

## § 18. Формула суммы $n$ первых членов геометрической прогрессии



4.234. Найдите значение выражения:

а)  $(2^{-1} + 3^{-1})^{-1}$ ;      б)  $2^4 \cdot 16 : (-8)^3$ .

4.235. Решите уравнение  $(x - 6)(x^2 - 3) = x - 6$ .



Немало легенд связано с геометрической прогрессией. Наиболее известная из них рассказывает об изобретателе шахмат.

По легенде, когда создатель шахмат показал свое изобретение правителю страны, тому так понравилась игра, что он дал изобретателю право самому выбрать награду. Мудрец попросил у правителя за первую клетку шахматной доски заплатить ему одно зерно пшеницы, за вторую — два, за третью — четыре и т. д., удваивая количество зерен на каждой следующей клетке (рис. 96).



Рис. 96

Правитель быстро согласился и приказал казначею выдать мудрецу нужное количество зерна. Однако когда казначей показал расчеты, то оказалось, что расплатиться невозможно, разве только осушить моря и океаны и засеять все пшеницей.

Число зерен, которое попросил мудрец, равно сумме членов геометрической прогрессии  $1; 2; 2^2; 2^3; \dots; 2^{63}$ , т. е.  $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63}$ .

Выведем формулу, по которой можно находить сумму  $n$  первых членов геометрической прогрессии.

Обозначим сумму  $n$  первых членов геометрической прогрессии  $(b_n)$  через  $S_n$ , тогда:

$$S_n = b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \dots + b_1 \cdot q^{n-1}.$$

Умножим обе части этого равенства на знаменатель прогрессии  $q$  и получим:

$$S_n \cdot q = b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + b_1 \cdot q^3 + \dots + b_1 \cdot q^n.$$

Вычтем из второго равенства первое и получим:

$$\begin{array}{r} S_n \cdot q = b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + b_1 \cdot q^3 + \dots + b_1 \cdot q^n \\ - \\ S_n = b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \dots + b_1 \cdot q^{n-1} \\ \hline S_n \cdot q - S_n = b_1 \cdot q^n - b_1, \end{array}$$

т. е.  $S_n \cdot (q - 1) = b_1(q^n - 1)$ . Выразим из этого равенства  $S_n$  при  $q \neq 1$  и получим формулу суммы  $n$  первых членов геометрической прогрессии  $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$ .

Если  $q = 1$ , то все члены прогрессии равны первому члену, и сумму  $n$  первых членов такой геометрической прогрессии можно найти по формуле  $S_n = nb_1$ .

**Формула суммы  $n$  первых членов геометрической прогрессии**

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Вычислим по формуле суммы  $n$  первых членов геометрической прогрессии число зерен, которое запросил в награду мудрец, т. е. сумму

$$S_{64} = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63}.$$

Первый член геометрической прогрессии  $b_1 = 1$ , знаменатель  $q = 2$ , количество членов прогрессии равно 64.

$$\text{Тогда } S_{64} = \frac{1 \cdot (2^{64} - 1)}{2 - 1} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

Такого количества пшеницы человечество не собрало за всю свою историю.

*Пример 1.* Найдите сумму десяти первых членов геометрической прогрессии ( $b_n$ ), в которой  $b_1 = 0,5$ ,  $q = 2$ .

*Решение.* Применим формулу суммы  $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$  для  $n = 10$ , получим  $S_{10} = \frac{b_1(q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{0,5(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 0,5 \cdot (1024 - 1) = 0,5 \cdot 1023 = 511,5$ .

*Ответ:* 511,5.

*Пример 2.* Найдите сумму двенадцати первых членов геометрической прогрессии 3; -6; 12; -24; ... .

*Решение.* Подставим в формулу  $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$  значения  $b_1 = 3$ ,

$$q = -2, n = 12: S_{12} = \frac{3 \cdot ((-2)^{12} - 1)}{-2 - 1} = \frac{3 \cdot (2^{12} - 1)}{-3} = -(2^{12} - 1) = -4095.$$

*Ответ:*  $-4095$ .



### Формула суммы $n$ первых членов геометрической прогрессии

1. Найдите сумму пяти первых членов геометрической прогрессии  $(b_n)$ , если  $b_2 = -1$ ,  $b_3 = -\frac{1}{2}$ .

