

4.33*. Последовательность (a_n) задана формулой n -го члена $a_n = n^2 - 6n - 3$. Найдите номера членов данной последовательности, не превосходящих 4.

4.34*. Запишите 4 первых члена последовательности (a_n) , заданной рекуррентно:

а) $a_1 = 3, a_{n+1} = 5a_n - 1;$ б) $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n^2 + a_n.$



4.35. Постройте график функции $f(x) = -\frac{6}{x}$ и найдите:

а) $f(-3)$ и $f(18);$

б) значения аргумента, при которых значение функции равно 12;

в) значения аргумента, при которых функция принимает отрицательные значения;

г) промежутки возрастания функции.

4.36. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 - 12y = 6, \\ x + 4y = -2. \end{cases}$$

4.37. Упростите выражение $\left(1 + \frac{2x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right) \cdot \frac{y}{y+x}.$

4.38. Числитель обыкновенной дроби на 4 меньше знаменателя. Если и числитель, и знаменатель этой дроби уменьшить на 3, то получится дробь, равная 0,75. Найдите первоначальную дробь.

§ 15. Арифметическая прогрессия



4.39. Решите уравнение $2,24x - 6,6 = 38,2.$

4.40. Функция задана формулой $f(x) = 3x^2 - \sqrt{x}.$ Вычислите:

а) $f(4);$ б) $f\left(\frac{1}{9}\right);$ в) $f(0,01).$

4.41. Найдите все значения аргумента, при которых значение функции $f(x) = x^2$ равно:

а) 7; б) 0,04; в) $1\frac{7}{9}.$

4.42. Найдите среднее арифметическое чисел:

а) 12 и 24; б) 5; 7 и 9.



Рассмотрим задачу. В горной местности температура воздуха летом при подъеме на каждые 100 м в среднем понижается на $0,7^\circ\text{C}$. У подножия горы температура равна 26°C . Найдите температуру воздуха на высоте 100 м; 200 м; 300 м.

Решение. Температура воздуха на высоте 100 м равна $26^\circ\text{C} - 0,7^\circ\text{C} = 25,3^\circ\text{C}$. На высоте 200 м температура будет равна $25,3^\circ\text{C} - 0,7^\circ\text{C} = 24,6^\circ\text{C}$, а на высоте 300 м — $24,6^\circ\text{C} - 0,7^\circ\text{C} = 23,9^\circ\text{C}$.

Ответ: $25,3^\circ\text{C}$; $24,6^\circ\text{C}$; $23,9^\circ\text{C}$.

Решая задачу, мы получили последовательность 26; 25,3; 24,6; Каждый член этой последовательности равен предыдущему, сложенному с числом $-0,7$. Многие практические задачи приводят к последовательностям такого вида. Они называются *арифметическими прогрессиями* (от лат. *progressio* — движение вперед).

Определение. Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же для данной последовательности числом, т. е.

$$a_{n+1} = a_n + d, \text{ где } n \in \mathbf{N}, d \in \mathbf{R}.$$

Число d называется **разностью арифметической прогрессии**.

Из равенства $a_{n+1} = a_n + d$ следует, что $d = a_{n+1} - a_n$.

Чтобы задать арифметическую прогрессию (a_n) , достаточно задать ее первый член a_1 и разность d .

$$a_{n+1} = a_n + d$$

Например, если $a_1 = 3$, $d = 4$, то получится арифметическая прогрессия 3; 7; 11; 15;

Если $a_1 = 2$, $d = -3$, то арифметическая прогрессия имеет вид 2; -1; -4; -7; -10;

Если $a_1 = -7$, $d = 0$, то все члены арифметической прогрессии равны между собой: -7; -7; -7; -7;

Чтобы вычислить любой член арифметической прогрессии, не вычисляя все предыдущие члены, используют формулу n -го члена арифметической прогрессии

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$



Выведем эту формулу. Если (a_n) — арифметическая прогрессия с разностью d , то, используя определение, получим верные равенства:

$$a_2 = a_1 + d; \quad a_3 = a_2 + d; \quad a_4 = a_3 + d; \quad \dots;$$

$$a_{n-1} = a_{n-2} + d; \quad a_n = a_{n-1} + d.$$

Сложим эти равенства:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d \\ a_4 &= a_3 + d \\ &+ \dots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + d \\ a_n &= a_{n-1} + d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n = \\ &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + \underbrace{d + d + \dots + d}_{n-1 \text{ раз}}. \end{aligned}$$

После упрощения получим:

$$a_n = a_1 + \underbrace{d + d + \dots + d}_{n-1 \text{ раз}}.$$

Так как число слагаемых d равно $n - 1$, то равенство примет вид

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Получили формулу n -го члена арифметической прогрессии (a_n) .

