сначала выведем формулу для вычисления длины отрезка с заданными координатами его концов, т. е. для вычисления расстояния между двумя точками, заданными своими координатами.

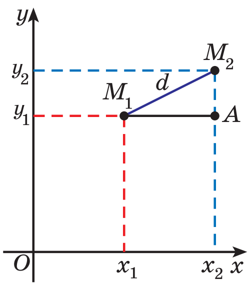


Рис. 73

Рассмотрим точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ (рис. 73). Найдем расстояние d между этими точками (длину отрезка M_1M_2). Рассмотрим прямоугольный треугольник AM_1M_2, в котором $M_1A = |x_2 - x_1|$, $M_2A = |y_2 - y_1|$. По теореме Пифагора найдем гипотенузу треугольника M_1M_2A:

$$M_1M_2 = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Получили формулу длины отрезка с заданными координатами его концов, или формулу расстояния между двумя точками с координатами $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Пример 1. Найдите расстояние между точками $A(-1;\ 3)$ и $B(2;\ 5)$.

Решение. Подставим координаты точек $A(-1;\ 3)$ и $B(2;\ 5)$ в формулу расстояния между двумя точками $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ и получим, что

$$AB = \sqrt{(2+1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{13}.$$

Рассмотрим окружность на координатной плоскости. Окружность — это множество точек плоскости, расстояние от каждой из которых до одной данной точки (центра окружности) является величиной постоянной, равной радиусу окружности R.

По формуле расстояния между двумя точками найдем расстояние от данной точки $C(x_0;\ y_0)$ (центра окружности) до произвольной точки окружности $P(x,\ y)$ (рис. 74):

$$R = CP = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \text{ или}$$

$$R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2.$$

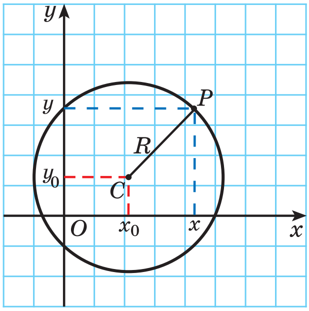


Рис. 74

Таким образом, если точка принадлежит окружности с центром $C(x_0;\ y_0)$ и радиусом R, то ее координаты удовлетворяют уравнению $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

> Уравнение $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ является уравнением окружности с центром в точке $(x_0;\ y_0)$ и радиусом R.

Если координаты точки удовлетворяют уравнению $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, то эта точка принадлежит окружности с центром $C(x_0;\ y_0)$ и радиусом R.

Покажем, что если точка $(x;\ y)$ не принадлежит окружности с центром $(x_0;\ y_0)$ и радиусом R, то ее координаты не удовлетворяют уравнению $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$. Действительно, если точка лежит вне окружности, то расстояние от нее до центра окружности больше радиуса, т. е. $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} > R$, а если точка лежит внутри окружности, то меньше, т. е. $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < R$.

Чтобы составить уравнение окружности, нужно:

① Определить координаты центра окружности $(x_0; y_0)$. ② Определить радиус окружности R. ③ Подставить найденные значения x_0, y_0 и R в уравнение окружности $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.	Составьте уравнение окружности с центром в точке (–8; 2) и радиусом 5. ① $x_0=-8$, $y_0=2$. ② $R=5$. ③ $(x-(-8))^2+(y-2)^2=5^2$; $(x+8)^2+(y-2)^2=25$.

Пример 2. Составьте уравнение окружности:

а) с центром в точке (4; –1) и радиусом $\sqrt{3}$;

б) с центром в точке (0; 0) и радиусом 4.

Решение. а) Подставим координаты центра окружности $x_0=4$, $y_0=-1$ и значение радиуса $R=\sqrt{3}$ в уравнение окружности $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ и получим $(x-4)^2+(y+1)^2=3$.

б) Координаты центра окружности: $x_0=0$, $y_0=0$, радиус окружности $R=4$. Тогда уравнение данной окружности $x^2+y^2=16$.

Если центром окружности радиуса R является начало координат, то ее уравнение имеет вид $\boldsymbol{x^2+y^2=R^2}$.

