4.273*. Три положительных числа, дающие в сумме 30, составляют арифметическую прогрессию. Если от первого числа отнять 5, от второго — 4, а третье число оставить без изменения, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

4.274. Сравните дроби:

а) $\frac{3}{7}$ и $\frac{11}{13}$; б) $-\frac{8}{9}$ и $-\frac{15}{17}$.

4.275. Найдите значение выражения $a^{-1}+b^{-1}$ при $a=\frac{1}{3}$ и $b=-0{,}25$.

4.276. Необходимо собрать одинаковые комплекты, состоящие из ручек, карандашей и тетрадей. Найдите, какое наибольшее количество комплектов можно собрать из 304 ручек, 190 карандашей и 114 тетрадей, используя при этом все эти предметы.

4.277. Решите совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} x^2-6x+5>0, \\ x-2\leqslant 0. \end{array}\right.$

4.278. За перевод денег с одного счета на другой банк берет 1,5 % от переводимой суммы. Какую наибольшую сумму денег можно перевести, имея на счету ровно 1000 р.?

4.279. Решите уравнение $\left(3x^2-x-4\right)\left(3x^2-x+2\right)=7$, используя метод замены переменной.

§ 19. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии

4.280. Какие из следующих дробей можно записать в виде конечной десятичной дроби: $\frac{2}{25}$; $\frac{7}{75}$; $\frac{4}{45}$; $\frac{3}{125}$; $\frac{11}{120}$?

4.281. Найдите значение выражения $\frac{1}{25}+\frac{1}{3}-\frac{1}{45}$.

4.282. Верно ли, что $\frac{1}{6}=0{,}166...=0{,}1(6)$?

Любую обыкновенную дробь можно записать в виде десятичной дроби — конечной или бесконечной периодической дроби. Например, $\frac{2}{50}=0{,}04$ — конечная десятичная дробь. Бесконечная периодическая десятичная дробь получается в случае, когда деление «не заканчивается», например $\frac{2}{3} = 0{,}6666... = 0{,}(6)$, $\frac{6}{11} = 0{,}5454... = 0{,}(54)$.

Вы рассматривали правило записи конечной десятичной дроби в виде обыкновенной дроби (например, $0{,}17 = \frac{17}{100}$, $0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ и т. п.).

Выясним, как бесконечную периодическую десятичную дробь записать в виде обыкновенной дроби.

Рассмотрим, например, бесконечную периодическую десятичную дробь $0{,}(7) = 0{,}7777...$. Определим, какой обыкновенной дроби равно это число.

Запишем дробь 0,(7) в виде суммы разрядных слагаемых:

$$0{,}7777... = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + ... \ .$$

В данном случае необходимо найти сумму бесконечного числа слагаемых.

Слагаемые этой суммы являются членами бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{10} < 1$. Такие геометрические прогрессии называются **бесконечно убывающими геометрическими прогрессиями.**

Определение. Бесконечно убывающей геометрической прогрессией называется такая бесконечная геометрическая прогрессия, у которой знаменатель $|q| < 1$.

Например, геометрическая прогрессия 8; 4; 2; ... является бесконечно убывающей геометрической прогрессий, так как $q = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} < 1$.

Геометрическая прогрессия 9; –3; 1; $-\frac{1}{3}$, ... также является бесконечно убывающей геометрической прогрессией, поскольку $|q| = \left|\frac{-3}{9}\right| = \frac{1}{3} < 1$.

Для того чтобы представить бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной, нужно найти **сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии.** Ее обозначают буквой S и находят по формуле

$$S = \frac{b_1}{1-q}, \ |q| < 1.$$

Покажем идею вывода формулы суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Рассмотрим бесконечную геометрическую прогрессию (b_n), у которой $|q| < 1$. Сумма n первых членов данной прогрессии b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ... вычисляется по формуле $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$. Запишем эту формулу в виде $S_n = \frac{b_1}{1 - q} \cdot (1 - q^n)$.

Представим, что n неограниченно возрастает (говорят, что стремится к бесконечности, и записывают $n \to \infty$). Поскольку $|q| < 1$, то при неограниченном увеличении числа n степень q^n стремится к нулю, а значение разности $1 - q^n$ стремится к единице. Значит, при неограниченном увеличении числа n сумма $S_n = \frac{b_1}{1 - q} \cdot (1 - q^n)$ стремится к числу $\frac{b_1}{1 - q}$, что можно записать в виде $S_n \to \frac{b_1}{1 - q}$ при $n \to \infty$.

Число $\frac{b_1}{1 - q}$ называют суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии (b_n), у которой $|q| < 1$. Таким образом, $b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n + ... = \frac{b_1}{1 - q}$.

Обозначим сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии буквой S и получим формулу: $S = \frac{b_1}{1 - q}$.

Вычислим по этой формуле сумму разрядных слагаемых: $0,7777... = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + ...$.