Формула n -го члена арифметической прогрессии (a_n) позволяет вычислить любой член прогрессии, зная ее первый член a_1 , номер члена n и разность прогрессии d .

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Пример 1. Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия, $a_1 = 2$, $d = 2,5$. Найдите 100-й член прогрессии.

Решение. По формуле n -го члена получим:

$$a_{100} = a_1 + (100 - 1)d = 2 + 99 \cdot 2,5 = 249,5.$$

Ответ: 249,5.

Пример 2. Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия, $a_1 = 3$, $d = 2,5$. Является ли членом этой прогрессии число: а) 168; б) 201?

Решение. а) По условию $a_n = 168$, $a_1 = 3$, $d = 2,5$. Подставим эти значения в формулу n -го члена $a_n = a_1 + (n - 1)d$ и получим уравнение $168 = 3 + (n - 1) \cdot 2,5$. Решив его, получим, что $n = 67$ — корень уравнения. Так как 67 — натуральное число, то число 168 является членом этой прогрессии с номером 67 .

б) Подставим значения $a_n = 201$, $a_1 = 3$, $d = 2,5$ в формулу n -го члена $a_n = a_1 + (n - 1)d$ и получим уравнение $201 = 3 + (n - 1) \cdot 2,5$. Решим его: $201 = 3 + (n - 1) \cdot 2,5$; $198 = 2,5(n - 1)$; $79,2 = n - 1$; $n = 80,2$. Так как корень уравнения $80,2$ — не натуральное число, то число 201 не является членом этой прогрессии.

Ответ: а) число 168 является членом этой прогрессии; б) число 201 не является членом этой прогрессии.

Характеристическое свойство арифметической прогрессии

В арифметической прогрессии каждый ее член, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего (соседних с ним) членов, т. е. $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ при $n \geq 2$.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

при $n \geq 2$



Доказательство. В арифметической прогрессии (a_n) для члена a_n запишем по формуле n -го члена предыдущий и последующий члены, т. е. a_{n-1} и a_{n+1} :

$$a_{n-1} = a_1 + d(n - 2), \quad a_{n+1} = a_1 + dn.$$

Найдем их среднее арифметическое:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} &= \frac{a_1 + d(n - 2) + a_1 + dn}{2} = \frac{2a_1 + 2d(n - 1)}{2} = \\ &= a_1 + d(n - 1) = a_n. \end{aligned}$$

Справедливо и обратное утверждение:

если в последовательности каждый ее член, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего (соседних с ним) членов, то последовательность является арифметической прогрессией.



Доказательство. Пусть в некоторой числовой последовательности (a_n) каждый ее член, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов, т. е. $\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$. Тогда $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$, $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$, значит, разность каждого ее члена с предыдущим членом есть одно и то же число. Обозначим его d , получим $a_{n+1} - a_n = d$ при любом натуральном n , следовательно, $a_{n+1} = a_n + d$. Значит, по определению последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия.

Оба утверждения можно объединить в одно, которое называется **характеристическим свойством арифметической прогрессии**:

числовая последовательность является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.



Пример 3. Проверьте, является ли арифметической прогрессией последовательность, заданная формулой

$$a_n = 2n + 7.$$

Решение. Запишем для $a_n = 2n + 7$ предыдущий и последующий члены последовательности:

$$a_{n-1} = 2(n-1) + 7 = 2n + 5; \quad a_{n+1} = 2(n+1) + 7 = 2n + 9.$$

Найдем среднее арифметическое этих членов:

$$\frac{(2n+5) + (2n+9)}{2} = \frac{4n+14}{2} = 2n + 7 = a_n.$$

По характеристическому свойству арифметической прогрессии последовательность $a_n = 2n + 7$ является арифметической прогрессией.