Пример 3. Определите количество решений системы уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ y=-x^2+2x+4. \end{cases}$

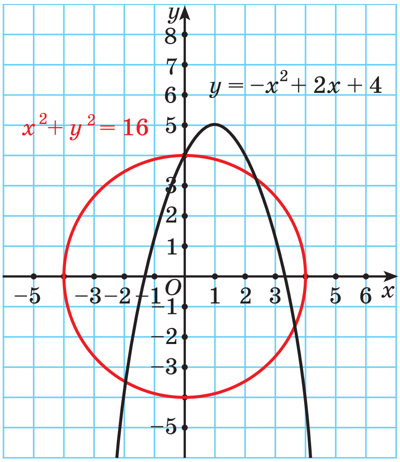


Рис. 75

Решение. Построим графики уравнений системы. Первое уравнение — это уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом, равным 4. Графиком второго уравнения является парабола с вершиной в точке (1; 5), пересекающая ось ординат в точке (0; 4).

Построенные графики пересекаются в четырех точках (рис. 75). Значит, данная система уравнений имеет 4 решения.

Ответ: 4 решения.

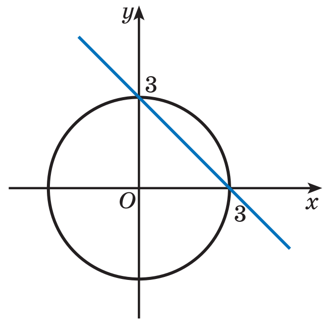
Формула длины отрезка с заданными координатами его концов	
1. Найдите длину отрезка MN, если $M(3;\ -6)$, $N(-1;\ 4)$.	По формуле длины отрезка $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ получим: $MN = \sqrt{(-1-3)^2 + (4+6)^2} = \sqrt{116}$.
2. Найдите длину диагонали прямоугольника, если заданы его вершина $A(-7;\ 1)$ и точка пересечения его диагоналей $O(-3;\ -2)$.	Найдем длину отрезка AO: $AO = \sqrt{(-7+3)^2 + (1+2)^2} = 5$. Длина отрезка AO равна половине диагонали прямоугольника, следовательно, длина диагонали равна 10.
Уравнение окружности	
3. Определите координаты центра и радиус окружности: а) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$; б) $x^2 + (y+7)^2 = 4$; в) $x^2 + y^2 = 8$.	а) $C(-1;\ 1)$, $R = 1$; б) $C(0;\ -7)$, $R = 2$; в) $C(0;\ 0)$, $R = 2\sqrt{2}$.
4. Какие из данных точек лежат на окружности $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 25$: а) $A(4;\ 3)$; б) $B(4;\ -3)$; в) $C(-3;\ 4)$; г) $D(-3;\ -4)$?	Подставим координаты точек в уравнение окружности: а) $(4-1)^2 + (3+1)^2 = 25$, равенство верное, значит, точка A лежит на окружности; б) $(4-1)^2 + (-3+1)^2 = 13 \ne 25$, значит, точка B не лежит на окружности; в) $(-3-1)^2 + (4+1)^2 = 41 \ne 25$, значит, точка C не лежит на окружности; г) $(-3-1)^2 + (-4+1)^2 = 25$, равенство верное, значит, точка D лежит на окружности.
5. Запишите уравнение окружности с центром в точке $(-1;\ 1)$ и радиусом $\sqrt{2}$.	$x_0 = -1$, $y_0 = 1$, $R = \sqrt{2}$, $R^2 = 2$, $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$ — уравнение окружности.
6. Запишите уравнение окружности с центром в точке A, для которой отрезок AB является радиусом, если $A(2;\ 4)$, $B(5;\ 7)$.	$x_0 = 2$, $y_0 = 4$, радиус найдем по формуле расстояния между двумя точками: $AB = \sqrt{(2-5)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{18}$. Уравнение окружности $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 18$.

<table>
<tr>
<td>

7. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 = 9, \end{cases}$ используя графический метод.

</td>
<td>

График первого уравнения — прямая, проходящая через точки (3; 0), (0; 3). График второго уравнения — окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 3.



Координаты точек пересечения (3; 0), (0; 3) — решения системы.

</td>
</tr>
</table>

1. Если в системе двух уравнений одно уравнение — уравнение окружности, а другое — уравнение прямой, то сколько решений может иметь эта система?

2. Используя рисунок 76, запишите две различные системы, одно из уравнений которых — уравнение окружности. Запишите решения этих систем.

