3.156. Длину участка увеличили на 10 %, а ширину уменьшили на несколько процентов. В результате площадь участка уменьшилась на 1 %. Найдите, на сколько процентов уменьшили ширину участка.

3.157. Найдите значение выражения

$$\left(\sqrt{17}+2\right)^2-\left(5-\sqrt{17}\right)^2-14\sqrt{17}.$$

3.158. Сократите дробь $\dfrac{(1-2a)^2}{2a^2+9a-5}$.

3.159. Функция задана формулой $y=-7x+2$. Запишите уравнение нечетной функции, график которой параллелен графику данной функции.

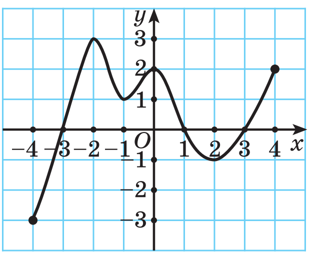
§ 13. Дробно-рациональные неравенства. Метод интервалов для решения рациональных неравенств

3.160. Решите неравенство $x^2-1<0$.

3.161. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{x^2-5x+6}.$$

3.162. Определите промежутки знакопостоянства функции $y=f(x)$, заданной графически (рис. 79).

а) 

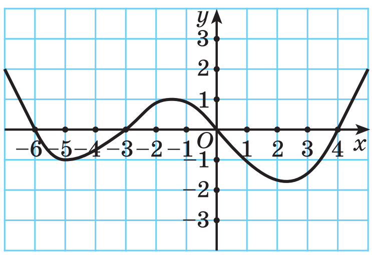
б) 

Рис. 79

Рассмотрим задачу. Лодка прошла по течению реки 5 км и вернулась обратно, затратив на весь путь не больше 1 ч. Какова наименьшая возможная скорость лодки, если скорость течения реки равна 3 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$?

Решение. Обозначим через x $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ собственную скорость лодки. Составим таблицу зависимостей между величинами.

Процесс	Скорость, $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$	Расстояние, км	Время, ч
Движение лодки по течению реки	$x+3$	5	$t_1 = \frac{5}{x+3}$
Движение лодки против течения реки	$x-3$	5	$t_2 = \frac{5}{x-3}$

По условию задачи на весь путь лодка затратила не больше 1 ч. Составим математическую модель: $\frac{5}{x+3} + \frac{5}{x-3} \leqslant 1.$

Полученное в ходе решения задачи неравенство $\frac{5}{x+3} + \frac{5}{x-3} \leqslant 1$ является рациональным.

Рациональным называется неравенство, в левой и правой частях которого — рациональные выражения.

Рассмотрим один из методов решения рациональных неравенств — метод интервалов. Этот метод основан на использовании графика функции.

Предположим, что нужно решить неравенство $f(x) \geqslant 0$, где $y = f(x)$ — функция, график которой изображен на рисунке 80. Тогда для решения неравенства $f(x) \geqslant 0$ достаточно указать значения аргумента, при которых значения функции $f(x)$ неотрицательны, т. е. при которых график функции лежит не ниже оси абсцисс. Это промежутки $[-6; -2]$ и $[2; 8]$. Следовательно, все решения неравенства $f(x) \geqslant 0$ — это все

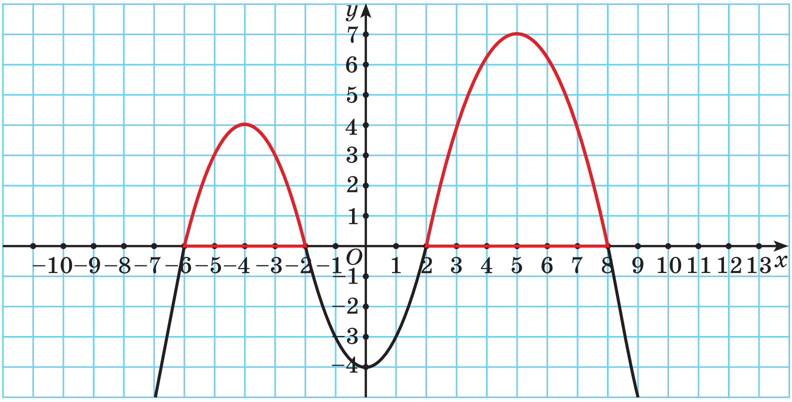


Рис. 80

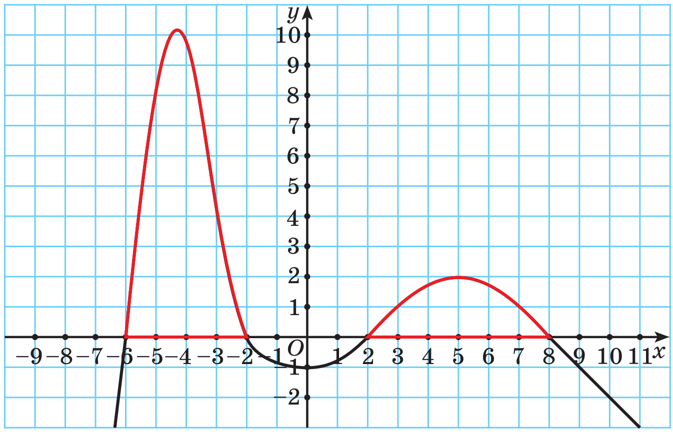


Рис. 81

значения переменной x, принадлежащие объединению множеств $x \in [-6; -2] \cup [2; 8]$.

Заметим, что такие же решения имеет неравенство $g(x) \geqslant 0$, где $y = g(x)$ — функция, график которой изображен на рисунке 81, так как значения функции $y = g(x)$ неотрицательны при тех же значениях переменной, что у функции $y = f(x)$.

Таким образом, для применения метода интервалов к решению неравенства достаточно построить схему графика функции, на которой отражены только некоторые (необходимые для решения неравенства) свойства функции, а именно ее область определения, нули и промежутки знакопостоянства.

