§ 12. Перамяшчэнне, каардыната і шлях пры роўнапераменным руху

Мы ведаем, што пры роўнапераменным руху скорасць цела лінейна залежыць ад часу. А як залежыць ад часу перамяшчэнне? Каардыната? Пройдзены шлях?

У папярэднім параграфе для роўнапераменнага руху была знойдзена залежнасць праекцыі скорасці ад часу:

$$v_x = v_{0x} + a_x t \tag{1}$$

і атрымана формула для праекцыі перамяшчэння:

$$\Delta r_x = \frac{v_{0x} + v_x}{2} t. \tag{2}$$

Падстаўляючы v_x з роўнасці (1) у (2), знаходзім залежнасць праекцыі перамяшчэння ад часу:

$$\boxed{\Delta r_x = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}}. \tag{3}$$

Адзначым, што пры руху з пастаянным паскарэннем залежнасці (1) і (3) выконваюцца і для вектараў скорасці і перамяшчэння:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} t}, \tag{4}$$

$$\boxed{\Delta \vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}}. \tag{5}$$

Улічваючы, што праекцыя перамяшчэння $\Delta r_x = x - x_0$, з формулы (3) знаходзім каардынату:

$$\boxed{x = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}}. \tag{6}$$

Формула (6) выражае *кінематычны закон роўнапераменнага руху*. Функцыі (3) і (6) называюцца *квадратычнымі*. Такім чынам, **пры роўнапераменным руху праекцыя перамяшчэння цела і яго каардыната квадратычна залежаць ад часу.**

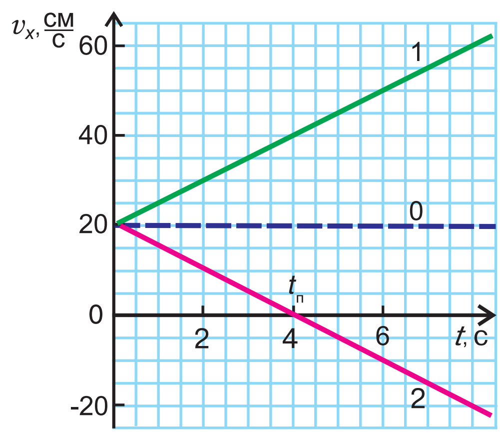
Параўнаем залежнасці асноўных кінематычных велічынь ад часу для двух відаў прамалінейнага руху: раўнамернага і роўнапераменнага (табл. 1).

Табліца 1

Кінематычныя велічыні	Раўнамерны рух	Роўнапераменны рух
Праекцыя паскарэння	$a_x = 0$	$a_x = \text{const}$
Праекцыя скорасці	$v_x = \text{const}$	$v_x = v_{0x} + a_x t$
Праекцыя перамяшчэння	$\Delta r_x = v_x t$	$\Delta r_x = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}$
Каардыната	$x = x_0 + v_x t$	$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}$

З табліцы відаць, што пры $a_x = 0$ формулы роўнапераменнага руху пераходзяць у формулы раўнамернага руху.

Разгледзім графікі v_x, Δr_x і каардынаты x на канкрэтным прыкладзе: тры целы (0, 1 і 2) рухаюцца ўздоўж восі Ox. Іх пачатковыя скорасці аднолькавыя $\left(v_{0x} = 20\ \frac{\text{см}}{\text{с}}\right)$, а праекцыі паскарэння розныя: $a_x = 0$; $a_x = 5\ \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$; $a_x = -5\ \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$.



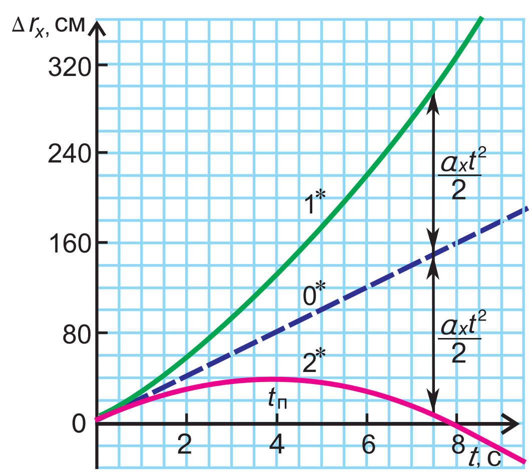
Мал. 79

Па формуле (1) $v_x = v_{0x} + a_x t$ пабудуем графікі праекцыі скорасці гэтых цел (графікі 0, 1, 2 на малюнку 79). Графікі прамалінейныя, а іх нахіл вызначаецца значэннем праекцыі паскарэння a_x. Графік 2 перасякае вось часу ў момант павароту $t_п$.

