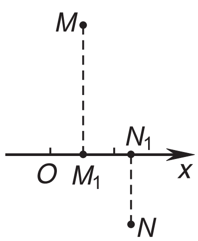
§ 4. Праекцыя вектара на вось

Вы ўжо ведаеце, што вектар мае модуль і напрамак. Пры рашэнні задач часта выкарыстоўваецца паняцце **праекцыя вектара** на вось. Што такое праекцыя вектара? Як яе вызначаюць?

Пачнём з паняцця *праекцыя **пункта** на вось*.

Праекцыя пункта — гэта аснова перпендыкуляра, апушчанага з дадзенага пункта на вось.



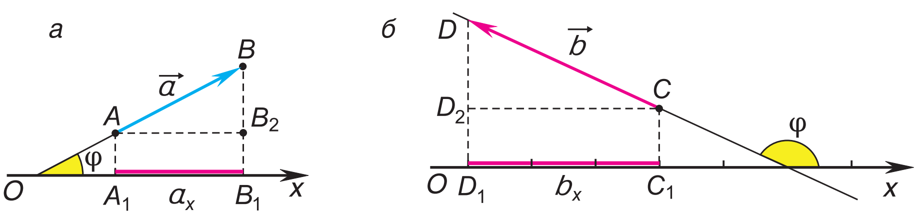
Мал. 24

На малюнку 24 пункт M_1 — праекцыя пункта M на вось Ox, пункт N_1 — праекцыя пункта N на гэту вось.

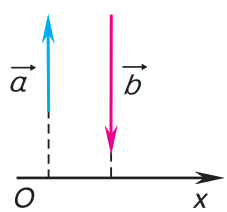
А як вызначаюць *праекцыю **вектара** на вось*?

Праекцыя вектара на вось — гэта даўжыня адрэзка паміж праекцыямі пачатку і канца вектара, узятая са знакам «+» або «−». Знак «+» бяруць, калі вугал паміж вектарам і воссю востры, а знак «−» — калі вугал тупы.

На малюнку 25 праекцыя вектара $\vec{a}$ на вось Ox абазначана праз a_x, а праекцыя вектара $\vec{b}$ — праз b_x.



Мал. 25



Мал. 26

Праекцыя a_x — дадатны лік, паколькі вугал φ на малюнку 25, *а* — востры. Праекцыя b_x — адмоўны лік ($b_x < 0$), паколькі вугал φ на малюнку 25, *б* — тупы.

А калі вектар перпендыкулярны восі? Тады яго праекцыя на гэту вось роўна нулю (мал. 26).

Праекцыю вектара можна выразіць праз яго модуль і вугал паміж вектарам і воссю.

Разгледзім трохвугольнік ABB_2 на малюнку 25, *а*. Яго гіпатэнуза $AB = a$, катэт $AB_2 = a_x$, а вугал паміж імі роўны φ. Такім чынам,

$$a_x = a\cos\varphi. \tag{1}$$

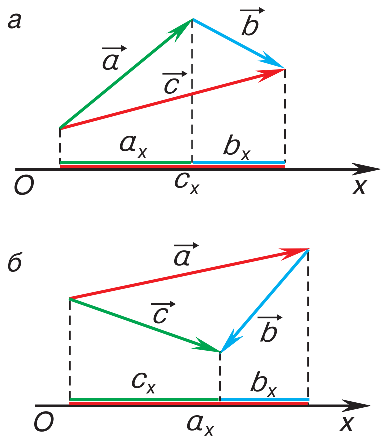
Праекцыя вектара на вось роўна модулю вектара, памножанаму на косінус вугла паміж вектарам і воссю.

Гэта правіла справядлівае пры любых вуглах паміж вектарам і воссю. Пацвердзіце гэта з дапамогай малюнкаў 25 і 26.

Звярніце ўвагу на яшчэ адну важную ўласцівасць праекцый:

праекцыя сумы вектараў на вось роўна суме іх праекцый на гэту вось.

З дапамогай малюнкаў 27 (*а*, *б*) пераканайцеся, што з вектарнай роўнасці $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ вынікае роўнасць для праекцый: $c_x = a_x + b_x$. Не забывайцеся аб знаках праекцый.