Пример 1. Решите неравенство

$$(x - 1)(x + 2{,}5)(x - 4) < 0.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = (x - 1)(x + 2{,}5)(x - 4)$. Построим схему графика этой функции, по которой определим ее промежутки знакопостоянства. Для этого найдем точки пересечения графика с осью абсцисс, т. е. нули этой функции: $(x - 1)(x + 2{,}5)(x - 4) = 0$ при $x = 1$; $x = -2{,}5$; $x = 4$.

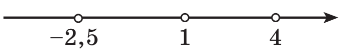


Рис. 82

Отметим нули функции на оси абсцисс (рис. 82). Так как данное неравенство строгое, то нули функции отметим на оси пустыми точками.

Нули функции разбили ось на четыре промежутка. Определим, выше или ниже оси абсцисс расположен график функции в каждом из полученных промежутков.

Поскольку правее точки 4 каждый из трех множителей произведения $(x-1)(x+2{,}5)(x-4)$ принимает положительные значения, то при $x \in (4;\ +\infty)$ график функции $f(x) = (x-1)(x+2{,}5)(x-4)$ расположен выше оси абсцисс.

При переходе через каждую из отмеченных точек знак функции $f(x)$, а значит, и положение графика относительно оси абсцисс меняется, так как меняется знак одного из множителей.

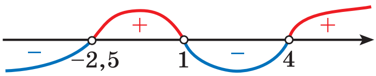


Рис. 83

Построим схему графика функции $f(x) = (x-1)(x+2{,}5)(x-4)$ (рис. 83).

При $x \in (-\infty;\ -2{,}5) \cup (1;\ 4)$ построенная кривая лежит ниже оси абсцисс. Это объединение интервалов является множеством решений данного неравенства.

Ответ: $x \in (-\infty;\ -2{,}5) \cup (1;\ 4)$.

Пример 2. Решите неравенство

$$(x+9)^2(x-2)(x-3) \leqslant 0.$$

Решение. Рассмотрим функцию $h(x) = (x+9)^2(x-2)(x-3)$. Найдем ее нули: $(x+9)^2(x-2)(x-3) = 0$ при $x = -9$; $x = 2$; $x = 3$. Так как неравенство нестрогое, то нули функции являются решениями данного неравенства, поэтому включим их во множество решений неравенства и отметим на оси абсцисс закрашенными точками (рис. 84).

Затем определим положение графика функции в каждом из четырех полученных промежутков. Правее точки 3 каждый из трех множителей произведения $(x+9)^2(x-2)(x-3)$ принимает положительные значения, значит, график функции расположен выше оси абсцисс. При переходе через точки 3 и 2 положение графика меняется, так как меняется знак одного из множителей $(x-3)$ или $(x-2)$. При переходе через точку -9 положение графика не меняется, так как множитель $(x+9)^2$ принимает неотрицательные значения при всех $x \in \boldsymbol{R}$.

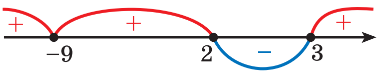


Рис. 84

Построим схему графика функции (см. рис. 84) и запишем решение неравенства в соответствии с его знаком: $x \in \{-9\} \cup [2;\ 3]$.

Ответ: $\{-9\} \cup [2;\ 3]$.

Если во множителе $(x-a)^n$ число n — четное, то при переходе через точку a положение графика относительно оси абсцисс не меняется, а если число n — нечетное, то меняется.

Пример 3. Решите неравенство $\dfrac{(x+3)(x-1)}{(x-4)(x+2)} \geqslant 0$.

Решение. Рассмотрим функцию $g(x) = \dfrac{(x+3)(x-1)}{(x-4)(x+2)}$.

Отметим на оси абсцисс нули этой функции (числа –3 и 1) и те значения переменной, которые не входят в область определения функции $g(x) = \dfrac{(x+3)(x-1)}{(x-4)(x+2)}$ (это числа –2 и 4 — значения переменной, при которых знаменатель дроби обращается в нуль (нули знаменателя) (рис. 85).

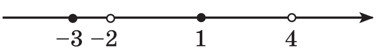


Рис. 85

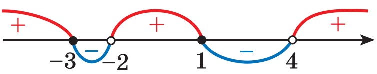


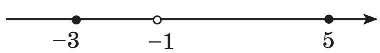
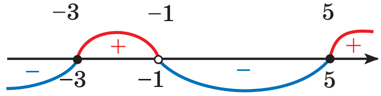
Рис. 86

Так как неравенство нестрогое, то нули функции являются решениями неравенства (на оси абсцисс — закрашенные точки –3 и 1). Нули знаменателя не являются решениями неравенства (на оси абсцисс — пустые точки –2 и 4).

Построим схему графика (рис. 86). Положение графика относительно оси абсцисс меняется при переходе через каждую точку. По схеме графика в соответствии со знаком неравенства запишем его решение: $x \in (-\infty;\ -3] \cup (-2;\ 1] \cup (4;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;\ -3] \cup (-2;\ 1] \cup (4;+\infty)$.

Для того чтобы решить рациональное неравенство методом интервалов, нужно:

① Привести неравенство к виду $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \geqslant 0$ или $f(x) \leqslant 0$.	Решите неравенство $\dfrac{(x+3)(x-5)}{x+1} \geqslant 0$. ① Неравенство имеет вид $f(x) \geqslant 0$, где $f(x) = \dfrac{(x+3)(x-5)}{x+1}$.
② Найти и отметить на оси абсцисс нули функции и те значения переменной, при которых значения функции не существуют (нули знаменателя).	② 
③ Построить схему графика функции.	③ 
④ Записать ответ в соответствии со знаком неравенства.	④ *Ответ*: $x \in [-3;\ -1) \cup [5;\ +\infty)$.

Пример 4. Решите неравенство $\frac{x(x-2)}{(x+1)^4} > 0.$

Решение.