Определение арифметической прогрессии

1. Последовательность
2; 12; 22; ...
является арифметической прогрессией. Продолжите последовательность.

Так как последовательность является арифметической прогрессией, то найдем ее разность $d = 12 - 2 = 10$. Тогда каждый следующий член последовательности равен предыдущему, сложенному с числом 10: 2; 12; 22; 32; 42;

<p>2. Известны члены арифметической прогрессии: $a_6 = -2$; $a_7 = 3$. Найдите разность этой прогрессии.</p>	<p>Найдем разность арифметической прогрессии: $d = a_{n+1} - a_n$; $d = a_7 - a_6 = 3 - (-2) = 5$.</p>
<p>Формула n-го члена арифметической прогрессии</p>	
<p>3. Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. Найдите двадцатый член прогрессии, если $a_1 = 3$, $d = 1,6$.</p>	<p>По формуле n-го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + (n - 1)d$ получим: $a_{20} = 3 + (20 - 1) \cdot 1,6 = 33,4$.</p>
<p>4. Запишите формулу n-го члена для арифметической прогрессии $-15,5$; $-14,9$; $-14,3$; ... и найдите ее двадцатый член.</p>	<p>По условию $a_1 = -15,5$, $a_2 = -14,9$, тогда $d = a_2 - a_1 = -14,9 - (-15,5) = 0,6$. Запишем формулу n-го члена данной арифметической прогрессии, подставив в формулу $a_n = a_1 + (n - 1)d$ значения для a_1 и d: $a_n = -15,5 + (n - 1) \cdot 0,6$; $a_n = 0,6n - 16,1$. Подставим $n = 20$ в формулу n-го члена данной арифметической прогрессии и найдем ее двадцатый член: $a_{20} = 0,6 \cdot 20 - 16,1 = -4,1$.</p>
<p>5. В арифметической прогрессии (a_n) известно, что $a_1 = -5,6$; $a_2 = -4,8$. Число 16 является членом этой прогрессии. Найдите его номер.</p>	<p>Так как $a_1 = -5,6$; $a_2 = -4,8$, то $d = a_2 - a_1 = -4,8 - (-5,6) = -4,8 + 5,6 = 0,8$. По условию $a_n = 16$. Воспользуемся формулой $a_n = a_1 + (n - 1)d$, тогда $16 = -5,6 + (n - 1) \cdot 0,8$; $16 = -5,6 + 0,8n - 0,8$; $16 = 0,8n - 6,4$; $22,4 = 0,8n$; $n = 28$.</p>
<p>6. В арифметической прогрессии $a_6 = 8$, $a_{10} = 16$. Найдите разность прогрессии и ее первый член.</p>	<p>По условию $a_6 = a_1 + 5d = 8$, $a_{10} = a_1 + 9d = 16$. Решим систему уравнений $\begin{cases} a_1 + 5d = 8, \\ a_1 + 9d = 16. \end{cases}$ Вычтем из второго уравнения первое, получим $4d = 8$, откуда $d = 2$. Подставим $d = 2$ в первое уравнение системы, получим $a_1 = -2$.</p>

Характеристическое свойство арифметической прогрессии	
<p>7. Найдите восьмой член арифметической прогрессии (a_n), если $a_7 = 21$, $a_9 = 29$.</p>	<p>По характеристическому свойству арифметической прогрессии</p> $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \text{ т. е.}$ $a_8 = \frac{a_7 + a_9}{2} = \frac{21 + 29}{2} = 25.$
<p>8. При каком значении x последовательность $x - 1$; $4x - 9$; $4x + 2$ является арифметической прогрессией?</p>	<p>По характеристическому свойству прогрессии последовательность является арифметической прогрессией, если каждый ее член, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов:</p> $4x - 9 = \frac{(x - 1) + (4x + 2)}{2}.$ <p>Решим полученное уравнение:</p> $8x - 18 = 5x + 1; 3x = 19; x = 6\frac{1}{3}.$



1. В арифметической прогрессии (a_n) n -й член вычисляется по формуле:

- а) $a_n = a_1 + d$; б) $a_n = a_1 + nd$;
 в) $a_n = a_1 + (n - 1)d$; г) $a_n = a_1 + 2dn$.

Выберите правильный ответ.