Пяройдзем да графікаў праекцыі перамяшчэння Δr_x (мал. 80).

Як мы ведаем, пры $a_x = 0$ (г. зн. для раўнамернага руху) $\Delta r_x = v_x t$ і графік $\Delta r_x(t)$ — нахіленая прамая лінія (графік 0* на малюнку 80).

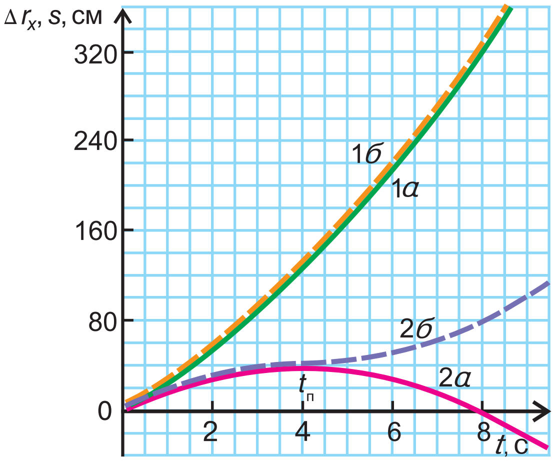
З табліцы 1 відаць, што формулы для праекцыі перамяшчэння Δr_x пры раўнамерным і роўнапераменным руху адрозніваюцца толькі на складаемае $\frac{a_x t^2}{2}$. Таму пры $a_x > 0$ пункты графіка 0* для кожнага значэння t трэба падняць на $\frac{a_x t^2}{2}$ (графік 1*), а пры $a_x < 0$ (графік 2*) — на столькі ж апусціць (мал. 80).



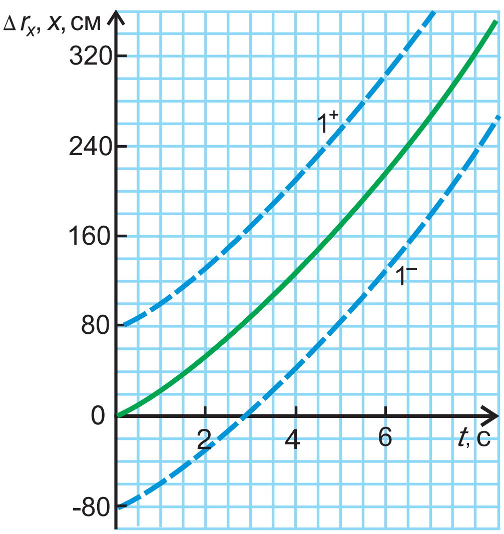
Мал. 80

Паколькі Δr_x квадратычна залежыць ад часу (гл. формулу (3)), **графікі праекцыі перамяшчэння пры роўнапераменным руху з'яўляюцца ўчасткамі парабал** (мал. 80).

Звярніце ўвагу на паводзіны графікаў 2 і 2* у момант павароту $t_п$. Графік 2 для v_x (мал. 79)



Мал. 81



Мал. 82

у гэты момант праходзіць праз нуль, а графік 2* для Δr_x (мал. 80) пры $t = t_п$ дасягае максімуму, а затым пачынае апускацца. Графікі пацвярджаюць: у момант павароту напрамак руху цела змяняецца на процілеглы.

А якім будзе графік шляху? Для руху, пры якім напрамак скорасці не змяняецца, графік шляху 1*б* (мал. 81) супадае з графікам праекцыі перамяшчэння 1*а*. Калі ж скорасць змяняе свой напрамак, то графік шляху s (2*б*) і графік праекцыі перамяшчэння Δr_x (2*а*) будуць супадаць толькі да моманту павароту $t_п$.

Пры $t > t_п$ праекцыя перамяшчэння Δr_x пачынае памяншацца, а шлях s працягвае павялічвацца. Ён павялічваецца на столькі, на колькі за той жа час памяншаецца праекцыя перамяшчэння.

Ад графіка праекцыі перамяшчэння Δr_x лёгка перайсці да графіка каардынаты x (мал. 82).

