§ 4. Проекция вектора на ось

Вы уже знаете, что вектор имеет модуль и направление. При решении задач часто используется понятие **проекция вектора** на ось. Что такое проекция вектора? Как ее определяют?

Начнем с понятия *проекция **точки** на ось*.

Проекция точки — это основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на ось.

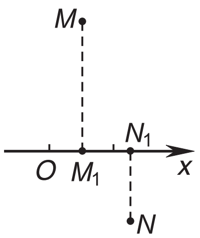

Рис. 24

На рисунке 24 точка M_1 — проекция точки M на ось Ox, точка N_1 — проекция точки N на эту ось.

А как определяют *проекцию **вектора** на ось*?

Проекция вектора на ось — это длина отрезка между проекциями начала и конца вектора, взятая со знаком «+» или «–». Знак «+» берут, если угол между вектором и осью острый, а знак «–» — если угол тупой.

На рисунке 25 проекция вектора $\vec{a}$ на ось Ox обозначена через a_x, а проекция вектора $\vec{b}$ — через b_x.

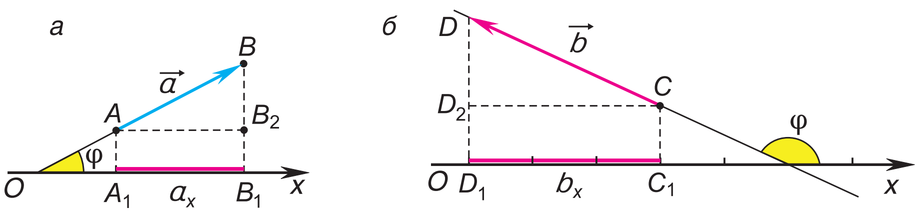

Рис. 25

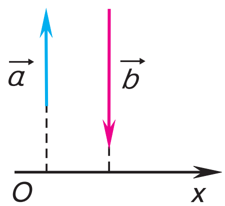

Рис. 26

Проекция a_x — число положительное, т. к. угол φ на рисунке 25, *а* — острый. Проекция b_x — число отрицательное ($b_x < 0$), т. к. угол φ на рисунке 25, *б* — тупой.

А если вектор перпендикулярен оси? Тогда его проекция на эту ось равна нулю (рис. 26).

Проекцию вектора можно выразить через его модуль и угол между вектором и осью.

Рассмотрим треугольник ABB_2 на рисунке 25, *а*. Его гипотенуза $AB = a$, катет $AB_2 = a_x$, а угол между ними равен φ. Следовательно,

$$a_x = a\cos\varphi. \tag{1}$$

Проекция вектора на ось равна модулю вектора, умноженному на косинус угла между вектором и осью.

Это правило справедливо при любых углах между вектором и осью. Подтвердите это с помощью рисунков 25 и 26.

Обратим внимание на еще одно важное свойство проекций:

проекция суммы векторов на ось равна сумме их проекций на эту ось.

С помощью рисунка 27, *а*, *б* убедитесь, что из векторного равенства $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ следует равенство для проекций: $c_x = a_x + b_x$. Не забывайте о знаках проекций.

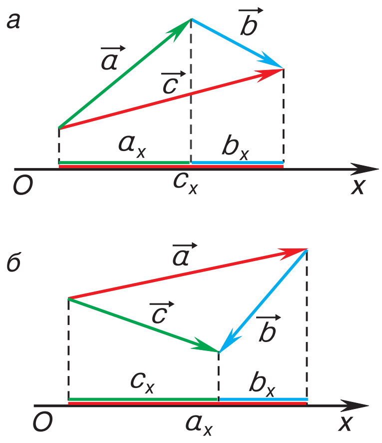

Рис. 27

Для любознательных

А можно ли найти модуль и направление вектора по его проекциям на координатные оси?

Рассмотрим вектор $\vec{d}$, лежащий в плоскости xOy (рис. 28). Его проекции на оси Ox и Oy определим из рисунка: $d_x = 8$, $d_y = 6$.

