

4.106. На рисунке 93 изображен график функции $y = f(x)$. Постройте график функции:

- а) $y = f(x - 1)$;
 б) $y = f(x + 2)$;
 в) $y = f(x) - 2$;
 г) $y = f(x) + 3$.

4.107. Решите неравенство методом интервалов:

- а) $(x - 1)(x^2 - 6x + 9)(5 - x) \geq 0$;
 б) $\frac{(x^2 - 4)(x + 5)}{x^2 + 4x + 4} \leq 0$.

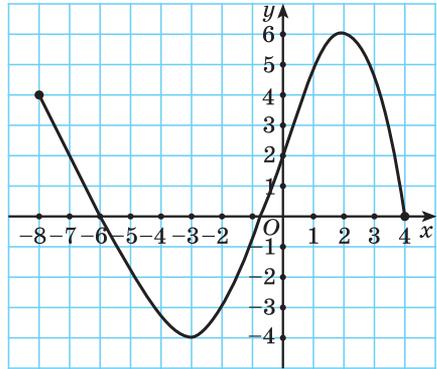


Рис. 93

§ 16. Формула суммы n первых членов арифметической прогрессии



4.108. Выразите n из формулы суммы углов n -угольника $S = (n - 2) \cdot 180^\circ$.

4.109. По формуле числа всех диагоналей n -угольника найдите число диагоналей 20-угольника.

4.110. Найдите сумму рациональным способом:

$$2 + 0,34 - 1,246 + 0,66 - 2,754.$$



Рассмотрим задачу. Двое друзей решили улучшить знание английского языка и каждый день учить на 3 новых слова больше, чем в предыдущий. Сколько слов выучит каждый из друзей за 10 дней, если они начнут с одного слова?

Для решения этой задачи нужно найти сумму десяти первых членов арифметической прогрессии (a_n) , у которой $a_1 = 1$, $d = 3$.

Возникает вопрос: как найти эту сумму, не вычисляя всех десяти членов прогрессии?

В общем виде эта задача приводит к необходимости вывода формулы суммы n первых членов арифметической прогрессии: $a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Для того чтобы вывести эту формулу, докажем свойство: суммы двух членов конечной арифметической прогрессии, равноудаленных от ее концов,

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$$

равны между собой и равны сумме первого и последнего ее членов, т. е. $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots$.

В общем виде: $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$.

Доказательство. Преобразуем слагаемые в левой части равенства, воспользовавшись формулой n -го члена: $a_k = a_1 + (k-1)d$; $a_{n-k+1} = a_1 + (n-k)d$. Тогда получим:

$$\begin{aligned} a_k + a_{n-k+1} &= a_1 + (k-1)d + a_1 + (n-k)d = \\ &= a_1 + dk - d + a_1 + dn - dk = a_1 + a_1 + d(n-1) = a_1 + a_n. \end{aligned}$$

С помощью доказанного свойства найдем, например, сумму всех натуральных чисел от 1 до 50.

Натуральные числа от 1 до 50 составляют арифметическую прогрессию 1; 2; 3; ...; 50. Первый член этой прогрессии равен 1, последний равен 50. Всего в этой прогрессии 50 членов.

Поскольку $a_1 + a_{50} = 1 + 50 = 51$, то и $a_2 + a_{49} = a_1 + a_{50} = 51$, и $a_3 + a_{48} = a_1 + a_{50} = 51$, и $a_4 + a_{47} = 51$, ..., $a_{25} + a_{26} = 51$ (рис. 94), то искомая сумма равна $51 \cdot 25 = 1275$.

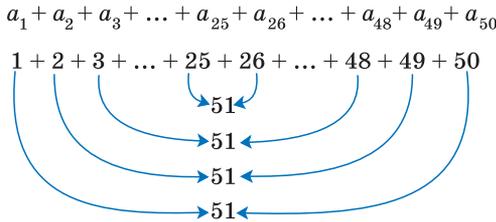


Рис. 94

Всего 25 пар

Выведем формулу суммы n первых членов арифметической прогрессии.