2. Последовательность (a_n) является арифметической прогрессией, если для всех членов последовательности, начиная со второго, выполняется условие:

- а) $a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$; б) $a_n = a_{n-1} - a_{n+1}$;
 в) $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$; г) $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Выберите правильный ответ.



4.43. Данная последовательность является арифметической прогрессией, определите разность прогрессии и найдите следующие три ее члена:

- а) 2; 4; 6; ...; б) -1; -4; -7; ...;
 в) 2; 5; 8; ...; г) 0,1; 0,2; 0,3;

4.44. Первый член арифметической прогрессии равен 5,3, а разность равна 3. Назовите 5 первых членов этой арифметической прогрессии.

4.45. Какие члены прогрессии можно использовать, чтобы определить разность арифметической прогрессии:

- а) $-8; -4; 0; 4; \dots$; б) $8,5; 8; 7,5; 7; \dots$;
 в) $9; 9; 9; 9; \dots$; г) $\sqrt{3}; 2\sqrt{3}; 3\sqrt{3}; 4\sqrt{3}; \dots?$

Найдите шестой член прогрессии.

4.46. Найдите разность арифметической прогрессии (a_n) , если:

- а) $a_1 = 12, a_2 = -6$; б) $a_8 = 7,2, a_9 = 8,5$;
 в) $a_{45} = 8\sqrt{2}, a_{46} = 5\sqrt{2}$; г) $a_n = 3\frac{5}{7}, a_{n+1} = 2\frac{3}{7}$.

4.47. В арифметической прогрессии $-100; 0; 100; \dots$ найдите номер члена, равного 1000.

4.48. Разность арифметической прогрессии (a_n) равна 4. Найдите первый и второй члены этой прогрессии, если:

- а) $a_3 = 5$; б) $a_3 = -2$;
 в) $a_3 = 1,5$; г) $a_3 = -3\frac{1}{3}$.

4.49. Используйте формулу n -го члена арифметической прогрессии (a_n) для вычисления шестнадцатого члена этой прогрессии, если:

- а) $a_1 = 5, d = -3$; б) $a_1 = -0,2, d = 10$;
 в) $a_1 = 0, d = \frac{1}{3}$; г) $a_1 = \sqrt{5}, d = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

4.50. Для арифметической прогрессии (a_n) выразите через a_7 и d :

- а) a_1 ; б) a_8 ; в) a_{20} ; г) a_{100} .

4.51. Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. Выразите a_{30} через:

- а) a_1 и d ; б) a_{31} и d ; в) a_{15} и d ; г) a_{40} и d .

4.52. Запишите формулу n -го члена и найдите a_{10}, a_{21} и a_{201} для арифметической прогрессии (a_n) :

- а) $-26; -21; -16; \dots$; б) $7,8; 7,1; 6,4; \dots$;
 в) $-\sqrt{2}; -\sqrt{2}; -\sqrt{2}; \dots$; г) $\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; \dots$.

4.53. Для арифметической прогрессии (a_n) известно, что $a_2 = -4, a_3 = 2$. Найдите разность прогрессии, ее первый и двадцать пятый член.

4.54. В бензобак грузового автомобиля залили 600 л бензина. В первый день пути было израсходовано 30 л бензина,

а в каждый следующий день расходовали на 5 л бензина больше, чем в предыдущий. Сколько литров бензина израсходовали в пятый день; в седьмой день?

4.55. Как определить, является ли число 142 членом арифметической прогрессии $-18; -16,4; -14,8; \dots$? Какой номер имеет член прогрессии, равный 142? Можно ли без вычислений определить, является ли членом данной прогрессии число 15?

4.56. В арифметической прогрессии (a_n) известно, что $a_1 = -7,3$ и $a_2 = -6,4$. Является ли членом данной прогрессии число 26?

4.57. Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия, $a_1 = 4,5$, $d = -0,6$.

Найдите номер первого отрицательного члена этой прогрессии. Какой номер имеет член данной прогрессии, равный $-15,9$? Сколько членов данной прогрессии, больших числа -51 ?

4.58. Первый член арифметической прогрессии равен -37 , $d = 1$, n -й член равен 78. Сколько членов у этой прогрессии от первого до n -го члена, включая эти члены? Найдите количество всех целых чисел, принадлежащих промежутку:

- а) $[-37; 78]$; б) $[-15; 49]$; в) $[-23,8; 89,2]$.