Модуль вектора $\vec{d}$ находим по теореме Пифагора из треугольника ACD: $d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$. Разделив d_x на d, получим: $\cos\varphi = \frac{d_x}{d} = 0{,}8$. По значению косинуса находим угол $\varphi \approx 37°$.

Таким образом, вектор, лежащий в заданной плоскости, полностью определяется двумя проекциями на оси координат.

Вектор в пространстве определяется тремя проекциями: a_x, a_y, a_z (рис. 29).

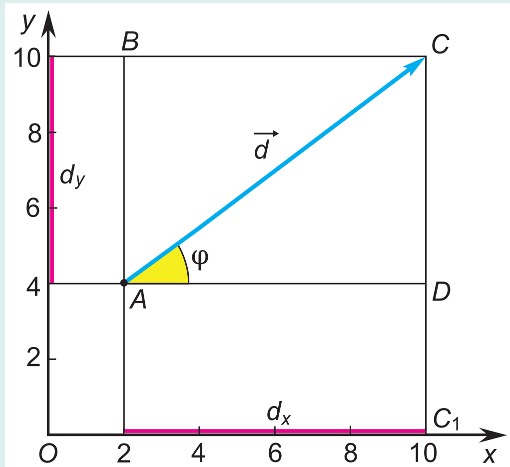

Рис. 28

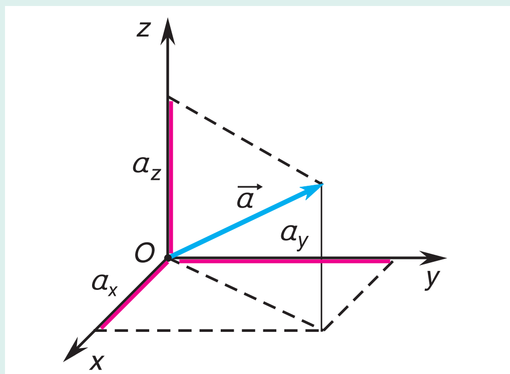

Рис. 29

Главные выводы

1. Проекция вектора на ось — это длина отрезка, заключенного между проекциями начала и конца вектора на эту ось, взятая со знаком «+» или «–».
2. Если угол между вектором и осью острый, то его проекция на эту ось положительна, если угол тупой — отрицательна, если прямой — равна нулю.
3. Проекция вектора на ось равна произведению его модуля на косинус угла между вектором и осью.
4. Проекция суммы векторов на ось равна сумме их проекций на эту ось.

Контрольные вопросы

1. Что такое проекция точки на ось? Проекция вектора на ось?
2. Когда проекция вектора на ось: а) равна нулю; б) положительна; в) отрицательна?
3. Как найти проекцию вектора на ось, зная его модуль и угол между вектором и осью?
4. Равна ли проекция разности двух векторов на ось разности проекций этих векторов на ту же ось? Поясните ответ с помощью чертежа.

Примеры решения задач

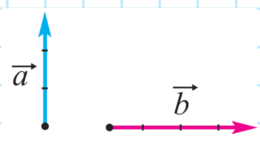

Рис. 30

1. Определите сумму и разность взаимно перпендикулярных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 30). Найдите модули векторов суммы $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ и разности $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.

Решение

Сумму векторов $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ находим по правилу треугольника (рис. 31, *а*) или параллелограмма (рис. 31, *б*). Так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны, модуль вектора $\vec{c}$ находим по теореме Пифагора: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Разность векторов $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ определим по правилам вычитания векторов (рис. 32, *а*, *б*).

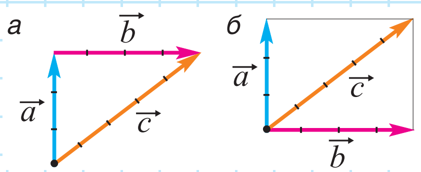

Рис. 31

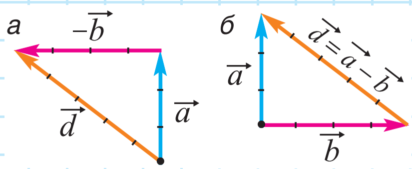

Рис. 32

Модуль вектора $\vec{d}$ находим аналогично:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Ответ: $c = 5$; $d = 5$.