Обозначим $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ через S_n и запишем эту сумму дважды: с первого члена до n -го и с n -го члена до первого:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n, \\ S_n &= a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1. \end{aligned}$$

Сложим эти два равенства и получим:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

По свойству $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$ заменим каждую сумму в скобках на $a_1 + a_n$.



К. Ф. Гаусс

Число всех таких пар сумм равно n , значит, удвоенная искомая сумма равна: $2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$, т. е. $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ — **формула суммы n первых членов арифметической прогрессии.**

Идея такого доказательства принадлежит выдающемуся немецкому математику К. Гауссу (1777—1855).

Формулу суммы n первых членов арифметической прогрессии можно записать и в другом виде. Для этого по формуле n -го члена арифметической прогрессии выразим a_n через a_1 и d и получим: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$.



Если известен первый член прогрессии и разность, то удобно использовать формулу $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$.

Применим эту формулу к задаче о количестве выученных иностранных слов и получим: $S_{10} = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot (10-1)}{2} \cdot 10$, $S_{10} = 29 \cdot 5 = 145$. Каждый из друзей выучил по 145 новых слов.

Пример 1. Найдите сумму пятидесяти первых членов арифметической прогрессии 3; 7; 11; 15;

Решение. В этой прогрессии первый член равен 3, а разность $d = 7 - 3 = 4$. Применим формулу суммы

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

для $n = 50$ и получим:

$$S_{50} = \frac{2 \cdot 3 + 4(50-1)}{2} \cdot 50 = 5050.$$

Ответ: 5050.

Пример 2. В арифметической прогрессии $a_1 = -2$, $a_{85} = 44$. Найдите сумму 85 первых членов арифметической прогрессии.

Решение. Применим формулу суммы $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ и получим: $S_{85} = \frac{a_1 + a_{85}}{2} \cdot 85$; $S_{85} = \frac{-2 + 44}{2} \cdot 85 = 21 \cdot 85 = 1785$.

Ответ: 1785.

Формулы суммы n первых членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$



Формулы суммы n первых членов арифметической прогрессии

1. Найдите сумму шести первых членов арифметической прогрессии, если ее первый член равен -2 , а разность прогрессии равна $0,4$.

Воспользуемся формулой

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n,$$

так как $a_1 = -2$; $d = 0,4$, то

$$\begin{aligned} S_6 &= \frac{2 \cdot (-2) + (6-1) \cdot 0,4}{2} \cdot 6 = \\ &= \frac{-4+2}{2} \cdot 6 = -1 \cdot 6 = -6. \end{aligned}$$

2. Найдите сумму $4 + 7 + 10 + \dots + 100$, если ее слагаемые — последовательные члены арифметической прогрессии.

Последовательность $4, 7, 10, \dots, 100$ является арифметической прогрессией, в которой $a_1 = 4$; $d = 3$; $a_n = 100$.

По формуле n -го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n-1)$ найдем количество членов этой прогрессии:

$$100 = 4 + 3(n-1); \quad 96 = 3(n-1);$$

$$n-1 = 32; \quad n = 33.$$

Воспользуемся формулой суммы n первых членов арифметической прогрессии $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ и найдем искомую сумму:

$$\begin{aligned} S_{33} &= \frac{a_1 + a_{33}}{2} \cdot 33 = \frac{4 + 100}{2} \cdot 33 = \\ &= 52 \cdot 33 = 1716. \end{aligned}$$

3. Найдите количество членов арифметической прогрессии, зная, что их сумма равна 430 , первый член прогрессии равен -7 , а разность прогрессии равна 3 .