Паколькі, згодна з формулай (6), $x = x_0 + \Delta r_x$, то графікі каардынаты x (парабалы 1^+ і 1^-) атрымліваюцца зрухам графіка Δr_x на велічыню $|x_0|$. Зрух уверх адбываецца пры $x_0 > 0$, а ўніз — пры $x_0 < 0$ (мал. 82).

Выведзем яшчэ дзве формулы, карысныя для рашэння задач аб роўнапераменным руху.

Выразім час з формулы праекцыі скорасці (1): $t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x}$. Падставіўшы гэты выраз у формулу (2), атрымаем: $\Delta r_x = \frac{v_{0x} + v_x}{2} \cdot \frac{v_x - v_{0x}}{a_x} = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}$. Такім чынам, пры роўнапераменным руху

$$\boxed{v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x \Delta r_x}. \quad (7)$$

У выпадку калі пачатковая скорасць і паскарэнне аднолькава накіраваны, з роўнасці (7) вынікае:

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2as}, \quad (8)$$

дзе s — пройдзены шлях.

Галоўныя вывады

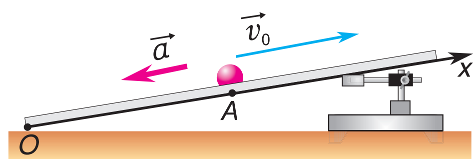
1. Пры роўнапераменным руху цела яго перамяшчэнне і каардыната — квадратычныя функцыі часу.
2. Графікі залежнасці праекцыі перамяшчэння і каардынаты ад часу для роўнапераменнага руху з'яўляюцца ўчасткамі парабал.
3. Вяршыня парабалы на графіку праекцыі перамяшчэння адпавядае моманту часу, пры якім імгненная скорасць роўна нулю.

Кантрольныя пытанні

1. Як залежаць перамяшчэнне і каардыната ад часу пры роўнапераменным руху?
2. Як з дапамогай графіка праекцыі перамяшчэння для раўнамернага руху пабудаваць графік гэтай велічыні для роўнапераменнага руху?
3. Як, ведаючы графік праекцыі перамяшчэння, атрымаць графік каардынаты? Што яшчэ пры гэтым трэба ведаць?
4. У якім выпадку графікі праекцыі перамяшчэння і каардынаты супадаюць?
5. Дзе размешчана вяршыня парабалы на графіку каардынаты, калі $v_{0x} > 0$, $a_x > 0$?

Прыклад рашэння задачы

Шарыку, які знаходзіцца ў пункце A, размешчаным пасярэдзіне нахіленага жолаба даўжынёй $l_0 = 100$ см (мал. 83), надалі пачатковую скорасць $\vec{v}_0$ уздоўж нахіленага жолаба ўверх. Паскарэнне шарыка $\vec{a}$ накіравана ўздоўж жолаба ўніз. Знайдзіце каардынату пункта павароту $x_п$ і час $t_п$, за які шарык яго дасягне, калі $v_0 = 40\,\frac{см}{с}$, $a = 20\,\frac{см}{с^2}$.



Мал. 83

Вызначыце час, калі шарык вернецца ў пункт A, і час, калі ён апынецца ў пункце O. Пабудуйце графікі праекцый скорасці і перамяшчэння, а таксама каардынаты шарыка.

Дадзена:

$l_0 = 100$ см

$v_0 = 40\ \frac{\text{см}}{\text{с}}$

$a = 20\ \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$

$x_0 = 50$ см

$x_\text{п}$ — ?

$t_\text{п}$ — ?

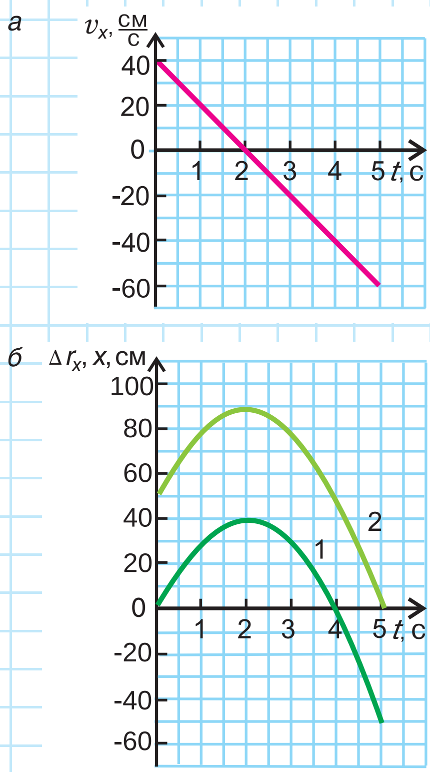
t_2 — ?

t_3 — ?

