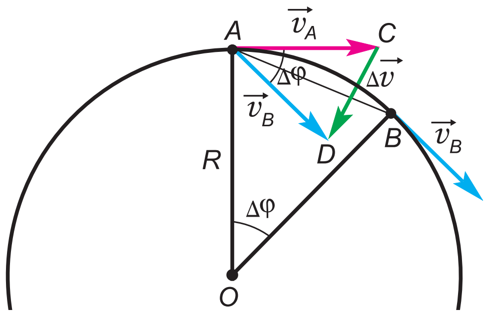
§ 14. Паскарэнне пункта пры яго руху па акружнасці

Пры раўнамерным прамалінейным руху паскарэнне роўна нулю. А чаму паскарэнне ўзнікае пры руху па акружнасці? Як яно накіравана? Чаму роўны яго модуль?



Мал. 92

Няхай цела (разглядаемае як матэрыяльны пункт) рухаецца па акружнасці радыусам R са скорасцю, модуль якой не змяняецца (v = const). За прамежак часу Δt цела перамясцілася з пункта A ў пункт B (мал. 92). Змяненне скорасці $\Delta\vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A \neq \vec{0}$. Таму не роўна нулю і паскарэнне цела

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \qquad (1)$$

Знойдзем паскарэнне цела ў пункце A. Перанясём вектар $\vec{v}_B$ у гэты пункт і пабудуем вектар $\Delta\vec{v}$. Атрымаліся падобныя раўнабедраныя трохвугольнікі ACD і OAB. З іх падобнасці вынікае:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{R}, \qquad (2)$$

дзе $\Delta v = |\Delta\vec{v}|$ — модуль змянення скорасці, $\Delta r = AB$ — модуль перамяшчэння. Падзелім абедзве часткі роўнасці (2) на Δt:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}\cdot\frac{1}{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t}\cdot\frac{1}{R}. \qquad (3)$$

Пры малых Δt адносіна $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ практычна роўна модулю скорасці цела v, а адносіна $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ — модулю яго паскарэння a ў тым жа пункце. У выніку роўнасць (3) прыме выгляд $\frac{a}{v} = \frac{v}{R}$, адкуль

$$\boxed{a = \frac{v^2}{R}}. \qquad (4)$$

Формула (4) вызначае модуль паскарэння $\vec{a}$ ў выпадку руху цела па акружнасці пры v = const.

А які напрамак паскарэння $\vec{a}$? Ён супадае з напрамкам вектара $\Delta\vec{v}$ пры малых Δt. З малюнка 92 бачна, што чым меншы Δt і разам з ім вугал $\Delta\varphi$, тым напрамак вектара $\Delta\vec{v}$ бліжэйшы да напрамку на цэнтр акружнасці.

Значыць, паскарэнне $\vec{a}$ накіравана па радыусе *да цэнтра акружнасці*. Таму яго называюць *цэнтраімклівым*. У той жа час вектар $\vec{a}$

перпендыкулярны скорасці $\vec{v}$ (г. зн. накіраваны па нармалі да яе). Таму паскарэнне $\vec{a}$ называюць таксама *нармальным* паскарэннем.

А як звязана цэнтраімклівае паскарэнне з вуглавой скорасцю? Падставіўшы ў формулу (4) выраз $v = \omega R$, знойдзем:

$$a = \omega^2 R. \tag{5}$$

Адсюль, улічваючы, што $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$, атрымаем яшчэ дзве карысныя формулы:

$$a = 4\pi^2\nu^2 R, \tag{6}$$

$$a = \frac{4\pi^2 R}{T^2}. \tag{7}$$

Выведзіце самастойна выраз для цэнтраімклівага паскарэння праз вуглавую і лінейную скорасці:

$$a = \omega v. \tag{8}$$

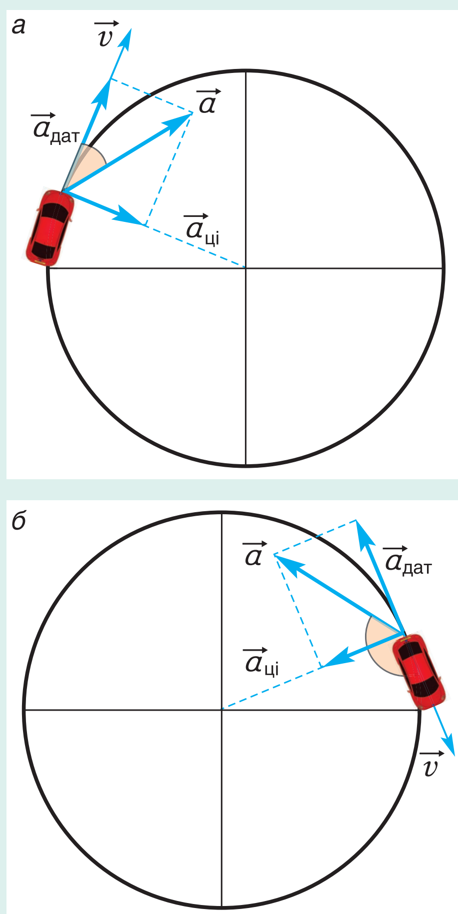
Для дапытлівых

А як накіравана паскарэнне $\vec{a}$ цела, якое рухаецца па акружнасці, калі модуль яго скорасці $v \neq \text{const}$?

На малюнку 93, *а* (выгляд зверху) аўтамабіль, які імчыцца па кальцавой трасе, набірае скорасць. Паскарэнне аўтамабіля $\vec{a}$ роўна суме двух складальнікаў: $\vec{a} = \vec{a}_{\text{ці}} + \vec{a}_{\text{дат}}$. Цэнтраімклівае паскарэнне $\vec{a}_{\text{ці}}$ абумоўлена змяненнем *напрамку* скорасці. А датычнае да траекторыі паскарэнне $\vec{a}_{\text{дат}}$ узнікае з-за змянення *модуля* скорасці. Пры наборы скорасці вектар $\vec{a}_{\text{дат}}$ накіраваны гэтак жа, як $\vec{v}$, а вектар $\vec{a}$ ўтварае з $\vec{v}$ востры вугал.

На малюнку 93, *б* аўтамабіль тармозіць. Модуль скорасці памяншаецца, складальнік $\vec{a}_{\text{дат}}$ накіраваны супраць вектара $\vec{v}$, а вугал паміж паскарэннем $\vec{a}$ і скорасцю $\vec{v}$ — тупы.

У абодвух выпадках модуль паскарэння $a = \sqrt{a_{\text{ці}}^2 + a_{\text{дат}}^2}$.



Мал. 93

Галоўныя вывады

1. Цела, якое рухаецца па акружнасці са скорасцю, модуль якой $v = \text{const}$, мае цэнтраімклівае паскарэнне.
2. Цэнтраімклівае паскарэнне перпендыкулярна скорасці і накіравана да цэнтра акружнасці.
3. Модуль цэнтраімклівага паскарэння $a = \frac{v^2}{R}$.

Кантрольныя пытанні

1. У якім выпадку паскарэнне выклікана: а) змяненнем толькі модуля скорасці; б) змяненнем толькі напрамку скорасці?
2. Чаму паскарэнне пры руху пункта па акружнасці з пастаянным модулем скорасці называюць: а) цэнтраімклівым; б) нармальным?
3. Як цэнтраімклівае паскарэнне звязана з лінейнай скорасцю і радыусам акружнасці?

Прыклад рашэння задачы

Перыяд вярчэння T_1 першага кола ў 4 разы большы за перыяд вярчэння T_2 другога кола, а яго радыус R_1 у 2 разы меншы за радыус R_2 другога кола. У якога кола большае цэнтраімклівае паскарэнне пунктаў на яго вобадзе? У колькі разоў?

Дадзена:

$\frac{T_1}{T_2} = 4$

$\frac{R_2}{R_1} = 2$

$\frac{a_2}{a_1}$ — ?