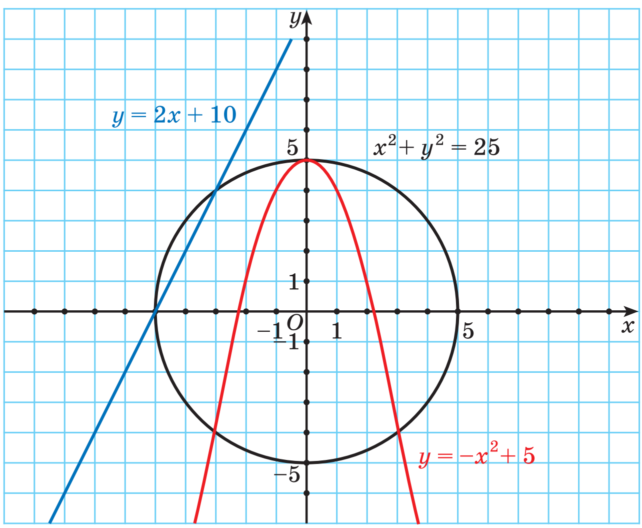


Рис. 76

3.120. Вычислите длину отрезка AB, если:

а) $A(2;\ 7)$, $B(8;\ -1)$; б) $A(-9;\ 5)$, $B(3;\ 0)$;

в) $A(0;\ -5)$, $B(2;\ 3)$; г) $A\left(\sqrt{3};\ 4\right)$, $B(0;\ 2)$.

Какую формулу вы использовали?

3.121. На координатной плоскости отмечены точки A, B, C, D и E (рис. 77). Найдите расстояние между точками:

а) A и E; б) B и D;

в) D и E; г) B и C.

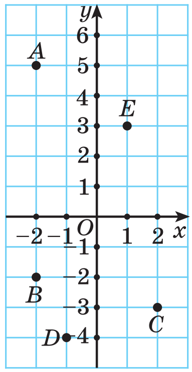


Рис. 77

3.122. Найдите расстояние от начала координат до точки с координатами:

а) $(3;\ 4)$; б) $(-2;\ 0)$; в) $(-6;\ 2)$; г) $\left(\sqrt{2};\ 5\right)$.

3.123. Найдите периметр треугольника, если его вершинами являются точки $A(-1;\ 0)$, $B(5;\ 0)$ и $C(2;\ 4)$.

3.124. Составьте план решения и найдите расстояние от точки $K(-2;\ 7)$ до:

а) оси абсцисс; б) оси ординат;

в) начала координат; г) точки $P(-1;\ 3)$.

3.125. Найдите расстояние от точки $T(6;\ 8)$ до точки, симметричной данной точке относительно:

а) оси абсцисс;

б) оси ординат;

в) начала координат.

Обобщите полученный результат.

3.126. Точки $A(-3;\ y)$ и $B(x;\ 5)$ симметричны относительно оси ординат. Найдите длину отрезка AB.

3.127. Используйте уравнение окружности и определите координаты центра и радиус окружности:

а) $(x-3)^2+(y+4)^2=36$; б) $x^2+(y+7)^2=25$;

в) $(x-5)^2+y^2=32$; г) $x^2+y^2=17$.

3.128. Определите, верно ли, что:

а) центром окружности, заданной уравнением $(x-5)^2+(y+9)^2=16$, является точка $(5;\ -9)$;

б) центром окружности, заданной уравнением $x^2 + (y + 10)^2 = 36$, является точка (0; 10);

в) центром окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 3$, является точка (0; 0);

г) радиус окружности, заданной уравнением $(x - 8)^2 + y^2 = 25$, равен 5.

3.129. Определите, какие из данных точек лежат на окружности $x^2 + (y + 2)^2 = 9$:

а) $A(0;\ 1)$; б) $B\left(-2\sqrt{2};\ -1\right)$;

в) $C(2;\ -1)$; г) $D\left(\sqrt{3};\ 0\right)$.

3.130. Используйте алгоритм и запишите уравнение окружности с центром в точке A и радиусом R, если:

а) $A(2;\ 7)$, $R = 3$; б) $A(-1;\ 3)$, $R = 1$;

в) $A(0;\ -2)$, $R = \sqrt{3}$; г) $A(0;\ 0)$, $R = 2\sqrt{3}$.