2. Выразите вектор $\vec{a}$ через векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (рис. 33). Как связаны между собой проекции этих векторов на оси Ox и Oy?

Решение

По правилу треугольника находим: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Отсюда $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$. Определив координаты x и y начальных и конечных точек векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, находим проекции этих векторов: $a_x = 2$, $a_y = 4$, $b_x = 4$, $b_y = -2$, $c_x = 6$, $c_y = 2$.

Вычислением убедимся, что проекции векторов связаны теми же равенствами, что и сами векторы: $a_x = c_x - b_x$, $a_y = c_y - b_y$.

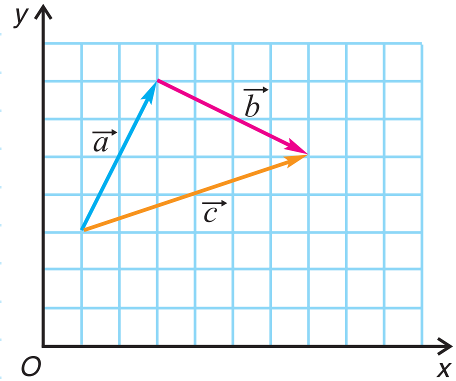

Рис. 33

Ответ: $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$, $a_x = c_x - b_x$, $a_y = c_y - b_y$.

Упражнение 2

1. Постройте векторы $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{b} - \vec{a}$ для каждой пары векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображенных на рисунке 34, *а*, *б*, *в*.

2. Модуль вектора $\vec{a}$ равен 4. Постройте векторы: $2\vec{a}$; $0{,}2\vec{a}$; $-3\vec{a}$; $-\frac{\vec{a}}{4}$.

3. Найдите проекции векторов (рис. 35) на координатные оси Ox и Oy.

4. При каком значении угла между вектором и осью его проекция будет: а) максимальна; б) равна половине модуля вектора?

5. Вектор $\vec{a}$ перпендикулярен вектору $\vec{b}$. Модули $a = b = 4$. Постройте сумму векторов $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ и разность $\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}$, если: 1) $\alpha = 2$, $\beta = 4$; 2) $\alpha = -2$, $\beta = 0{,}5$.

6. Сила $\vec{F}$, приложенная к телу, направлена под углом $\alpha = 30°$ к горизонтальной поверхности (рис. 36). Модуль этой силы $F = 60$ Н. Найдите проекции силы $\vec{F}$ на оси Ox и Oy.

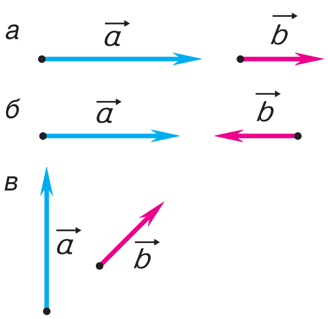

Рис. 34

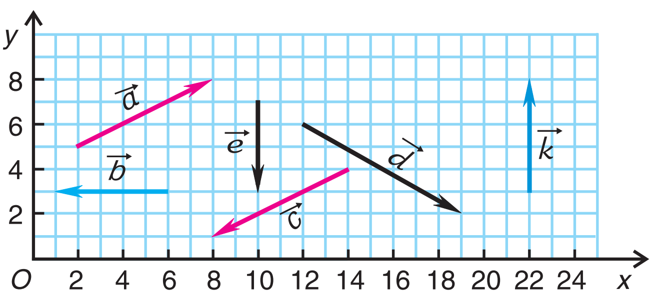

Рис. 35

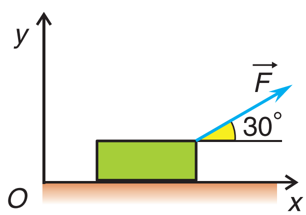

Рис. 36