① Неравенство имеет вид $f(x) > 0$, где $f(x) = \frac{x(x-2)}{(x+1)^4}$.

② Найдем нули функции (числа 0; 2) и, поскольку знак неравенства строгий, отметим их на оси абсцисс пустыми точками. Найдем значение переменной, при котором значения функции не существуют, — нуль знаменателя (число –1) и отметим его на оси абсцисс пустой точкой (рис. 87).

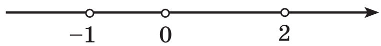


Рис. 87

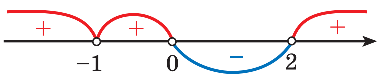


Рис. 88

③ Построим схему графика функции, при этом учтем, что при переходе через точку –1 положение графика относительно оси не меняется, а при переходе через точки 0 и 2 меняется (рис. 88).

④ *Ответ*: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (2; +\infty)$.

Для того чтобы положение графика в первом правом промежутке было выше оси абсцисс, нужно умножением обеих частей неравенства на –1 добиться положительных коэффициентов перед переменной в линейных множителях.

Пример 5. Решите неравенство $\frac{(x-4)^2(3-x)}{x+1} \geqslant 0.$

Решение. Для того чтобы все коэффициенты перед переменными в линейных множителях были положительными, умножим обе части неравенства $\frac{(x-4)^2(3-x)}{x+1} \geqslant 0$ на –1 и получим неравенство $\frac{(x-4)^2(x-3)}{x+1} \leqslant 0.$

① Неравенство имеет вид $f(x) \leqslant 0$, где $f(x) = \frac{(x-4)^2(x-3)}{x+1}$.

② Найдем нули функции (числа 3 и 4) и, поскольку знак неравенства нестрогий, отметим их на оси абсцисс закрашенными точками. Найдем значение переменной, при котором значение функции не существует (число –1), и отметим его на оси абсцисс пустой точкой (рис. 89).

Рис. 89

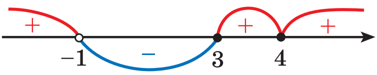
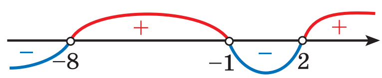


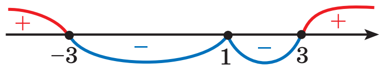
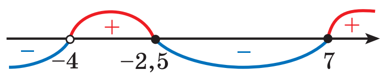
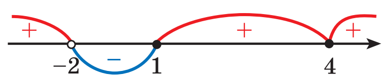
Рис. 90

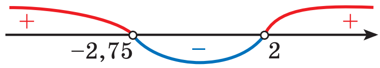
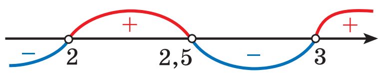
③ Построим схему графика функции, при этом учтем, что при переходе через точку 4 положение графика относительно оси не меняется, а при переходе через точки −1 и 3 меняется (рис. 90).

④ *Ответ*: $x \in (-1;\ 3] \cup \{4\}$.

<table>
<tr><th colspan="2">Рациональные неравенства</th></tr>
<tr><td>1. Какие из следующих неравенств являются рациональными:
а) $(x-2)(x+3) < 0$;
б) $3x+2 \geqslant x-1$;
в) $\sqrt{x-1}\sqrt{x+1} > 0$;
г) $\dfrac{(x-2)(x-3)}{x-5} > 3$?</td><td>Неравенства а), б), г) — рациональные, так как в левой и правой частях этих неравенств — рациональные выражения. Неравенство в) не является рациональным, так как содержит иррациональные выражения с переменной.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Метод интервалов для решения рациональных неравенств</th></tr>
<tr><td>2. Решите неравенство:
а)$(x-2)(x+1)(x+8) < 0$;
б) $(x-1)^2(9-x^2) \leqslant 0$.</td><td>а) ① Неравенство имеет вид $f(x) < 0$, где $f(x) = (x-2)(x+1)(x+8)$.
② Нулями функции являются числа −8; −1 и 2. Поскольку знак неравенства строгий, отметим их на оси абсцисс пустыми точками.

③ Построим схему графика функции. При переходе через каждую из точек −8; −1 и 2 положение графика относительно оси меняется.

④ Ответ: $x \in (-\infty;\ -8) \cup (-1;\ 2)$.
б) Умножим обе части данного неравенства на −1 и получим неравенство $(x-1)^2(x^2-9) \geqslant 0$, которое запишем в виде $(x-1)^2(x-3)(x+3) \geqslant 0$.
Нулями функции $f(x) = (x-1)^2(x-3)(x+3)$ являются числа −3; 1 и 3. Так как знак</td></tr>
</table>

	неравенства нестрогий, то на оси абсцисс числа –3; 1 и 3 отметим закрашенными точками. Построим схему графика функции.  При переходе через точку 1 положение графика относительно оси не меняется, а при переходе через точки –3 и 3 — меняется. *Ответ*: $x \in (-\infty; -3] \cup \{1\} \cup [3; +\infty)$.
3. Решите неравенство: а) $\dfrac{(2x+5)(x-7)}{x+4} \leqslant 0$; б) $\dfrac{(1-x)^3(x-4)^2}{3x+6} \leqslant 0$.	а) Нулями функции $f(x) = \dfrac{(2x+5)(x-7)}{x+4}$ являются числа –2,5 и 7. Так как знак неравенства нестрогий, то отметим их на оси абсцисс закрашенными точками. Нулем знаменателя является число –4. Отметим его пустой точкой. Построим схему графика функции.  *Ответ*: $x \in (-\infty; -4) \cup [-2{,}5; 7]$. б) Умножим обе части неравенства на –1 и получим неравенство $\dfrac{(x-1)^3(x-4)^2}{3x+6} \geqslant 0$. Нулями функции $f(x) = \dfrac{(x-1)^3(x-4)^2}{3x+6}$ являются числа 1 и 4. Так как знак неравенства нестрогий, то отметим их на оси абсцисс закрашенными точками. Нулем знаменателя является число –2. Отметим его пустой точкой. Построим схему графика функции. При переходе через точку 4 положение графика относительно оси не меняется.  *Ответ*: $(-\infty; -2) \cup [1; +\infty)$.
4. Решите неравенство $\dfrac{4x}{x-2} < \dfrac{11}{2-x}$.	Запишем неравенство в виде: $\dfrac{4x}{x-2} - \dfrac{11}{2-x} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x}{x-2} + \dfrac{11}{x-2} < 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \dfrac{4x+11}{x-2} < 0$.