Рашэнне

Выберам вось Ox, як паказана на малюнку 83. Тады праекцыя скорасці $v_x = v_0 - at$, праекцыя перамяшчэння $\Delta r_x = v_0 t - \frac{at^2}{2}$, каардыната $x = x_0 + v_0 t - \frac{at^2}{2}$, дзе $x_0 = 0{,}5 l_0 = 50$ см, $v_{0x} = v_0 = 40\ \frac{\text{см}}{\text{с}}$, $a_x = -a = -20\ \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$. Па гэтых формулах для момантаў часу $t = 0$; 1,0 с; 2,0 с; 3,0 с; 4,0 с; 5,0 с знойдзем значэнні v_x і Δr_x і запішам іх у табліцу.

t, с	0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
v_x, $\frac{\text{см}}{\text{с}}$	40	20	0	−20	−40	−60
Δr_x, см	0	30	40	30	0	−50



Мал. 84

Выкарыстоўваючы атрыманыя значэнні, пабудуем графікі праекцый скорасці (мал. 84, *а*) і перамяшчэння (мал. 84, *б*, графік 1) за прамежак часу ад 0 да 5 с.

Графік каардынаты атрымаем, зрушыўшы графік праекцыі перамяшчэння на $x_0 = 50$ см уверх (графік 2 на малюнку 84, *б*). З графікаў і табліцы знаходзім: каардыната пункта павароту $x_1 = 90$ см; шарык дасягнуў яго ў момант $t_\text{п} = 2{,}0$ с; у пункце A шарык апынуўся пры $t_2 = 4{,}0$ с, а ў пункце O — пры $t_3 = 5{,}0$ с.

Адказ: $x_\text{п} = 90$ см; $t_\text{п} = 2{,}0$ с; $t_2 = 4{,}0$ с; $t_3 = 5{,}0$ с.

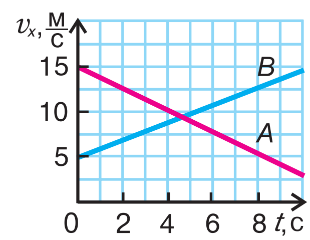
Практыкаванне 8

1. Дзеці з'язджаюць з горкі на санках за час $t = 3{,}0$ с, рухаючыся з пастаянным паскарэннем $a = 2{,}0\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Пачатковая скорасць руху санак роўна нулю. Вызначыце даўжыню горкі.

2. Электравоз, набліжаючыся да станцыі са скорасцю $v = 20\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, пачынае раўнамерна тармазіць і праз час $t = 1{,}0$ мін спыняецца. Вызначыце тармазны шлях электравоза. З якім паскарэннем рухаўся электравоз?

3. Праекцыя скорасці шарыка, які рухаецца па прамалінейным жолабе, залежыць ад часу па законе $v_x = A + Bt$, дзе $A = 20\ \frac{\text{см}}{\text{с}}$, $B = 2{,}0\ \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$. Вызначыце праекцыю пачатковай скорасці і праекцыю паскарэння шарыка. Знайдзіце залежнасць праекцыі перамяшчэння Δr_x шарыка ад часу. Знайдзіце значэнні v_x і Δr_x у момант часу $t = 6{,}0$ с. Пабудуйце графікі праекцый скорасці і перамяшчэння шарыка.

4. Па графіках праекцыі скорасці матацыклістаў, якія рухаюцца прамалінейна (мал. 85), пабудуйце графікі праекцый іх паскарэння і перамяшчэння. Ахарактарызуйце гэтыя рухі. Чаму роўны адносіны шляхоў, пройдзеных кожным матацыклістам да момантаў часу $t_1 = 4{,}0$ с і $t_2 = 8{,}0$ с ад пачатку руху? Запішыце кінематычны закон руху кожнага з матацыклістаў, лічачы $x_0 = 0$.