Воспользуемся формулой суммы n первых членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n. \quad \text{Так как } S_n = 430;$$

$a_1 = -7$; $d = 3$, то составим и решим уравнение:

$$430 = \frac{2 \cdot (-7) + (n-1) \cdot 3}{2} \cdot n;$$

$$430 = \frac{-14 + 3n - 3}{2} \cdot n; \quad 430 = \frac{-17 + 3n}{2} \cdot n;$$

$$860 = (3n - 17) \cdot n; \quad 3n^2 - 17n - 860 = 0;$$

$$D = 17^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-860) = 289 + 10320 =$$

$$= 10609 = 103^2;$$

$$n_{1,2} = \frac{17 \pm 103}{2 \cdot 3}; \quad n_1 = 20; \quad n_2 = -\frac{86}{6}.$$

Так как n — натуральное число, то $n = 20$.

<p>4. В арифметической прогрессии $a_5 = 18$, $a_{10} = 13$. Найдите сумму членов этой прогрессии с четвертого по семнадцатый включительно.</p>	<p>Найдем a_1 и d. Поскольку $a_5 = a_1 + 4d$; $a_{10} = a_1 + 9d$, то составим систему уравнений $\begin{cases} a_1 + 4d = 18, \\ a_1 + 9d = 13. \end{cases}$ Решим полученную систему способом сложения:</p> $\begin{cases} -a_1 - 4d = -18, \\ a_1 + 9d = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5d = -5, \\ a_1 + 9d = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} d = -1, \\ a_1 + 9 \cdot (-1) = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -1, \\ a_1 = 22. \end{cases}$ <p>Тогда $a_4 = 22 + 3 \cdot (-1) = 19$;</p> $a_{17} = 22 + 16 \cdot (-1) = 6.$ <p>Примем четвертый член данной прогрессии за первый член некоторой другой прогрессии, тогда семнадцатый член данной прогрессии станет четырнадцатым ($17 - 4 + 1 = 14$) членом новой прогрессии. Искомая сумма равна: $\frac{19 + 6}{2} \cdot 14 = 175$.</p>
<p>5. Найдите сумму всех четных натуральных чисел, не превосходящих 300, которые при делении на 13 дают в остатке 5.</p>	<p>Первое число в последовательности всех четных натуральных чисел, не превосходящих 300, которые при делении на 13 дают в остатке 5, — это число 18. Каждое следующее число равно предыдущему, сложенному с числом 26. Последнее четное число, которое при делении на 13 дает в остатке 5, — это число 278. Поскольку рассматриваются только четные числа, то разность прогрессии равна 26. Найдем номер числа прогрессии, равного 278: $a_n = a_1 + d(n - 1)$, $278 = 18 + 26(n - 1)$, откуда $n = 11$.</p> $S_{11} = \frac{a_1 + a_{11}}{2} \cdot 11 = \frac{18 + 278}{2} \cdot 11 = 1628.$



1. В арифметической прогрессии (a_n) сумма n первых членов вычисляется по формуле:

а) $S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$;

б) $S_n = a_1 + d \cdot n$;

в) $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$;

г) $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

Выберите правильные ответы.

2. В арифметической прогрессии (a_n) :

- а) S_4 — это четвертый член прогрессии;
- б) S_4 — сумма любых четырех членов прогрессии;
- в) S_4 — сумма четырех первых членов прогрессии.

Выберите правильный ответ.



4.111. В арифметической прогрессии (a_n) найдите:

- а) S_8 , если $a_1 = 4$, $d = -3$;
- б) S_{51} , если $a_1 = -0,2$, $d = 5$;
- в) S_{26} , если $a_1 = \sqrt{3}$, $d = 3\sqrt{3}$.

4.112. Найдите сумму сорока первых членов арифметической прогрессии (c_n) , если:

- а) $c_1 = 6$; $c_{40} = 128$;
- б) $c_1 = -2\sqrt{7}$; $c_{40} = -36\sqrt{7}$.