4.59. Курс оздоровительных тренировок начинают с занятия продолжительностью 10 мин. Затем каждый следующий день время тренировки увеличивают на 3 мин. В какой день с момента начала занятий продолжительность тренировки достигнет 25 минут; станет больше 45 минут?

4.60. Можно ли найти первый член арифметической прогрессии (c_n) , если:

- а) $c_{12} = 48$, $d = -2$;
б) $c_{32} = 11,8$, $d = 0,3$;
в) $c_9 = 8\sqrt{2}$, $d = -\sqrt{2}$?

По результатам вычислений сделайте обобщение.

4.61. Какой формулой можно воспользоваться, чтобы найти разность арифметической прогрессии (a_n) , если известно, что:

- а) $a_1 = -12$, $a_{15} = 16$;
б) $a_1 = \frac{2}{9}$, $a_6 = 6\frac{7}{18}$;
в) $a_1 = 19\sqrt{7}$, $a_8 = -2\sqrt{7}$?

4.62. В арифметической прогрессии $a_{19} = 59$, $d = 3$. Какой из членов прогрессии a_1 ; a_6 ; a_{20} можно найти, не используя формулу n -го члена? Найдите a_1 ; a_6 ; a_{20} .

4.63. В арифметической прогрессии $a_{15} = 11,8$, $a_{16} = 10,2$. Найдите a_1 ; d ; a_{18} . Выполните задание разными способами.

4.64. В арифметической прогрессии (a_n) известно, что $a_{15} = 10$, $a_{20} = 6$. Найдите разность прогрессии и ее первый член. Как вычислить разность арифметической прогрессии по заданным двум ее членам?

4.65. Найдите тридцатый член арифметической прогрессии (a_n) , если известно, что:

а) $a_6 = 56$, $a_{18} = -4$;

б) $a_{10} = -8,5$, $a_{20} = 13,5$;

в) $a_{17} = -3\sqrt{10}$, $a_{23} = -15\sqrt{10}$.

4.66. Сколько положительных членов содержит арифметическая прогрессия $8,3$; $7,9$; $7,5$; ...?

4.67. Найдите номер первого отрицательного члена арифметической прогрессии (c_n) , если $c_1 = 2\frac{1}{7}$, $d = -\frac{3}{14}$.

4.68. Найдите первый положительный член арифметической прогрессии $-6\sqrt{3}$; $-\frac{11\sqrt{3}}{2}$; $-5\sqrt{3}$; ...

4.69. Если между числами -12 и 8 нужно вставить семь таких чисел, чтобы они вместе с данными числами образовали арифметическую прогрессию, то какой номер имеет член, равный 8 ? Чему равна разность этой арифметической прогрессии?

4.70. Каким свойством можно воспользоваться, чтобы найти десятый член арифметической прогрессии, если девятый и одиннадцатый ее члены соответственно равны $-12,3$ и $5,7$?

4.71. В арифметической прогрессии $a_{28} = 6\frac{2}{3}$, $a_{30} = 1\frac{1}{3}$. Найдите a_{29} ; d ; a_1 ; a_{45} . Выполните задание разными способами.

4.72. Найдите, при каком значении переменной значения выражений будут являться последовательными членами арифметической прогрессии:

а) $5x + 2$; $x - 4$ и $7 - 2x$;

б) $x^2 - 8$; $5x + 3$ и $3x + 6$;

в) $x^2 + 5$; $x^2 + x$ и $8x - 14$.

4.73. Сумма трех первых членов арифметической прогрессии равна 51. Найдите второй член прогрессии.

4.74. Докажите, что значения выражений $(a + b)^2$; $a^2 + b^2$ и $(a - b)^2$ являются последовательными членами арифметической прогрессии.

4.75*. Проверьте, является ли арифметической прогрессией последовательность:

а) $b_n = 7n + 1$; б) $c_n = 3 - 5n$; в) $x_n = n^2$; г) $y_n = 12n$.

Если да, то найдите ее первый член и разность.

4.76*. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (a_n) , если:

а) $a_4 + a_8 = 30$ и $a_7 + a_{10} = 60$;

б) $a_{24} - a_{19} = 12$ и $a_{16} = 18$;

в) $a_3 + a_{19} = 46$ и $a_{20} - 2a_3 = 27$.