Найдем знаменатель и первый член геометрической прогрессии:

$$q = \frac{b_3}{b_2} = \left(-\frac{1}{2}\right) : (-1) = \frac{1}{2}, \text{ тогда}$$

$$b_1 = \frac{b_2}{q} = (-1) : \frac{1}{2} = -2.$$

По формуле  $S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$  найдем

$$\begin{aligned} S_5 &= \frac{-2 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{-2 \cdot \left(\frac{1}{32} - 1\right)}{-\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{-2 \cdot \frac{31}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{-62}{32} : \frac{1}{2} = \frac{-62}{16} = -3\frac{7}{8}. \end{aligned}$$

2. Сумма членов геометрической прогрессии равна 605. Найдите количество членов прогрессии, если  $b_1 = 5$ ,  $q = 3$ .

Подставим в формулу  $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$  значения  $S_n = 605$ ,  $b_1 = 5$ ,  $q = 3$  и найдем  $n$ :

$$605 = \frac{5(3^n - 1)}{3 - 1}; \quad 5(3^n - 1) = 605 \cdot 2;$$

$$3^n - 1 = 242; \quad 3^n = 243; \quad 3^n = 3^5; \quad n = 5.$$

3. В геометрической прогрессии  $(b_n)$  известно, что  $b_5 = 6$ ;  $b_6 = -36$ .  
Найдите  $S_3$ .

Найдем знаменатель прогрессии:

$$q = b_6 : b_5 = -36 : 6 = -6.$$

Подставим в формулу  $n$ -го члена геометрической прогрессии  $b_5 = 6$  и  $q = -6$  и найдем первый член прогрессии:

$$b_5 = b_1 \cdot q^4; \quad 6 = b_1 \cdot (-6)^4; \quad b_1 = \frac{1}{216}.$$

	<p>По формуле <math>S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}</math> найдем сумму трех первых членов геометрической прогрессии: <math>S_3 = \frac{1}{216} \frac{((-6)^3 - 1)}{-6 - 1} = \frac{31}{216}</math>.</p>
<p>4. В геометрической прогрессии (<math>b_n</math>) известно, что <math>b_3 = 16</math>, <math>q = 2</math>, <math>b_n = 64</math>. Найдите сумму <math>n</math> первых членов этой прогрессии.</p>	<p>Зная, что третий член геометрической прогрессии равен 16, а ее знаменатель равен 2, по формуле <math>b_3 = b_1 \cdot q^2</math> найдем первый член прогрессии: <math>16 = b_1 \cdot 2^2</math>; <math>b_1 = 4</math>. Воспользуемся формулой <math>n</math>-го члена геометрической прогрессии <math>b_n = b_1 \cdot q^{n-1}</math> и найдем <math>n</math>: <math>64 = 4 \cdot 2^{n-1}</math>; <math>2^{n-1} = 16</math>; <math>2^{n-1} = 2^4</math>; <math>n - 1 = 4</math>; <math>n = 5</math>. По формуле суммы <math>n</math> первых членов геометрической прогрессии найдем <math>S_5</math>: <math>S_5 = \frac{4 \cdot (2^5 - 1)}{2 - 1} = 124</math>.</p>



1. В геометрической прогрессии ( $b_n$ ) сумма  $n$  первых членов вычисляется по формуле:

а)  $S_n = b_1 \cdot 2q^n$ ;

б)  $S_n = b_1 \cdot q^n$ ;

в)  $S_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ ;

г)  $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$ .

Выберите правильный ответ.

2. В геометрической прогрессии ( $b_n$ ) известно, что  $b_1 = -12$ ,  $q = 5$ . Верно ли, что сумма  $n$  первых членов данной прогрессии при любом  $n$  является отрицательным числом?



4.236. Найдите сумму 99 первых членов геометрической прогрессии 7; -7; 7; -7; ... .

4.237. Найдите сумму шести первых членов геометрической прогрессии:

а) 5; 10; 20; ...;

б) 9; 3; 1; ...;

в)  $\frac{1}{2}$ ; -1; 2; ...;

г) 3;  $3\sqrt{3}$ ; 9; ... .

4.238. В геометрической прогрессии ( $b_n$ ) найдите:

а)  $S_5$ , если  $b_1 = 1$ ,  $q = 5$ ;

б)  $S_8$ , если  $b_1 = -4$ ,  $q = -0,5$ ;

в)  $S_{10}$ , если  $b_1 = -2$ ,  $q = \sqrt{2}$ .

**4.239.** Предприятие в течение полугода проводило модернизацию производства, в результате чего расходы на выпуск единицы продукции снижались ежемесячно на 10 % по сравнению с предыдущим месяцем. Определите, сколько средств удалось сэкономить предприятию за шесть месяцев, если до модернизации расходы на выпуск единицы продукции составляли 100 р. и ежемесячно предприятие выпускает 500 единиц продукции.