	Нулем функции $f(x)=\dfrac{4x+11}{x-2}$ является число $-2{,}75$. Так как знак неравенства строгий, то отметим его на оси абсцисс пустой точкой. Нулем знаменателя является число 2. Отметим его на оси абсцисс пустой точкой. Построим схему графика функции.  *Ответ*: $x\in(-2{,}75;\ 2)$.
5. Решите неравенство $\dfrac{x}{x^2-5x+6}+\dfrac{3}{x-2}>\dfrac{2}{x-3}$.	Приведем неравенство к виду: $\dfrac{x}{x^2-5x+6}+\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{2}{x-3}>0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \dfrac{x}{(x-2)(x-3)}+\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{2}{x-3}>0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \dfrac{x+3(x-3)-2(x-2)}{(x-2)(x-3)}>0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \dfrac{2x-5}{(x-2)(x-3)}>0.$ Отметим на оси абсцисс нуль функции $f(x)=\dfrac{2x-5}{(x-2)(x-3)}$, т. е. $x=2{,}5$, и те значения переменной, при которых значения функции не существуют: $x=2$ и $x=3$. Построим схему графика функции.  *Ответ*: $x\in(2;\ 2{,}5)\cup(3;\ +\infty)$.
6. Найдите область определения функции $y=\sqrt{\dfrac{x^3-7x^2+12x}{x-4}}$.	Так как функция $y=\sqrt{t}$ определена для $t\geqslant 0$, то решим неравенство $\dfrac{x^3-7x^2+12x}{x-4}\geqslant 0$. Данное неравенство равносильно неравенству $\dfrac{x\left(x^2-7x+12\right)}{x-4}\geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x(x-4)(x-3)}{x-4}\geqslant 0.$ Для нахождения нулей функции $f(x)=\dfrac{x(x-4)(x-3)}{x-4}$ используем условие равенства дроби нулю:

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

$$\frac{x(x-4)(x-3)}{x-4}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=3, \\ x=4, \end{array}\right. \\ x-4\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=3. \end{array}\right.$$

При $x = 4$ значение функции не существует.

Построим схему графика функции. При переходе через точку 4 положение графика относительно оси не меняется, так как множитель $(x - 4)$ входит и в числитель, и в знаменатель, а при переходе через точки 0 и 3 положение графика меняется.

$D(y) = (-\infty;\ 0] \cup [3;\ 4) \cup (4;\ +\infty)$.

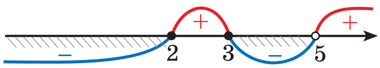
</td>
</tr>
<tr>
<td>

7. Решите систему неравенств

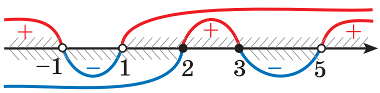
$$\begin{cases} \dfrac{(x-2)(x-3)}{x-5}\leqslant 0, \\ (x-1)(x+1)>0. \end{cases}$$

</td>
<td>

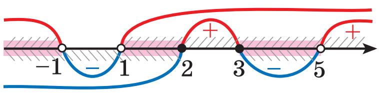
Отметим на оси абсцисс множество решений первого неравенства системы.



Отметим на этой же оси множество решений второго неравенства системы.



Найдем пересечение множеств решений.



Ответ: $x \in (-\infty;\ -1) \cup (1;\ 2] \cup [3;\ 5)$.

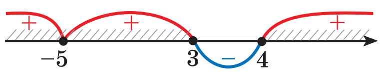
</td>
</tr>
<tr>
<td>

8. Найдите решение совокупности неравенств

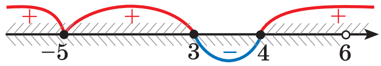
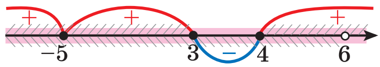
$$\left[\begin{array}{l} (x-3)(x-4)(x+5)^2\geqslant 0, \\ 2x-12<0. \end{array}\right.$$

</td>
<td>

Отметим на оси абсцисс множество решений первого неравенства совокупности.



</td>
</tr>
</table>

<table><tr><td></td><td>Отметим на этой же оси множество решений второго неравенства совокупности.

Найдем объединение множеств решений.

Ответ: $x \in (-\infty; +\infty)$.</td></tr></table>

Установите соответствие между неравенством и схемой графика функции, соответствующей решению неравенства (рис. 91):

а) $(x-1)(x+4)(x-2) \leqslant 0$; б) $(x-1)^2(x+4)(x-2) \geqslant 0$;

в) $(x-1)(x+4)^3(x-2)^4 \leqslant 0$.

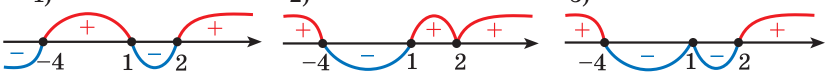


Рис. 91

3.163. Решите неравенство, используя метод интервалов:

а) $(x+2)(x-7)(x-10) > 0$;

б) $(3x+7)(x+6)(x-5) < 0$;

в) $x(2x-15)(x-8) \geqslant 0$;

г) $3x(4x+7)(3x-2) \leqslant 0$.