4.77*. Найдите восьмой член арифметической прогрессии (a_n) , если известно, что $a_{13} + a_{14} + a_{15} = 15$ и $a_{12}a_{14} = -210$.

4.78*. В арифметической прогрессии $a_2 = -1$, $a_4 + a_6 = -20$, $a_n = -22$. Найдите n .

4.79*. В арифметической прогрессии

$$a_1 + a_4 + a_7 + a_{10} + a_{13} + a_{16} = 147. \text{ Найдите } a_1 + a_6 + a_{11} + a_{16}.$$

4.80*. Арифметические прогрессии (a_n) и (c_n) заданы формулами своих n -х членов $a_n = 43 - 2n$ и $c_n = 3n - 67$. Есть ли в этих прогрессиях равные члены с одинаковыми номерами?

4.81*. Дана арифметическая прогрессия (a_n) . Определите, является ли арифметической прогрессией последовательность:

а) $a_2; a_4; a_6; \dots$;

б) $a_1 + 5; a_2 + 5; a_3 + 5; \dots$;

в) $3a_1; 3a_2; 3a_3; \dots$;

г) $a_1^2; a_2^2; a_3^2; \dots$.

4.82*. В арифметической прогрессии $a_4 = 7$. При каком значении разности прогрессии значение суммы $a_1 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_3$ будет наименьшим?



4.83. Данная последовательность является арифметической прогрессией, определите разность прогрессии и найдите следующие три ее члена:

а) $-10; -5; 0; 5; \dots$;

б) $9,2; 8,2; 7,2; 6,2; \dots$;

в) $-2; -2; -2; -2; \dots$;

г) $5\sqrt{2}; 3\sqrt{2}; \sqrt{2}; -\sqrt{2}; \dots$.

4.84. Разность арифметической прогрессии (a_n) равна 3. Найдите первый член прогрессии, если:

а) $a_2 = 7$; б) $a_2 = -1$; в) $a_2 = 4,5$; г) $a_2 = -1\frac{2}{7}$.

4.85. Для арифметической прогрессии (a_n) выразите a_{18} через:

а) a_1 и d ; б) a_{17} и d ; в) a_{29} и d ; г) a_3 и d .

4.86. В арифметической прогрессии (a_n) известны первый член a_1 и разность d . Запишите формулу n -го члена этой прогрессии и найдите a_6 , a_{12} и a_{51} , если:

а) $a_1 = 3$, $d = -2$; б) $a_1 = -7$, $d = 8$;
в) $a_1 = 4$, $d = 0,25$; г) $a_1 = -\sqrt{2}$, $d = -5\sqrt{2}$.

4.87. Для арифметической прогрессии (a_n) известно, что $a_2 = 6$; $a_3 = -1$. Найдите разность прогрессии и десятый член этой прогрессии. Какой формулой вы воспользовались?

4.88. Последовательность (c_n) — арифметическая прогрессия, $c_1 = 8$; $d = -1,5$. Является ли членом этой прогрессии число:

а) -132 ; б) -37 ?

4.89. Турист планирует взять напрокат автомобиль. Стоимость проката включает оплату за первые сутки (100 р.) и оплату за каждые следующие сутки проката (30 р.). Сколько нужно будет заплатить за автомобиль, взятый напрокат на 3 суток; на 5 суток? Сколько суток пользовался автомобилем турист, заплативший за прокат 280 р.? На сколько суток может взять автомобиль напрокат турист, рассчитывающий потратить на это не более 250 р.?

4.90. Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. Найдите первый член этой прогрессии, если $a_{15} = 29$; $d = -3$.

4.91. Используйте формулу n -го члена арифметической прогрессии и найдите разность арифметической прогрессии (x_n) , если известно, что $x_1 = 56,7$; $x_{24} = -12,3$.

4.92. В арифметической прогрессии $a_{13} = 25$; $d = -2$. Найдите a_1 ; a_7 ; a_{25} .

4.93. В арифметической прогрессии $a_{11} = -6,5$; $a_{12} = -7,3$. Найдите a_1 ; d ; a_{13} ; a_{21} .

4.94. В арифметической прогрессии (a_n) известно, что $a_9 = -19$, $a_{17} = 13$. Найдите a_1 ; d ; a_{32} .