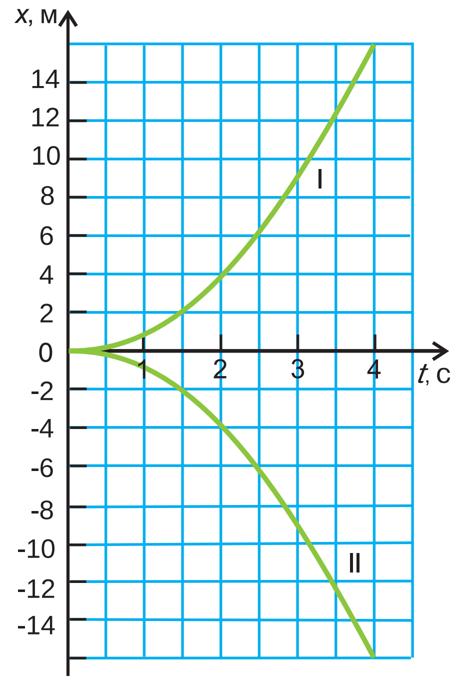
Мал. 85

5. Пад'ёмны кран паднімае груз са стану спакою з пастаянным паскарэннем $a = 0{,}1\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Як адносяцца шляхі, якія груз пераадольвае за 1, 2, 3 і 4-ю секунды руху? Пацвердзіце адказ графікам залежнасці модуля скорасці руху грузу ад часу.

6. Кінематычны закон руху кінутага ўверх мяча ў час гульні дзяцей на пляцоўцы мае выгляд $y = At - Bt^2$, дзе $A = 15{,}0\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $B = 5{,}0\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Вызначыце шлях, модуль перамяшчэння і каардынату мяча да момантаў часу $t_1 = 1{,}0$ с, $t_2 = 2{,}0$ с і $t_3 = 3{,}0$ с ад пачатку руху. Пабудуйце графікі залежнасці ад часу праекцый паскарэння і скорасці, каардынаты мяча, модуля перамяшчэння і шляху.

7. Аўтамабіль першую палавіну шляху рухаўся раўнамерна са скорасцю $v_1 = 36\ \frac{\text{км}}{\text{г}}$, а другую — роўнапаскорана. Вызначыце сярэднюю скорасць руху аўтамабіля на ўсім маршруце, калі ў канцы руху скорасць $v_2 = 20\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

8. Пасажыр, які стаяў на платформе ў пачатку адыходзячага цягніка, вызначыў, што першы вагон прайшоў міма яго за час $t_1 = 4$ с, а ўвесь цягнік — за $t_2 = 16$ с. Колькі вагонаў было ў цягніка? За які час прайшоў міма пасажыра апошні вагон? Рух цягніка лічыць роўнапаскораным, а вагоны — аднолькавымі.



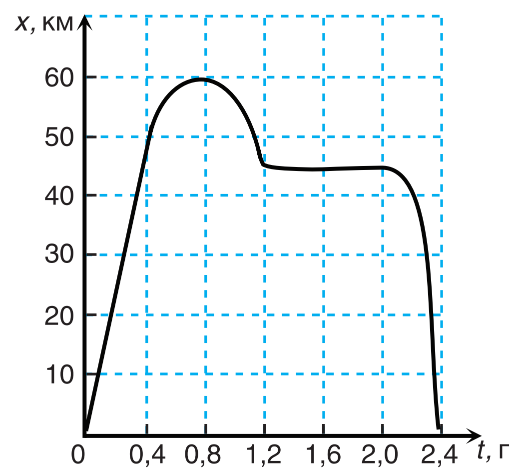
Мал. 86

9. Графікі руху для двух веласіпедыстаў (мал. 86) з'яўляюцца парабаламі з вяршыняй у пачатку каардынат. Чым адрозніваюцца рухі веласіпедыстаў? Чаму роўны праекцыі на вось *Ox* паскарэнняў і пачатковых скарасцей руху для кожнага з веласіпедыстаў? Якія праекцыі і модулі скарасцей руху веласіпедыстаў пры $t = 3{,}0$ с?

10. Выкарыстоўваючы графік залежнасці каардынаты транспартнага сродку ад часу (мал. 87), апішыце рух дадзенага транспартнага сродку.

По графіку каардынаты пабудуйце графік скорасці руху гэтага транспартнага сродку. Як змянялася скорасць яго руху?

Руху якога транспартнага сродку можа адпавядаць гэты графік? Чаму?



Мал. 87