3.164. Решите неравенство методом интервалов, используя алгоритм:

а) $\dfrac{x-4}{x-1} > 0$; б) $\dfrac{x+6}{x-2} < 0$; в) $\dfrac{x+10}{x+12} \geqslant 0$;

г) $\dfrac{3x-9}{x+5} \leqslant 0$; д) $\dfrac{7x-2}{x-3} > 0$; е) $\dfrac{6x+12}{x} \leqslant 0$.

3.165. Найдите все значения переменной, при которых:

а) $(3-x)(x-1)(x+6) \leqslant 0$;

б) $(x-10)(2x+9)(7-2x) \geqslant 0$;

в) $(7-x)(5-x)(3x-10) < 0$;

г) $-(5-2x)(4-x)(5x-1) > 0$.

3.166. Решите неравенство, используя алгоритм решения неравенства методом интервалов:

а) $\frac{(x+1)(x-6)}{x-2} < 0;$ б) $\frac{3x+8}{(x-3)(x+5)} > 0;$

в) $\frac{x(7x-3)}{x+6} \leqslant 0;$ г) $\frac{5x(x-4)}{(2x+3)(x-7)} \geqslant 0;$

д) $\frac{(5-x)(x+4)}{x-3} > 0;$ е) $\frac{(x-7)(5x+2)}{3-2x} < 0;$

ж) $\frac{x(3-x)}{(1-8x)(x+12)} \geqslant 0;$ з) $\frac{(8-3x)(5-x)}{(x-4)(9-2x)} \leqslant 0.$

3.167. Решите неравенство двумя способами:

а) $(x-3)(x-5) < 0;$ б) $(x+7)(x-1) > 0;$

в) $(x+9)(x+3) \leqslant 0;$ г) $(2x-8)(x+6) \geqslant 0;$

д) $(3x-1)(x-7) < 0;$ е) $x(5x+2) \geqslant 0.$

3.168. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}(x-1)(x+2)(x-3) > 0,\\ 2x-5 \leqslant 0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\frac{x-5}{x} \leqslant 0,\\ (x-2)(x-3) > 0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\frac{x+5}{x-3} < 0,\\ \frac{x+9}{x-8} > 0;\end{cases}$ г) $\begin{cases}x(x+3)(x-5) > 0,\\ (x+2)(x-6) \leqslant 0.\end{cases}$

3.169. Используя метод интервалов, решите совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l}x(x+4)(2x-1) \geqslant 0,\\ \frac{x+7}{x-2} \leqslant 0.\end{array}\right.$

3.170. Решите неравенство:

а) $(x-3)^2(x+2) \leqslant 0;$ б) $x^2(x-7) < 0;$

в) $(x-10)(x-5)^2(x+3) \geqslant 0;$ г) $(2x+9)(2-x)(x-1)^2 \geqslant 0.$

3.171. Проанализируйте условие и найдите все значения аргумента, при которых график функции

$$f(x) = (x+9)^4(x-2)^2x^3(x+3)$$

расположен ниже оси абсцисс.

3.172. Решите неравенство, используя алгоритм решения неравенств методом интервалов:

а) $\frac{(x-5)^2}{x-3} \leqslant 0;$ б) $\frac{x-7}{(x-12)^2} \geqslant 0;$

в) $\dfrac{6-x}{(x-5)(x-2)^4}<0;$ г) $\dfrac{(x+5)^6}{(1-4x)(x+4)}\geqslant 0.$

3.173. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}(x+1)(x-2)(x-4)^2\geqslant 0,\\ x^2-16>0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dfrac{(x-2)^2(x+3)}{x-4}\geqslant 0,\\ x(x-2)(x+5)\geqslant 0.\end{cases}$

3.174. Найдите все значения переменной, при которых значение выражения:

а) $(x^2+4x+4)(x-3)$ положительно;

б) $(x^2-6x+9)(x^2-25)$ отрицательно;

в) $(25x^2-10x+1)(1-x^2)$ неположительно;

г) $(4x^2+12x+9)(x^2+5)$ неотрицательно.

3.175. Решите совокупность неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l}(x^2-8x+16)(x-5)\geqslant 0,\\ 5x-20<0;\end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l}(9x^2-6x+1)(x^2-4)<0,\\ \dfrac{x-7}{x}\leqslant 0.\end{array}\right.$

3.176. Решите неравенство:

а) $\dfrac{(x^2-10x+25)x}{x^2-49}\geqslant 0;$ б) $\dfrac{(x+4)^2-8x-25}{(x-6)^2}>0;$

в) $\dfrac{(3-x)(9x^2+1)}{x^2-16}\leqslant 0;$ г) $\dfrac{9x^2-6x+1}{1-4x^2}\leqslant 0.$

Проверьте, является ли число 5 решением какого-либо из этих неравенств.

3.177. Решите неравенство:

а) $\dfrac{(x+2)(x-7)}{4x+8}\leqslant 0;$ б) $\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}\geqslant 0;$

в) $\dfrac{x^2+x-12}{x^2-8x+15}\leqslant 0;$ г) $\dfrac{x^2-4x-21}{x^2-9}\geqslant 0.$

3.178. Найдите область определения функции:

а) $y=\sqrt{(x^2-4x+3)(x-2)};$

б) $y=\sqrt{(x^2+6x+5)(1-x^2)};$

в) $y = \sqrt{\frac{2 - x - x^2}{2x + 3}}$;   г) $y = \sqrt{\frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 11x + 28}}$.

3.179. Решите неравенство:

а) $\frac{(x-3)^3(x+5)^4}{x^2} < 0$;   б) $\frac{7(x-4)(x+3)^2}{(x^2+9)(x+1)^2(x-5)} \leqslant 0$;

в) $-\frac{(x^3-8)(x-4)^2(x-6)}{x^2(x^2-9)(x^4+25)} < 0$;   г) $\frac{(x+2)(x+3)^5(x-2)^2}{(4-x)(2x+7)} \leqslant 0$.