**4.240.** Предприниматель запланировал в течение месяца ежедневно откладывать деньги. Причем в первый день он планирует отложить 1 к., во второй — 2 к., в третий — 4 к., в четвертый — 8 к. и т. д. Сможет ли он реализовать свой план, если его ежемесячный заработок составляет 1200 р.?

**4.241.** Известен шестнадцатый член геометрической прогрессии и знаменатель прогрессии, не равный 1. Составьте план вычисления суммы 9 первых членов этой прогрессии.

**4.242.** Найдите сумму восьми первых членов геометрической прогрессии  $(x_n)$ , если известно, что  $x_3 = \frac{3}{32}$ ;  $q = \frac{1}{2}$ .

**4.243.** Найдите сумму пяти первых членов геометрической прогрессии  $(b_n)$ , если  $b_1 = 9$ ;  $b_5 = \frac{16}{9}$ . Сколько решений имеет задача?

**4.244.** Известны девятый и шестой члены геометрической прогрессии со знаменателем, не равным 1. Составьте план вычисления суммы 10 первых членов этой прогрессии.

**4.245.** В геометрической прогрессии  $(b_n)$  найдите  $S_6$ , если известно, что:

а)  $b_4 = 216$ ;  $b_5 = -648$ ;

б)  $b_2 = 25$ ;  $b_5 = 125\sqrt{5}$ ;

в)  $b_3 = -12$ ;  $b_5 = -48$ .

**4.246.** Найдите  $b_n$  и  $S_n$  для геометрической прогрессии, у которой:

а)  $b_1 = 0,1$ ;  $q = 10$ ;  $n = 6$ ;

б)  $b_1 = -3$ ;  $q = \sqrt{3}$ ;  $n = 8$ .

**4.247.** Сумма четырех первых членов геометрической прогрессии равна 65. Найдите первый член прогрессии, если ее знаменатель равен  $\frac{2}{3}$ .

**4.248.** Сумма членов геометрической прогрессии равна  $-85$ . Найдите количество членов прогрессии, если  $b_1 = 1$ ,  $q = -2$ .

**4.249.** Найдите сумму, зная, что ее слагаемые — последовательные члены геометрической прогрессии:

а)  $1 + 2 + 4 + \dots + 256$ ;      б)  $1 - 3 + 9 - \dots + 729$ .

**4.250.** Геометрическая прогрессия задана формулой:

а)  $b_n = 2 \cdot 3^n$ ; найдите  $S_6$ ;      б)  $b_n = \frac{3}{8} \cdot 2^{n-1}$ ; найдите  $S_9$ .

**4.251.** Разность четвертого и третьего членов геометрической прогрессии равна  $24$ , а разность третьего и второго членов равна  $12$ . Найдите сумму пяти первых членов этой прогрессии.

**4.252\*.** Найдите количество членов геометрической прогрессии, в которой  $q = -\frac{1}{3}$ ,  $b_n = \frac{1}{9}$ ,  $S_n = 6\frac{7}{9}$ .

**4.253\*.** В геометрической прогрессии  $(c_n)$  с положительными членами сумма четырех первых членов равна  $255$  и  $c_1 + c_3 = 51$ . Найдите  $q$ .

**4.254\*.** В геометрической прогрессии  $S_7 = 14$ ,  $S_{14} = 18$ . Найдите сумму членов этой прогрессии с 15-го по 21-й включительно.

**4.255\*.** Выведите формулу произведения  $n$  первых членов геометрической прогрессии.

**4.256\*.** Найдите сумму квадратов шести первых членов геометрической прогрессии, первый член которой равен  $5\sqrt{2}$ , а знаменатель равен  $\sqrt{2}$ .

**4.257\*.** Сумма трех положительных чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна  $21$ . Если к ним соответственно прибавить  $2$ ,  $3$  и  $9$ , то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

**4.258\*.** Найдите сумму четырех положительных чисел, из которых первые три составляют арифметическую прогрессию, а последние три — геометрическую прогрессию. Сумма трех первых чисел равна  $12$ , а сумма трех последних —  $19$ .

**4.259\*.** Найдите четыре целых числа, из которых первые три являются последовательными членами геометрической прогрессии, а последние три — последовательными членами арифметической прогрессии, если сумма крайних чисел равна  $21$ , а сумма средних чисел равна  $18$ .