4.113. В первый день приема документов в университет приемная комиссия приняла документы от 320 человек. В каждый следующий день подавали документы на 100 человек больше, чем в предыдущий. Сколько человек подали документы в университет за пять первых дней?

4.114. В первом ряду концертного зала 24 места, а в каждом следующем ряду на 4 места больше, чем в предыдущем. Всего в концертном зале 25 рядов. На праздничный концерт продано 1710 билетов. На сколько процентов будет заполнен зал?

4.115. Выберите одну из формул суммы членов арифметической прогрессии и найдите сумму одиннадцати первых членов арифметической прогрессии:

- а) -3 ; 6 ; 15 ; ...;
- б) $1,8$; $1,5$; $1,2$; ...;
- в) $3\frac{1}{7}$; $3\frac{3}{7}$; $3\frac{5}{7}$; ...;
- г) $-10\sqrt{2}$; $-2\sqrt{2}$; $6\sqrt{2}$; ...

4.116. Найдите a_n и S_n арифметической прогрессии (a_n) , у которой:

- а) $a_1 = 12$; $d = -6$; $n = 14$;
- б) $a_1 = -25$; $d = 0,5$; $n = 21$.

4.117. Вычислите сумму, если ее слагаемые — последовательные члены арифметической прогрессии:

- а) $1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$;
- б) $5 + 10 + 15 + \dots + 195 + 200 + 205$.

4.118. Составьте план решения и найдите сумму:

- а) ста первых нечетных чисел;
- б) всех четных трехзначных чисел;
- в) всех двузначных чисел, кратных трем.

4.119. Используйте рациональный способ для вычисления суммы всех целых чисел, принадлежащих промежутку:

- а) $(-33; 101]$;
- б) $[-56,2; 44,1]$.

4.120. Во время предпраздничной акции количество проданных подарочных наборов ежедневно увеличивалось на одно и то же число. В первый день акции было продано 25 наборов, а в последний — 160. Найдите, сколько дней длилась акция, если известно, что всего за период акции было продано 925 подарочных наборов.

4.121. Арифметическая прогрессия задана формулой $a_n = 5n - 3$. Найдите:

- а) S_8 ;
- б) S_{21} ;
- в) S_n .

4.122. Найдите последний член и разность арифметической прогрессии, состоящей из n членов, у которой:

- а) $a_1 = 15$; $n = 14$; $S_{14} = 1407$;

- б) $a_1 = -\frac{1}{3}$; $n = 10$; $S_{10} = 88\frac{1}{6}$.

4.123. Используйте формулу суммы членов арифметической прогрессии и найдите разность арифметической прогрессии, первый член которой равен 5,5, а сумма шестнадцати первых членов равна 328.

4.124. Найдите первый член арифметической прогрессии, разность которой равна 10, а сумма десяти первых членов равна -120 .

4.125. Сколько нужно взять последовательных натуральных чисел, начиная с 5, чтобы их сумма была равна 221?

4.126. Для арифметической прогрессии (a_n) известно, что $d = -7$ и $a_{16} = -9$. Найдите a_{20} и S_{20} .

4.127. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (y_n) , если известно, что:

- а) $y_{10} = 40$, $S_{10} = 175$;

- б) $y_7 = -27$, $S_7 = -210$;

- в) $y_{15} = 47$, $S_{30} = 1500$.

4.128. Для арифметической прогрессии (a_n) известно, что $a_1 = 3$, $d = 5$. Найдите сумму всех членов этой прогрессии:

а) с 15-го по 30-й включительно;

б) с 10-го по 24-й включительно.

Выполните задание разными способами.

4.129. Найдите сумму пятнадцати первых членов арифметической прогрессии (c_n) , если известно, что:

а) $c_5 = 4$, $c_{10} = -6$; б) $c_8 = -1,7$, $c_{13} = 2,3$.