Какое из этих неравенств содержит среди решений числа -6; 2; 5?

3.180. Составьте план решения и найдите наименьшее целое решение неравенства:

а) $\frac{1}{x+5} > \frac{x}{x+5}$;   б) $\frac{x}{x^2-1} \geqslant \frac{5}{1-x^2}$.

3.181. Решите неравенство:

а) $\frac{x}{x-1} \geqslant 3$;   б) $\frac{3-x}{2x+5} < 1$;   в) $\frac{4x-3}{x} \leqslant 2$;

г) $\frac{1}{x-3} < \frac{2}{x+2}$;   д) $\frac{5}{x-2} \geqslant \frac{1}{1-x}$;   е) $\frac{8-x}{x-10} \leqslant \frac{2}{2-x}$;

ж) $\frac{3}{x-1} > x + 1$;   з) $x + 4 \leqslant \frac{9}{x+4}$.

3.182. Найдите все значения переменной, при которых имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{2 - \frac{x^2+11}{x+5}}$;   б) $\sqrt{\frac{4}{(x-1)^2} - 1}$.

3.183. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} \frac{6}{x} - \frac{6}{x+1} \geqslant 1, \\ x^2 \leqslant 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 0, \\ \frac{x^2-5x}{x+3} \geqslant 2. \end{cases}$

3.184. Найдите все значения переменной, при которых:

а) сумма дробей $\frac{4}{x+1}$ и $\frac{2}{1-x}$ меньше 1;

б) разность дробей $\frac{x-2}{x-1}$ и $\frac{x-1}{x}$ больше 2;

в) разность дробей $\frac{9}{3-x}$ и $\frac{7}{x^2-5x+6}$ не меньше 1.

3.185. Туристы на моторной лодке планируют проплыть 15 км по течению реки и такое же расстояние против течения, затратив на весь путь не более 4 ч. Какой может быть собственная скорость лодки, если скорость течения реки составляет 2 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$?

3.186. Найдите область определения функции:

а) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 2x - 5} + \frac{5}{\sqrt{(x-2)(x+3)x}}$;

б) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 2x^2}{x+4}} - \sqrt{2x^2 - x + 3}$.

3.187*. Найдите все значения аргумента, при которых:

а) график функции $y = \frac{2x+3}{x^2+x-12}$ расположен ниже прямой $y = \frac{1}{2}$;

б) график функции $y = \frac{2x-5}{x^2-6x-7}$ расположен выше графика функции $y = \frac{1}{x-3}$;

в) прямая $y = x - 1$ расположена не ниже графика функции $y = \frac{x^2-5x-1}{x-1}$.

3.188*. Найдите сумму целых отрицательных чисел, которые не являются решением неравенства $\frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} < 1$.

3.189*. Найдите наименьшее целое решение неравенства $\frac{(x^2+2x+1)(x^2-6x+9)}{x-3} \geqslant 0$.

3.190*. Найдите число целых отрицательных решений неравенства $\frac{3x^2-11x+22}{x^2-4x-5} \geqslant 3$.

3.191*. Найдите сумму целых решений неравенства $\frac{x^4+2x^2+1}{x^2-4x-5} \leqslant 0$.

3.192*. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$\frac{(x^2-3x+7)(x^2+4x)-4(3x-x^2-7)}{x^2-7x+6} \leqslant 0.$$

3.193. Решите неравенство, используя метод интервалов:

а) $(x+5)(x+1)(x-4) < 0$;

б) $x(2x-11)(3x+6)(x-5) \geqslant 0$;

в) $(1-x)(x+8)(4x-3) \leqslant 0$;

г) $-(3-2x)(8-x)(9-4x) > 0$.

3.194. Решите неравенство методом интервалов, используя алгоритм:

а) $\dfrac{x-7}{x-3} < 0$; б) $\dfrac{x-9}{x+5} > 0$;

в) $\dfrac{2x+17}{x+3} \leqslant 0$; г) $\dfrac{x}{5x+2} \geqslant 0$.

3.195. Найдите все значения переменной, при которых:

а) $\dfrac{(x+2)(x-5)}{x-3} > 0$; б) $\dfrac{2x+15}{(x-1)(x+9)} < 0$;

в) $\dfrac{x(9x-1)}{x-5} \geqslant 0$; г) $\dfrac{(8-x)(x+6)}{x-11} \leqslant 0$;

д) $\dfrac{x(2-x)}{(1-3x)(x+5)} > 0$; е) $\dfrac{(1-6x)(3-x)}{(7-2x)(x+7)} \leqslant 0$.

3.196. Решите неравенство двумя способами:

а) $(x-2)(x-8) > 0$; б) $(x+3)(x-9) \leqslant 0$;

в) $(3x-6)(x+5) < 0$; г) $x(2x-7) \geqslant 0$.

3.197. Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{x-8}{3-x} \leqslant 0, \\ (x-1)(x-2)(x+7) < 0. \end{cases}$

3.198. Решите совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} (x-3)(x+4) > 0, \\ \dfrac{x+4}{x} \leqslant 0. \end{array}\right.$

3.199. Решите неравенство:

а) $(x-5)^2(x+3) \leqslant 0$; б) $x^2(x-9) < 0$;

в) $(x-9)(x-7)^2(x+6) \geqslant 0$; г) $(3x+7)(8-x)(x-2)^2 \geqslant 0$.

3.200. Решите неравенство:

а) $\dfrac{(x-6)^2}{x-4} \leqslant 0$; б) $\dfrac{x-8}{(x-10)^2} \geqslant 0$;

в) $\dfrac{(x-8)(9-x)}{(x-5)^2} < 0$; г) $\dfrac{(x+6)^2}{(7-3x)(x+2)} \geqslant 0$.

Верно ли, что число 10 является решением каждого неравенства; не является решением ни одного из неравенств?