Слагаемые этой суммы образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию $\frac{7}{10}$; $\frac{7}{100}$; $\frac{7}{1000}$; ..., первый член которой равен $\frac{7}{10}$, а знаменатель равен $\frac{1}{10}$.

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$S = \frac{b_1}{1 - q}, \quad |q| < 1$$

Так как $|q| < 1$, то можем найти сумму этой бесконечной прогрессии. Подставим $b_1 = \frac{7}{10}$ и $q = \frac{1}{10}$ в формулу $S = \frac{b_1}{1 - q}$ и получим: $S = \frac{\frac{7}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{7}{9}$.

Значит, $0,(7) = 0,7777... = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + ... = \frac{7}{9}$.

Таким образом, бесконечную периодическую десятичную дробь 0,(7) можно записать в виде обыкновенной дроби $\frac{7}{9}$, т. е. $0,(7) = \frac{7}{9}$.

Таким же способом можно любую бесконечную периодическую десятичную дробь представить в виде обыкновенной дроби.

Чтобы записать бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной дроби, нужно:

① Представить число в виде суммы разрядных слагаемых.	Запишите в виде обыкновенной дроби число 2,4(15). ① $2,4(15) = 2,41515... =$ $= 2 + 0,4 + 0,015 + 0,00015 + ...$.
② Выделить сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии.	② $S = 0,015 + 0,00015 + ...$.
③ Указать первый член b_1 и найти знаменатель этой прогрессии q.	③ $b_1 = 0,015;\ q = \frac{0,00015}{0,015} = 0,01$.
④ Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии по формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$.	④ $S = \frac{0,015}{1-0,01} = \frac{0,015}{0,99} = \frac{15}{990} = \frac{1}{66}$.
⑤ Вычислить сумму первых слагаемых и найденного значения суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.	⑤ $2,4 + \frac{1}{66} = 2\frac{4}{10} + \frac{1}{66} = 2\frac{2}{5} + \frac{1}{66} =$ $= 2\frac{137}{330}$. $2,4(15) = 2\frac{137}{330}$.

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

1. В бесконечной геометрической прогрессии $b_1 = -36$, $b_2 = 6$. Является ли эта прогрессия бесконечно убывающей геометрической прогрессией?	Найдем знаменатель прогрессии: $q = \frac{6}{-36} = -\frac{1}{6}$. Так как $\vert q \vert < 1$, то данная прогрессия является бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

2. Является ли бесконечно убывающей геометрическая прогрессия: а) $4;\ \frac{4}{3};\ \frac{4}{9};\ \frac{4}{27};\ \ldots;$ б) $1;\ -\frac{1}{3};\ \frac{1}{9};\ -\frac{1}{27};\ \ldots;$ в) $2;\ -4;\ 8;\ -16;\ \ldots$?	а) Каждый член этой геометрической прогрессии, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на число $\frac{1}{3}$. Так как $\lvert q \rvert = \frac{1}{3} < 1$, то прогрессия является бесконечно убывающей геометрической прогрессией. б) Поскольку $\lvert q \rvert = \left\lvert -\frac{1}{3} \right\rvert = \frac{1}{3} < 1$, то прогрессия является бесконечно убывающей геометрической прогрессией. в) Знаменатель прогрессии $q = -2$. Так как $\lvert -2 \rvert > 1$, то прогрессия не является бесконечно убывающей геометрической прогрессией.
Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии	
3. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, в которой $b_1 = 5$, $q = -\frac{1}{2}$.	По формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$ получим: $S = \frac{5}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{5}{\frac{3}{2}} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}.$
4. В бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S = 90$, $q = 0{,}1$. Найдите первый член этой прогрессии.	В формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S = \frac{b_1}{1-q}$ подставим $S = 90$, $q = 0{,}1$ и получим $90 = \frac{b_1}{1-0{,}1}$. Решим полученное уравнение: $90 = \frac{b_1}{0{,}9}$, $b_1 = 81$.
5. Запишите бесконечную периодическую десятичную дробь $15{,}2(3)$ в виде обыкновенной дроби.	① $15{,}2(3) = 15 + 0{,}2 + 0{,}03 + 0{,}003 +$ $+ 0{,}0003 + \ldots$. ② $S = 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + \ldots$. ③ $b_1 = 0{,}03;\quad q = \frac{0{,}003}{0{,}03} = 0{,}1.$ ④ $S = \frac{0{,}03}{1-0{,}1} = \frac{0{,}03}{0{,}9} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}.$ ⑤ $15{,}2 + \frac{1}{30} = 15\frac{1}{5} + \frac{1}{30} = 15\frac{7}{30}.$ $15{,}2(3) = 15\frac{7}{30}.$

1. Каждый член бесконечной последовательности, начиная со второго, меньше предыдущего в 3 раза. Эта последовательность: а) является арифметической прогрессией; б) является геометрической прогрессией; в) является бесконечно убывающей геометрической прогрессией; г) не является прогрессией. Выберите правильный ответ.