3.131. Запишите уравнение окружности, график которой изображен на рисунке 78. Какое уравнение имеет окружность, симметричная данной окружности относительно прямой $y = 2$? $x = -1$?

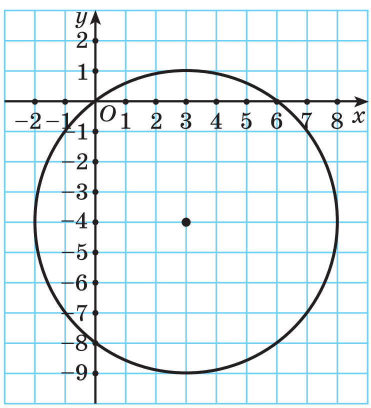


Рис. 78

3.132. Дана окружность $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 36$. Запишите уравнение окружности, центр которой симметричен центру данной окружности относительно:

а) начала координат, а радиус которой равен радиусу данной окружности;

б) оси ординат, а радиус которой в три раза меньше радиуса данной окружности;

в) оси абсцисс, а радиус которой в два раза больше радиуса данной окружности.

3.133. Даны точки $A(-4;\ 0)$ и $B(0;\ 6)$. Запишите уравнение окружности, для которой отрезок AB является радиусом, а центром является точка: а) A; б) B.

3.134. Даны точки $F(5; -8)$ и $P(-2; 6)$. Запишите уравнение окружности: а) с центром в точке F, проходящей через начало координат; б) с центром в точке P, проходящей через точку $N(0; 7)$.

3.135. В одной системе координат постройте окружности, заданные уравнениями $(x-3)^2+(y+2)^2=4$; $x^2+y^2=9$; $(x+4)^2+y^2=25$. Сколько точек пересечения имеют каждые две из них?

3.136. Определите радиус и запишите уравнение окружности с центром в точке $M(2; 7)$, которая:

а) касается оси абсцисс;
б) касается оси ординат;
в) касается прямой $y=5$;
г) проходит через начало координат.

3.137. Найдите расстояние между центрами окружностей, заданных уравнениями $x^2+y^2=4$ и $(x-6)^2+(y+8)^2=64$.

3.138. Решите систему уравнений, используя графический метод:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ x-y=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ y=x^2+3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ xy=12; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ (x-2)^2+y^2=36. \end{cases}$

Выполните проверку.

3.139. Определите число решений системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ xy=-3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+(y+3)^2=25, \\ y=x^3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ y=-x^2+3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+y^2=36, \\ (x-5)^2+(y-4)^2=1. \end{cases}$

3.140*. Найдите, при каких значениях числа a система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ y=|x|+a: \end{cases}$

а) имеет одно решение; б) имеет два решения;
в) имеет три решения; г) имеет четыре решения;
д) не имеет решений.

3.141. Найдите длину отрезка AB, если:

а) $A(4;\ -8)$, $B(-1;\ 4)$; б) $A(7;\ 0)$, $B(1;\ -5)$.

3.142. Найдите расстояние между точками:

а) $M(-1;\ -2)$ и $N(3;\ 4)$;

б) $F(-5;\ 0)$ и $K(-6;\ 1)$;

в) $B\left(3;\ \sqrt{7}\right)$ и $D(0;\ 0)$.

3.143. Составьте план решения и найдите расстояние от точки $A(3;\ -4)$ до:

а) оси абсцисс; б) оси ординат;

в) начала координат; г) точки $B(4;\ -3)$.

3.144. Определите координаты центра и радиус окружности:

а) $(x+2)^2+(y-1)^2=9$; б) $x^2+(y-5)^2=49$;

в) $(x+4)^2+y^2=18$; г) $x^2+y^2=19$.

3.145. Определите, верно ли, что:

а) центром окружности, заданной уравнением $(x-3)^2+(y+7)^2=16$, является точка $(-3;\ 7)$;

б) центром окружности, заданной уравнением $x^2+(y-5)^2=36$, является точка $(5;\ 0)$;

в) центром окружности, заданной уравнением $x^2+y^2=1$, является точка $(0;\ 0)$;

г) радиус окружности, заданной уравнением $(x+2)^2+y^2=4$, равен 4?