4.130. Вычислите сумму всех:

а) положительных членов арифметической прогрессии $5\frac{1}{3}$; $4\frac{2}{3}$; ...;

б) отрицательных членов арифметической прогрессии $-98,5$; $-92,5$;

4.131. Сколько нужно взять последовательных натуральных чисел, кратных 3, чтобы их сумма была больше 165?

4.132. Найдите сумму двадцати пяти первых членов арифметической прогрессии (a_n) , если $a_{10} = 17$, $d = 3$.

4.133. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 4 и не больших 248.

4.134. Назовите первое и последнее трехзначное число, кратное 9. Найдите сумму всех трехзначных чисел, кратных 9.

4.135. Запишите формулу натурального числа, которое при делении на 7 дает в остатке 3. Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 153, которые при делении на 7 дают в остатке 3.

4.136. В арифметической прогрессии (a_n) известно, что $a_1 = -3$, $d = 5$. Найдите $S_{21} - S_{20}$.

4.137. Первый член арифметической прогрессии равен -12 , а разность прогрессии равна 6. Сколько надо взять первых последовательных членов этой прогрессии, чтобы их сумма была равна 528?

4.138. Найдите сумму тридцати шести первых членов арифметической прогрессии, если ее разность равна 2, а пятый член прогрессии в 4 раза меньше второго члена.

4.139*. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, если $S_6 = 39$ и $S_{14} = -77$.

4.140*. Сумма членов арифметической прогрессии с третьего по тринадцатый равна 55, $a_n = 5$. Найдите n .

4.141*. Сумма 40 первых членов арифметической прогрессии равна 340, а сумма 39 первых ее членов равна 325. Найдите разность прогрессии.

4.142*. Найдите сумму двадцати первых членов арифметической прогрессии (a_n) , если $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 18$.

4.143*. Сумма пятнадцати первых членов арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, больше 333, но меньше 396. Найдите восьмой член этой прогрессии, если известно, что он кратен четырем.



4.144. В арифметической прогрессии (a_n) найдите:

а) S_{11} , если $a_1 = -2$, $d = 5$; б) S_{24} , если $a_1 = -2,5$; $d = -0,5$;

в) S_{31} , если $a_1 = \sqrt{2}$, $d = 4\sqrt{2}$.

4.145. Определите необходимые компоненты формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии и найдите сумму шестнадцати первых членов арифметической прогрессии:

а) 1; 11; 21; ...;

б) 2,3; 1,8; 1,3; ...;

в) $5\frac{2}{9}$; $6\frac{2}{9}$; $7\frac{2}{9}$; ...;

г) $7\sqrt{5}$; $3\sqrt{5}$; $-\sqrt{5}$; ...

4.146. Ученик взял в библиотеке книгу и в первый день прочитал 30 страниц. Книга настолько увлекла его, что в каждый следующий день он читал на 10 страниц больше, чем в предыдущий. Успеет ли ученик прочитать книгу за 7 дней, если в ней 490 страниц?

4.147. Найдите сумму двадцати пяти первых членов арифметической прогрессии (x_n) , если $x_1 = -2,8$; $x_{25} = 12,6$.

4.148. Найдите a_n и воспользуйтесь полученным результатом, чтобы найти S_n арифметической прогрессии, у которой $a_1 = 1\frac{1}{3}$; $d = -\frac{2}{3}$; $n = 16$.

4.149. Какой формулой можно воспользоваться, чтобы найти сумму, если ее слагаемые — последовательные члены арифметической прогрессии:

а) $2 + 4 + 6 + \dots + 96 + 98 + 100$;

б) $12 + 16 + 20 + \dots + 88 + 92 + 96$?

Найдите эту сумму.

4.150. Выполните анализ условия и найдите сумму всех:

- а) двузначных чисел;
- б) трехзначных чисел, кратных пяти.

4.151. Арифметическая прогрессия задана формулой $a_n = 4n + 5$. Какие члены этой прогрессии нужно найти, чтобы вычислить:

- а) S_{10} ;
- б) S_{35} ?