3.201. Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{(x-3)(x+2)}{(x-8)^2} \geqslant 0, \\ x^2 - 3x \geqslant 0. \end{cases}$

3.202. Найдите все значения переменной, при которых значение выражения:

а) $(x^2 - 10x + 25)(x + 7)$ отрицательно;

б) $(4x^2 + 4x + 1)(36 - x^2)$ неположительно.

Выберите наибольшее целое отрицательное решение каждого из этих неравенств.

3.203. Решите совокупность неравенств

$$\left[\begin{array}{l}(x^2 + 12x + 36)(x - 1) \geqslant 0, \\ \dfrac{x + 6}{x} < 0.\end{array}\right.$$

3.204. Решите неравенство:

а) $\dfrac{(x^2 + 4x + 4)x}{x^2 - 25} \geqslant 0$; б) $\dfrac{(9 - x^2)(x^2 + 4)}{x^2 - 10x + 25} > 0$.

3.205. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{(x^2 - 7x + 10)(x + 3)}$; б) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 49}{6 - x - x^2}}$.

3.206. Решите неравенство:

а) $\dfrac{(x - 7)^3}{x^2(x + 3)^4} < 0$; б) $\dfrac{-8(x - 2)(x^2 + 1)(x + 4)^2}{(x + 2)^2(x - 9)} \geqslant 0$.

Являются ли числа –3; –4 решением какого-либо из этих неравенств?

3.207. Решите неравенство:

а) $\dfrac{1 - x}{x} < 3$; б) $\dfrac{1}{x - 7} > \dfrac{x + 4}{7 - x}$;

в) $\dfrac{2}{x + 3} > \dfrac{1}{2 - x}$; г) $\dfrac{5}{x + 2} \geqslant x - 2$.

3.208. Решите систему неравенств $\begin{cases}\dfrac{8 - x}{x - 10} \leqslant \dfrac{2}{2 - x}, \\ x^2 - 25 \geqslant 0.\end{cases}$

3.209. Найдите все значения переменной, при которых разность дробей $\dfrac{6}{x}$ и $\dfrac{6}{x + 1}$ не превосходит 1.

3.210. Туристы на катере планируют проплыть 40 км по течению реки и такое же расстояние против течения, затратив на весь путь не более 3 ч. Какой может быть собственная скорость катера, если скорость течения реки составляет 3 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$?

3.211. Найдите область определения функции
$$f(x)=\sqrt{\frac{(x+1)^2}{x-8}}-\sqrt{x^2+6x+5}.$$

3.212*. Найдите значения аргумента, при которых график функции $y=\frac{x^2-4x-1}{x-2}$ расположен не выше прямой $y=x+2$.

3.213*. Найдите сумму целых решений неравенства
$$1+\frac{2}{x+4}\leqslant\frac{7}{6-x}.$$

3.214*. Найдите сумму натуральных решений неравенства
$$\frac{(x^2-10x+21)(x^2-6x-7)}{(x^2+5x+6)(x^2-4)}\leqslant 0.$$

3.215. Верно ли, что:

а) $-73\notin \boldsymbol{Z}$; б) $\sqrt{5}\notin \boldsymbol{Q}$; в) $-\sqrt{2}\notin \boldsymbol{N}$;
г) $0\notin \boldsymbol{Z}$; д) $0,(3)\notin \boldsymbol{I}$; е) $2,6\notin \boldsymbol{R}$?

3.216. Вычислите: $\sqrt{13-\sqrt{69}}\cdot\sqrt{\sqrt{69}+13}$.

3.217. Решите уравнение $(2x-3)(2x+3)-(x-2)^2-1=5x$.

3.218. Представьте в виде дроби выражение
$$\frac{1}{2x-y}-\frac{1}{2x+y}+\frac{4x}{4x^2-y^2}.$$

3.219. Решите уравнение $\frac{x^2+3x}{x-2}=\frac{x-12}{2-x}$.

3.220. Постройте график функции $y=-x^2+4x-5$. Найдите множество значений этой функции.

3.221. Используя графический метод, найдите количество решений системы уравнений $\begin{cases}x^2+y^2=25,\\ y=4x.\end{cases}$

3.222. Функция $y=f(x)$ четная. Известно, что $f(x)=x^3$ при $x\leqslant 0$. Найдите $f(2)$.

Итоговая самооценка

После изучения этой главы я должен:

- знать определение дробно-рациональных уравнений;
- знать и уметь применять условие равенства рациональной дроби нулю;

• знать алгоритм решения дробно-рациональных уравнений;

• уметь применять алгоритм решения дробно-рациональных уравнений;

• уметь решать задачи с помощью рациональных уравнений;

• уметь применять для решения систем рациональных уравнений способы подстановки, сложения;

• уметь использовать графики уравнений для решения систем уравнений;

• уметь решать задачи с помощью систем рациональных уравнений;

• знать и уметь применять формулу длины отрезка, заданного координатами его концов;

• знать уравнение окружности и уметь применять его для решения задач;

• знать и уметь применять метод интервалов для решения рациональных неравенств;

• уметь применять правила и алгоритмы для решения систем и совокупностей рациональных неравенств.

Я проверяю свои знания

1. Выберите уравнение, корнем которого является число −4:

а) $\frac{x^2+4x+4}{x-6}=0$; б) $\frac{2x+8}{x-9}=0$; в) $\frac{(x+12)(x+4)}{x+4}=0$;

г) $\frac{7x+1}{x+4}=0$; д) $\frac{4x^2+1}{x-10}=0$.