Мал. 27

Для дапытлівых

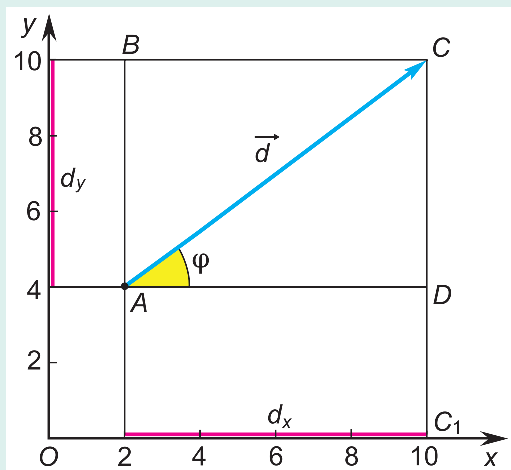
А ці можна знайсці модуль і напрамак вектара па яго праекцыях на каардынатныя восі?

Разгледзім вектар $\vec{d}$, які ляжыць у плоскасці xOy (мал. 28). Яго праекцыі на восі Ox і Oy вызначым з дапамогай малюнка: $d_x = 8$, $d_y = 6$.

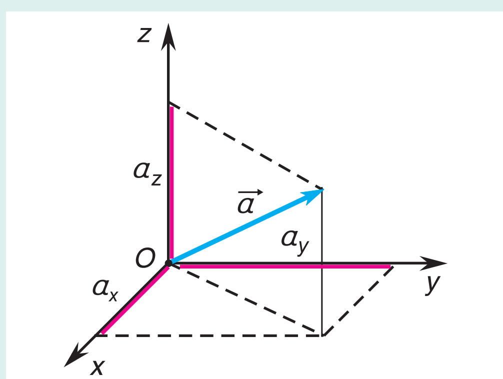
Модуль вектара $\vec{d}$ знаходзім па тэарэме Піфагора з трохвугольніка ACD: $d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$. Падзяліўшы d_x на d, атрымаем: $\cos\varphi = \frac{d_x}{d} = 0{,}8$. Па значэнні косінуса знаходзім вугал $\varphi \approx 37$.

Такім чынам, вектар, які ляжыць у зададзенай плоскасці, цалкам вызначаецца дзвюма праекцыямі на восі каардынат.

Вектар у прасторы вызначаецца трыма праекцыямі: a_x, a_y, a_z (мал. 29).



Мал. 28



Мал. 29

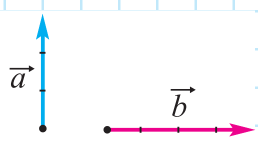
Галоўныя вывады

1. Праекцыя вектара на вось — гэта даўжыня адрэзка, змешчанага паміж праекцыямі пачатку і канца вектара на гэту вось, узятая са знакам «+» або «–».
2. Калі вугал паміж вектарам і воссю востры, то яго праекцыя на гэту вось дадатная, калі вугал тупы — адмоўная, калі прамы — роўна нулю.
3. Праекцыя вектара на вось роўна здабытку яго модуля і косінуса вугла паміж вектарам і воссю.
4. Праекцыя сумы вектараў на вось роўна суме іх праекцый на гэту вось.

Кантрольныя пытанні

1. Што такое праекцыя пункта на вось? Праекцыя вектара на вось?
2. Калі праекцыя вектара на вось: а) роўна нулю; б) дадатная; в) адмоўная?
3. Як знайсці праекцыю вектара на вось, ведаючы яго модуль і вугал паміж вектарам і воссю?
4. Ці роўна праекцыя рознасці двух вектараў на вось рознасці праекцый гэтых вектараў на тую ж вось? Патлумачце адказ з дапамогай чарцяжа.

Прыклады рашэння задач

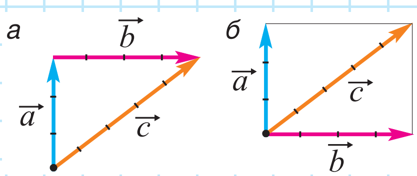


Мал. 30

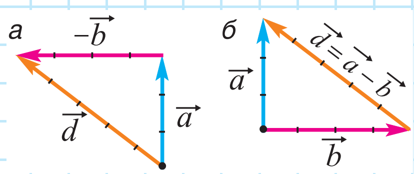
1. Вызначыце суму і рознасць узаемна перпендыкулярных вектараў $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (мал. 30). Знайдзіце модулі вектараў сумы $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ і рознасці $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.

Рашэнне

Суму вектараў $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ знаходзім па правіле трохвугольніка (мал. 31, *а*) або паралелаграма (мал. 31, *б*). Паколькі вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$ узаемна перпендыкулярныя, модуль вектара $\vec{c}$ знаходзім па тэарэме Піфагора: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Рознасць вектараў $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ вызначаем па правілах аднімання вектараў (мал. 32, *а, б*).