Вычислите эти суммы.

4.152. Используйте формулы арифметической прогрессии и найдите последний член и разность арифметической прогрессии, у которой $a_1 = 3$; $n = 20$; $S_{20} = 820$.

4.153. Найдите первый член арифметической прогрессии, разность которой равна -8 , а сумма двенадцати первых членов равна 96 .

4.154. Для арифметической прогрессии (a_n) известно, что $d = 3$ и $a_{11} = 6$. Найдите a_{15} и S_{15} .

4.155. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (x_n) , если известно, что $x_9 = 20$, $S_9 = 123$.

4.156. Найдите сумму всех членов арифметической прогрессии (a_n) с 10-го по 25-й включительно, если известно, что $a_1 = -2$, $d = 7$.

4.157. В арифметической прогрессии (c_n) известно, что $c_3 = 12$, $c_{17} = 54$. Найдите S_{20} .

4.158. Найдите сумму всех положительных членов арифметической прогрессии $8,4; 7,2; \dots$.

4.159. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 6 и не больших 162 .

4.160. Запишите формулу натурального числа, которое при делении на 8 дает в остатке 1 . Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 225 , которые при делении на 8 дают в остатке 1 .

4.161*. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, если $S_4 = 60$ и $S_9 = 225$.

4.162*. Арифметическая прогрессия содержит 8 членов. Сумма членов, стоящих на четных местах, равна 28 , а сумма членов, стоящих на нечетных местах, равна 16 . Найдите первый член прогрессии.



4.163. Найдите значение выражения

$$\sqrt{1\frac{9}{16} \cdot 0,81 - 1\frac{9}{16} \cdot 0,17}.$$

4.164. Упростите выражение $a - \frac{a^2 - 5a}{a + 1} \cdot \frac{1}{a - 5}$.

4.165. Решите уравнение $\frac{x}{x^2 - 16} + \frac{x + 3}{x + 4} = 0$.

4.166. Имеющегося сырья хватит первому цеху на 12 дней работы или второму цеху на 24 дня работы. Хватит ли этого сырья на 9 дней их совместной работы?

4.167. Решите систему неравенств $\begin{cases} 7x > x^2, \\ 16x^2 < 9. \end{cases}$

4.168. Найдите координаты точки, симметричной точке $A(-3; 5)$ относительно оси симметрии параболы

$$y = 2x^2 - 8x + 1.$$

§ 17. Геометрическая прогрессия



4.169. Решите уравнение:

а) $x^2 = 16$; б) $x^2 = 2,25$; в) $x^2 = -0,25$.

4.170. Вычислите $g(4)$; $g(0)$; $g(-2)$, если $g(x) = 3^x$.

4.171. Найдите значение выражения $2^{-3} \cdot 0,5^{-2} : 0,125^{-1}$.

4.172. Найдите новую цену товара, если его первоначальная цена в 25 р. увеличилась на 20 %.

4.173. Найдите среднее геометрическое чисел:

а) 8 и 32; б) 12 и 5.



Рассмотрим задачу. Вкладчик положил в банк 1000 р. на депозит, по которому сумма вклада увеличивается ежегодно на 5 %. Какая сумма будет у него через 1 год, 2 года, 6 лет?

Решение. Начальная сумма в 1000 р. через год увеличится на 5 % и составит 105 % от 1000 р. Найдем 105 % = 1,05 от 1000 р.: $1000 \cdot 1,05 = 1050$ (р.).

Через два года сумма вклада станет равной $1000 \cdot 1,05 \cdot 1,05 = 1000 \cdot 1,05^2$ (р.), через три года — $1000 \cdot 1,05^3$ (р.) и т. д. Получим числовую последовательность: $1000 \cdot 1,05$; $1000 \cdot 1,05^2$; $1000 \cdot 1,05^3$; ...

Через шесть лет сумма будет равна $1000 \cdot 1,05^6$ (р.).