4.260. В геометрической прогрессии  $(b_n)$  найдите:

а)  $S_8$ , если  $b_1 = 9$ ,  $q = 2$ ;      б)  $S_5$ , если  $b_1 = 81$ ,  $q = -\frac{1}{3}$ .

4.261. Найдите сумму восьми первых членов геометрической прогрессии:

а) 7; 14; 28; ...;      б) -3; 3; -3; ...;      в) 5;  $5\sqrt{5}$ ; 25; ... .

4.262. На предприятии планируют благодаря эффективной рекламной кампании в первый месяц дополнительно реализовать 1000 изделий. Далее предполагается ежемесячное увеличение дополнительной реализации в 1,5 раза. За сколько месяцев предприятие сможет реализовать по этому плану дополнительно 8125 изделий?

4.263. Известен третий член геометрической прогрессии и ее знаменатель. Составьте план нахождения 7 первых членов этой прогрессии. Предложите два способа.

4.264. Найдите сумму шести первых членов геометрической прогрессии  $(c_n)$ , если известно, что  $c_4 = 3$ ;  $q = -3$ .

4.265. В геометрической прогрессии  $(b_n)$  найдите  $S_7$ , если известно, что:

а)  $b_6 = 48,6$ ;  $b_7 = 72,9$ ;      б)  $b_3 = 34$ ;  $b_8 = 1088$ .

4.266. Найдите  $b_n$  и  $S_n$  для геометрической прогрессии, у которой  $b_1 = -1$ ;  $q = -\frac{2}{3}$ ;  $n = 5$ .

4.267. Сумма четырех первых членов геометрической прогрессии равна 62,4. Найдите первый член прогрессии, если ее знаменатель равен 0,2.

4.268. Сумма членов геометрической прогрессии равна 684. Найдите количество членов прогрессии, если ее первый член равен 12, а знаменатель равен 7.

4.269. Найдите сумму  $1 - 2 + 4 - \dots - 128$ , зная, что ее слагаемые — последовательные члены геометрической прогрессии.

4.270. Геометрическая прогрессия задана формулой  $b_n = 5 \cdot 2^{n+1}$ . Найдите  $S_8$ .

4.271\*. Найдите количество членов геометрической прогрессии, в которой  $b_1 = 1$ ,  $b_n = -512$ ,  $S_n = -341$ .

4.272\*. Найдите сумму членов геометрической прогрессии  $(b_n)$  с шестого по десятый включительно, если  $b_1 = \frac{1}{2}$ ,  $q = -2$ .

**4.273\*.** Три положительных числа, дающие в сумме 30, составляют арифметическую прогрессию. Если от первого числа отнять 5, от второго — 4, а третье число оставить без изменения, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.



**4.274.** Сравните дроби:

а)  $\frac{3}{7}$  и  $\frac{11}{13}$ ;      б)  $-\frac{8}{9}$  и  $-\frac{15}{17}$ .

**4.275.** Найдите значение выражения  $a^{-1} + b^{-1}$  при  $a = \frac{1}{3}$  и  $b = -0,25$ .

**4.276.** Необходимо собрать одинаковые комплекты, состоящие из ручек, карандашей и тетрадей. Найдите, какое наибольшее количество комплектов можно собрать из 304 ручек, 190 карандашей и 114 тетрадей, используя при этом все эти предметы.

**4.277.** Решите совокупность неравенств 
$$\begin{cases} x^2 - 6x + 5 > 0, \\ x - 2 \leq 0. \end{cases}$$

**4.278.** За перевод денег с одного счета на другой банк берет 1,5 % от переводимой суммы. Какую наибольшую сумму денег можно перевести, имея на счету ровно 1000 р.?

**4.279.** Решите уравнение  $(3x^2 - x - 4)(3x^2 - x + 2) = 7$ , используя метод замены переменной.

### § 19. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии



**4.280.** Какие из следующих дробей можно записать в виде конечной десятичной дроби:  $\frac{2}{25}$ ;  $\frac{7}{75}$ ;  $\frac{4}{45}$ ;  $\frac{3}{125}$ ;  $\frac{11}{120}$ ?

**4.281.** Найдите значение выражения  $\frac{1}{25} + \frac{1}{3} - \frac{1}{45}$ .

**4.282.** Верно ли, что  $\frac{1}{6} = 0,166... = 0,1(6)$ ?



Любую обыкновенную дробь можно записать в виде десятичной дроби — конечной или бесконечной периодической дроби. Например,  $\frac{2}{50} = 0,04$  — конечная десятичная дробь. Бесконечная периодическая десятичная дробь получа-