Мал. 31



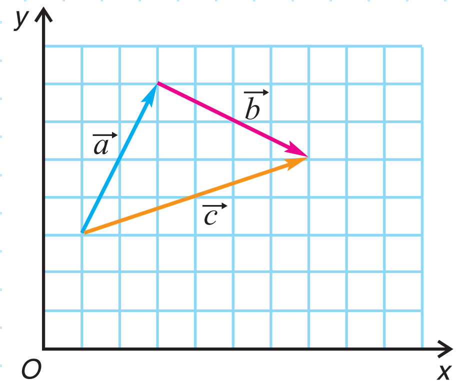
Мал. 32

Модуль вектара $\vec{d}$ знаходзім аналагічна:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Адказ: $c = 5$; $d = 5$.

2. Выразіце вектар $\vec{a}$ праз вектары $\vec{b}$ і $\vec{c}$ (мал. 33). Як звязаны паміж сабой праекцыі гэтых вектараў на восі Ox і Oy?



Мал. 33

Р а ш э н н е

Па правіле трохвугольніка знаходзім: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Адсюль $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$. Вызначыўшы каардынаты x і y пачатковых і канечных пунктаў вектараў $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, знаходзім праекцыі гэтых вектараў: $a_x = 2$, $a_y = 4$, $b_x = 4$, $b_y = -2$, $c_x = 6$, $c_y = 2$.

Вылічэннем пераканаемся, што праекцыі вектараў звязаны тымі ж роўнасцямі, што і самі вектары: $a_x = c_x - b_x$, $a_y = c_y - b_y$.

А д к а з: $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$, $a_x = c_x - b_x$, $a_y = c_y - b_y$.

Практыкаванне 2

1. Пабудуйце вектары $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ і $\vec{b} - \vec{a}$ для кожнай пары вектараў $\vec{a}$ і $\vec{b}$, паказаных на малюнку 34, *а*, *б*, *в*.

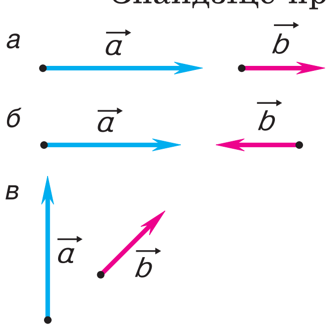
2. Модуль вектара $\vec{a}$ роўны 4. Пабудуйце вектары: $2\vec{a}$; $0{,}2\vec{a}$; $-3\vec{a}$; $-\frac{\vec{a}}{4}$.

3. Знайдзіце праекцыі вектараў (мал. 35) на каардынатныя восі Ox і Oy.

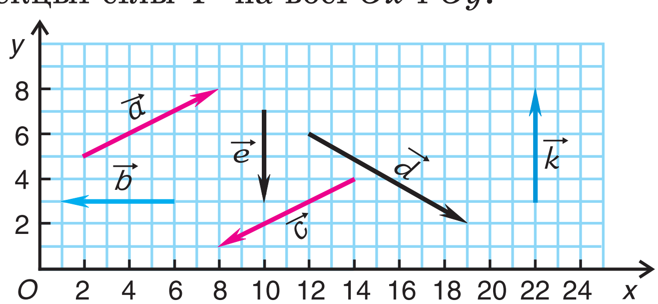
4. Пры якім значэнні вугла паміж вектарам і воссю яго праекцыя будзе: а) максімальнай; б) роўнай палавіне модуля вектара?

5. Вектар $\vec{a}$ перпендыкулярны вектару $\vec{b}$. Модулі $a = b = 4$. Пабудуйце суму вектараў $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ і рознасць $\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}$, калі: 1) $\alpha = 2$, $\beta = 4$; 2) $\alpha = -2$, $\beta = 0{,}5$.

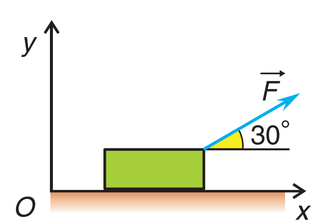
6. Сіла $\vec{F}$, прыкладзеная да цела, накіравана пад вуглом $\alpha = 30°$ да гарызантальнай паверхні (мал. 36). Модуль гэтай сілы $F = 60$ Н. Знайдзіце праекцыі сілы $\vec{F}$ на восі Ox і Oy.



Мал. 34



Мал. 35



Мал. 36