2. Если в бесконечной геометрической прогрессии $|q| < 1$, тогда сумма членов этой прогрессии вычисляется по формуле:

а) $S = b_1 \cdot q$; б) $S = b_1 : q$; в) $S = b_1 \cdot (q - 1)$; г) $S = \frac{b_1}{1 - q}$.

Выберите правильный ответ.

4.283. Из данных геометрических прогрессий выберите бесконечно убывающие:

а) 3; 9; 27; 81; ...; б) 4; 1; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{16}$; ...;

в) –5; 10; –20; 40; ...; г) 8; –4; 2; –1; $\frac{1}{2}$; ... .

4.284. Какую формулу нужно применить, чтобы найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии (b_n) со знаменателем q? Найдите эту сумму, если:

а) $b_1 = 12$, $q = \frac{1}{4}$; б) $b_1 = -25$, $q = -\frac{2}{5}$;

в) $b_1 = 21$, $q = -\frac{1}{3}$; г) $b_1 = -0{,}1$, $q = 0{,}9$.

4.285. Составьте план решения и найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

а) 100; 10; 1; ...; б) 0,2; 0,02; 0,002; ...;

в) 9; –4,5; 2,25; ...; г) –3; –2; $-\frac{4}{3}$; ... .

4.286. Найдите сумму, слагаемыми которой являются последовательные члены геометрической прогрессии:

а) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots$; б) $3 - \frac{3}{5} + \frac{3}{25} - \frac{3}{125} + \ldots$.

4.287. Примените алгоритм для представления в виде обыкновенной дроби числа:

а) 0,(4); б) 0,(12); в) 0,(123);
г) 14,(31); д) 6,3(8); е) 10,1(26).

4.288. Используйте формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии и найдите первый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой:

а) $S = 72$, $q = \frac{2}{9}$; б) $S = 8$, $q = -\frac{3}{4}$.

4.289. Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если:

а) $S = -140,\ b_1 = -35;$ б) $S = \frac{2}{3},\ b_1 = 1.$

4.290. Определите, является ли бесконечно убывающей геометрическая прогрессия:

а) $2;\ \sqrt{2};\ 1;\ ...;$ б) $-5\sqrt{5};\ 5;\ -\sqrt{5};\ ...;$

в) $1;\ \frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{3};\ ... .$

Воспользуйтесь соответствующей формулой и найдите ее сумму.

4.291. Найдите третий член бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой знаменатель равен 0,4, а сумма прогрессии равна $33\frac{1}{3}$.

4.292. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если:

а) $b_2 = 1\frac{2}{3},\ q = \frac{2}{3};$ б) $b_4 = \frac{\sqrt{2}}{8},\ q = \frac{1}{2}.$

4.293*. Найдите первый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии, зная, что сумма членов этой прогрессии равна 12,6, а отношение 20-го члена к 17-му равно $-\frac{8}{125}$.

4.294*. Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, первый член которой в 1,5 раза больше суммы остальных ее членов.

4.295. Какую формулу нужно применить, чтобы найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии (b_n) со знаменателем q? Найдите эту сумму, если:

а) $b_1 = 30,\ q = \frac{2}{3};$ б) $b_1 = -36,\ q = -\frac{1}{4}.$

4.296. Составьте план решения и найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

а) 125; 25; 5; ...; б) 0,1; 0,01; 0,001; ...;

в) 18; –6; 2; ... .

4.297. Какой формулой можно воспользоваться, чтобы найти сумму $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...,$ слагаемыми которой являются последовательные члены геометрической прогрессии? Найдите эту сумму.

4.298. Используйте алгоритм и представьте в виде обыкновенной дроби число:

а) 0,(6); б) 0,(51); в) 3,(26); г) 17,3(47).

4.299. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 3, а ее первый член равен 4. Найдите знаменатель прогрессии.

4.300. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 6, а ее знаменатель равен $\frac{2}{3}$. Найдите первый член прогрессии.

4.301. Составьте план решения и найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $b_3 = -1{,}5$, $q = 0{,}25$.

4.302*. Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой сумма первых двух членов в 8 раз больше суммы остальных ее членов.

4.303. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 - y^2 = 8. \end{cases}$

4.304. Вычислите: $\left(2\sqrt{3} + 5\right)^2 + \left(10 - \sqrt{3}\right)^2$.

4.305. Сократите дробь $\dfrac{x^2 - 1}{17x - 2x^2 - 15}$.

4.306. Магазин продал на прошлой неделе некоторое количество товара. На этой неделе запланировано продать того же товара на 10 % меньше, но по цене на 10 % больше. Бо́льшую или меньшую сумму получит магазин от продажи товара на этой неделе и на сколько процентов?

Итоговая самооценка

После изучения этой главы я должен:

• знать способы задания последовательностей и уметь применять их для решения задач;

• знать определение арифметической прогрессии, ее разности, формулу n-го члена арифметической прогрессии;