4.95. Определите, если возможно, сколько отрицательных членов содержит арифметическая прогрессия $-112; -108; -104; \dots$.

4.96. Найдите первый положительный член арифметической прогрессии (a_n) , если $a_1 = -9,5; d = 0,4$. Определите его номер.

4.97. Между числами $-3\sqrt{5}$ и $9\sqrt{5}$ вставьте шесть таких чисел, чтобы они вместе с данными числами образовали арифметическую прогрессию. Какой номер будет иметь число $9\sqrt{5}$? Чему равна разность этой арифметической прогрессии?

4.98. Найдите пятнадцатый член и разность арифметической прогрессии, если четырнадцатый и шестнадцатый ее члены соответственно равны $-43,6$ и $-28,4$. Каким свойством вы воспользовались?

4.99. Воспользуйтесь характеристическим свойством арифметической прогрессии и найдите, при каком значении переменной значения выражений $9 - 4x; 2x + 5$ и $3x - 1$ будут являться последовательными членами арифметической прогрессии.

4.100*. Докажите, что последовательность $a_n = 5n - 1$ является арифметической прогрессией.

4.101*. Проанализируйте условие и найдите первый член и разность арифметической прогрессии (a_n) , если:

а) $a_4 + a_{13} = 47$ и $a_9 + a_{15} = 68$;

б) $a_2 + a_6 = 42$ и $a_{10} - a_4 = 54$.

4.102*. В арифметической прогрессии третий и десятый члены соответственно равны 12 и -2 . Найдите сумму второго и одиннадцатого членов прогрессии.

4.103*. Дана арифметическая прогрессия (a_n) . Определите, является ли арифметической прогрессией последовательность $-a_1; -a_3; -a_5; \dots$.



4.104. Вычислите: $(3\sqrt{2} + 2)^2 + (6 - \sqrt{2})^2$.

4.105. Найдите значение выражения

$$\text{НОК}(16; 24; 48) + \text{НОД}(48; 49).$$

4.106. На рисунке 93 изображен график функции $y = f(x)$. Постройте график функции:

- а) $y = f(x - 1)$;
 б) $y = f(x + 2)$;
 в) $y = f(x) - 2$;
 г) $y = f(x) + 3$.

4.107. Решите неравенство методом интервалов:

- а) $(x - 1)(x^2 - 6x + 9)(5 - x) \geq 0$;
 б) $\frac{(x^2 - 4)(x + 5)}{x^2 + 4x + 4} \leq 0$.

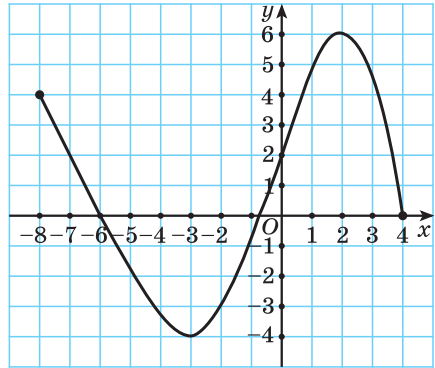


Рис. 93

§ 16. Формула суммы n первых членов арифметической прогрессии



4.108. Выразите n из формулы суммы углов n -угольника $S = (n - 2) \cdot 180^\circ$.

4.109. По формуле числа всех диагоналей n -угольника найдите число диагоналей 20-угольника.

4.110. Найдите сумму рациональным способом:

$$2 + 0,34 - 1,246 + 0,66 - 2,754.$$



Рассмотрим задачу. Двое друзей решили улучшить знание английского языка и каждый день учить на 3 новых слова больше, чем в предыдущий. Сколько слов выучит каждый из друзей за 10 дней, если они начнут с одного слова?

Для решения этой задачи нужно найти сумму десяти первых членов арифметической прогрессии (a_n) , у которой $a_1 = 1$, $d = 3$.

Возникает вопрос: как найти эту сумму, не вычисляя всех десяти членов прогрессии?

В общем виде эта задача приводит к необходимости вывода формулы суммы n первых членов арифметической прогрессии: $a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Для того чтобы вывести эту формулу, докажем свойство: суммы двух членов конечной арифметической прогрессии, равноудаленных от ее концов,

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$$