2. Выберите систему уравнений, графическая иллюстрация которой представлена на рисунке 92:

а) $\begin{cases} y=-x+3, \\ xy=16; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y=-x+3, \\ x^2+y^2=4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y=x+3, \\ x^2-y^2=16; \end{cases}$

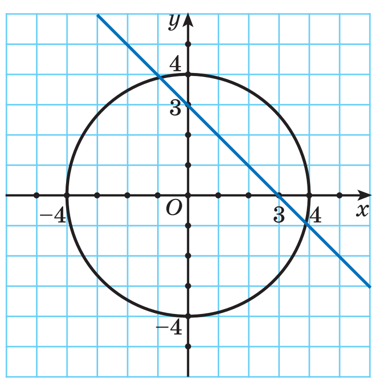


Рис. 92

г) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 = 16; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x + y = -3, \\ x^2 + y^2 = 16. \end{cases}$

3. Решите уравнение, используя условие равенства дроби нулю:

а) $\frac{x+5}{x-1} = 0$; б) $\frac{x^2-36}{x-6} = 0$;

в) $\frac{x^2-6x+8}{x-4} = 0$; г) $\frac{x+2}{x^2-4} = 0$.

4. Сумма двух чисел равна 6, а разность квадратов этих чисел равна 12. Найдите эти числа.

5. Решите неравенство методом интервалов:

а) $(x-3)(2x+5)(x-8) > 0$; б) $\frac{(x-3)(5-x)}{6x+1} \leqslant 0$;

в) $(x^2-4)(x-3)(x^2+10x+25) < 0$; г) $\frac{x^2(x-1)(x+2)}{x-3} \leqslant 0$;

д) $\frac{(x^2-9)(x^2+2x+1)}{25-x^2} \geqslant 0$.

6. Решите уравнение:

а) $\frac{4x-6}{x+2} - \frac{x}{x+1} = \frac{9}{(x+1)(x+2)}$;

б) $\frac{1}{x+3} - \frac{x}{3-x} = \frac{18}{x^2-9}$;

в) $\frac{x+3}{4x^2-9} - \frac{3-x}{4x^2+12x+9} = \frac{2}{2x-3}$;

г) $\frac{8}{x^2-6x+8} + \frac{1-3x}{2-x} = \frac{4}{x-4}$.

7. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x - y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + xy = 2, \\ y - 3x = 7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 - 4x - y = -3, \\ 5x + y = 5. \end{cases}$

8. Найдите область определения функции:

а) $f(x) = \sqrt{x^2 - 12x + 11} + \frac{6}{\sqrt{(x-1)(x+5)x}}$;

б) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3-5x^2}{x+6}} - \sqrt{7x^2 - x + 1}$.

9. Составьте модель условия и решите задачу:

а) Две производственные линии, работая одновременно, выполнили весь заказ за 5 ч. Если бы производительность первой линии была в два раза больше, а второй — в два раза меньше, то весь заказ они выполнили бы за 4 ч. Найдите, за сколько часов выполнила бы весь заказ одна первая линия.

б) Первый турист преодолевает расстояние 20 км на 2,5 ч быстрее, чем второй. Если бы первый турист уменьшил свою скорость на 2 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а второй увеличил свою скорость в 1,5 раза, то они затратили бы на тот же путь одинаковое время. Найдите скорость второго туриста.

10. Найдите, при каком значении числа a система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ x - y = a \end{cases}$ имеет единственное решение.

Практическая математика

1. Пешеход идет со скоростью 5 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, велосипедист едет со скоростью 20 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, автомобиль по кольцевой дороге движется со скоростью 100 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, пассажирский самолет летит со скоростью 500 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, скорость международной космической станции на орбите — 27 700 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Найдите, за какое время каждый из этих объектов преодолеет расстояние в 1 км.

2. На оплату разгрузки поступившего производственного оборудования выделена некоторая сумма денег. Работу согласилась выполнить бригада грузчиков. Поскольку разгрузкой занималась не вся бригада (3 человека заболели), то каждый грузчик получил на 1,5 тыс. р. больше. Найдите выделенную бригаде сумму денег (тысяч рублей), зная, что 5 %-й сбор за банковский перевод обошелся работодателю дополнительно в величину, находящуюся в пределах от 1,2 до 1,6 тыс. р.

3. Рабочая смена сотрудников «Зеленстроя» начинается в 8 часов утра. Два сотрудника с начала смены выполняли работу по озеленению проспекта. После 45 мин совместной работы первый сотрудник был переведен на другую работу, и второй сотрудник закончил оставшуюся часть работы за 2 ч 15 мин. Если бы каждый сотрудник работал в отдельности, то второму для выполнения всей работы понадобилось бы на 1 ч больше, чем первому. Выясните, смог ли бы первый сотрудник выполнить всю работу до полудня, если бы с начала смены работал один.

Увлекательная математика

Исследуем, обобщаем, делаем выводы

Исследовательское задание. Можно ли найти множество значений функции, если: а) построить ее график; б) решить уравнение, задающее функцию относительно аргумента? Попробуйте применить указанные приемы для нахождения множества значений функции $y = \frac{1}{|x|} - 3.$ Обобщите результат.

Готовимся к олимпиадам

1. Легендарная школа Пифагора среди прочих задач занималась нахождением целочисленных прямоугольных треугольников. В частности, пифагорейцы нашли бесконечные серии (не все) троек натуральных чисел (a; b; c), для которых $a^2 + b^2 = c^2$. Существует ли целочисленный прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 2019?

2. К бассейну подведены четыре трубы, причем пропускная способность четвертой трубы в два раза выше пропускной способности первой трубы, а пропускная способность третьей трубы в два раза выше пропускной способности второй трубы. В первый день бассейн заполнялся двумя трубами — первой и третьей — 40 мин, а во второй день — второй и четвертой — 50 мин. Определите максимальное и минимальное время заполнения бассейна двумя трубами.

3. На реке расположены населенные пункты A и B. Одновременно из этих пунктов навстречу друг другу отправляются два одинаковых катера, обмениваются почтой и возвращаются обратно. Катер, вышедший из пункта A, возвращается обратно через 1 ч после выхода. Если бы этот катер отправился на 15 мин раньше катера, вышедшего из пункта B, то встреча произошла бы на равном расстоянии от обоих пунктов. Через какое время возвращается обратно катер, вышедший из пункта B?