3.146. Выберите точки, лежащие на окружности

$$(x-1)^2+y^2=16:$$

а) $A(5;\ 0)$; б) $B(-1;\ -2)$;

в) $C\left(-2;\ \sqrt{7}\right)$; г) $D(3;\ 3)$.

3.147. Запишите уравнение окружности с центром в точке A и радиусом R, если:

а) $A(6;\ 3)$, $R=7$; б) $A(2;\ -4)$, $R=5$;

в) $A(-3;\ 0)$, $R=\sqrt{2}$; г) $A(0;\ 0)$, $R=3\sqrt{5}$.

3.148. Дана окружность $(x+5)^2+(y-3)^2=16$. Запишите уравнение окружности, центр которой симметричен центру данной окружности относительно:

а) начала координат, а радиус которой равен радиусу данной окружности;

б) оси ординат, а радиус которой в два раза меньше радиуса данной окружности;

в) оси абсцисс, а радиус которой в три раза больше радиуса данной окружности.

3.149. Даны точки $A(5;\ 0)$ и $B(0;\ -2)$. Запишите уравнение окружности, для которой точка B является центром, а отрезок AB является радиусом.

3.150. Верно ли, что окружности, заданные уравнениями $(x-1)^2+(y+5)^2=36$ и $(x-4)^2+y^2=9$, не имеют общих точек?

3.151. Выберите все верные утверждения:

а) окружность, заданная уравнением $x^2+(y-2)^2=4$, проходит через точку $A(-1;\ 1)$;

б) прямая $y=10$ является касательной к окружности $(x-9)^2+y^2=100$;

в) центры окружностей, заданных уравнениями
$(x+3)^2+(y-7)^2=15$ и $(x-3)^2+(y+7)^2=13$, симметричны относительно оси ординат.

3.152. Решите систему уравнений, используя графический метод:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ x+y=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ (x-4)^2+y^2=25. \end{cases}$

Выполните проверку.

3.153. Используйте графики уравнений и определите число решений системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=36, \\ xy=-8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+(y+2)^2=16, \\ y=x^2-5. \end{cases}$

3.154. Решите систему неравенств $\begin{cases} x^2\leqslant 1, \\ x^2+5x+4\leqslant 0. \end{cases}$

3.155. Решите совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} x^2\leqslant 1, \\ x^2+5x+4\leqslant 0. \end{array}\right.$

3.156. Длину участка увеличили на 10 %, а ширину уменьшили на несколько процентов. В результате площадь участка уменьшилась на 1 %. Найдите, на сколько процентов уменьшили ширину участка.

3.157. Найдите значение выражения

$$\left(\sqrt{17}+2\right)^2-\left(5-\sqrt{17}\right)^2-14\sqrt{17}.$$

3.158. Сократите дробь $\dfrac{(1-2a)^2}{2a^2+9a-5}$.

3.159. Функция задана формулой $y=-7x+2$. Запишите уравнение нечетной функции, график которой параллелен графику данной функции.

§ 13. Дробно-рациональные неравенства. Метод интервалов для решения рациональных неравенств

3.160. Решите неравенство $x^2-1<0$.

3.161. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{x^2-5x+6}.$$

3.162. Определите промежутки знакопостоянства функции $y=f(x)$, заданной графически (рис. 79).

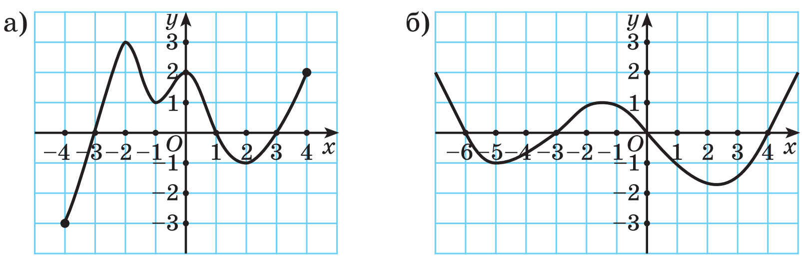


Рис. 79

Рассмотрим задачу. Лодка прошла по течению реки 5 км и вернулась обратно, затратив на весь путь не больше 1 ч. Какова наименьшая возможная скорость лодки, если скорость течения реки равна 3 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$?

Решение. Обозначим через x $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ собственную скорость лодки. Составим таблицу зависимостей между величинами.