Рашэнне

Згодна з формулай (6) адносіна модуляў цэнтраімклівых паскарэнняў пунктаў на вобадзе другога і першага кола:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{4\pi^2 R_2}{T_2^2} : \frac{4\pi^2 R_1}{T_1^2} = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{T_1^2}{T_2^2}.$$

Па ўмове задачы:

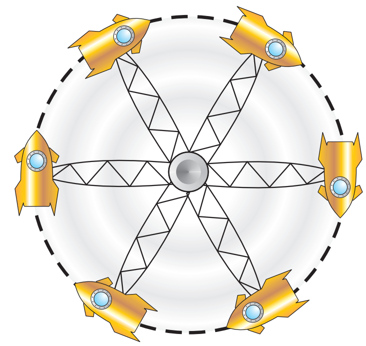
$$R_2 = 2R_1;\ T_1 = 4T_2.$$

Тады

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{2R_1}{R_1} \cdot \frac{16T_2^2}{T_2^2} = 32.$$

Адказ: $\frac{a_2}{a_1} = 32$.

Практыкаванне 10



Мал. 94

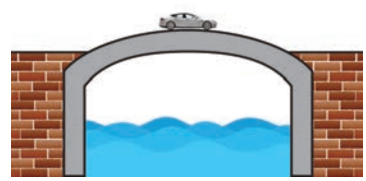
1. Карусель (мал. 94, выгляд зверху) раўнамерна верціцца з частатой $\nu = 0{,}10\,\frac{1}{\text{с}}$. Вызначыце вуглавую скорасць вярчэння каруселі. Знайдзіце лінейную скорасць і паскарэнне «ракеты». Лічыце «ракету» матэрыяльным пунктам, які знаходзіцца на адлегласці $R = 5{,}0$ м ад восі вярчэння каруселі.

2. Рэактыўны самалёт ляціць па дузе радыусам $R = 6$ км са скорасцю, модуль якой пастаянны і роўны $v = 1800\,\frac{\text{км}}{\text{г}}$. Вызначыце паскарэнне самалёта.

3. Вызначыце цэнтраімклівае паскарэнне руху Зямлі вакол Сонца па кругавой арбіце радыусам $R = 1{,}5 \cdot 10^8$ км.

Мал. 95

4. Модуль скорасці крайніх пунктаў дыска, які раўнамерна верціцца, $v = 55\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, а модуль цэнтраімклівага паскарэння гэтых пунктаў $a = 10\,\frac{\text{км}}{\text{с}^2}$. Знайдзіце радыус дыска.



Мал. 96

5. Ротар гідратурбіны верціцца раўнамерна з вуглавой скорасцю $\omega = 4{,}0\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}$. Вызначыце перыяд вярчэння ротара, а таксама паскарэння пунктаў ротара, якія знаходзяцца на адлегласцях $R_1 = 20$ см і $R_2 = 50$ см ад восі вярчэння.

6. Па арэне цырка па акружнасці дыяметрам $d = 13$ м рухаецца веласіпедыст. Модуль яго лінейнай скорасці $v = \text{const}$. За час $t = 22$ с радыус-вектар, які задае яго становішча, павярнуўся на вугал $\Delta\varphi = 5\pi$ рад. Вызначыце вуглавую і лінейную скорасці веласіпедыста, а таксама шлях і перамяшчэнне, выкананыя ім за гэты час.

7. У колькі разоў модулі лінейнай скорасці і паскарэння канца мінутнай стрэлкі гадзінніка на вежы Прывакзальнай плошчы Мінска (мал. 95) большыя за модулі скорасці і паскарэння канца гадзіннікавай стрэлкі? Даўжыня мінутнай стрэлкі $R_1 = 1{,}70$ м, даўжыня гадзіннікавай стрэлкі $R_2 = 1{,}30$ м.

8. Вызначыце цэнтраімклівае паскарэнне аўтамабіля, які праязджае сярэдзіну выпуклага моста (мал. 96) са скорасцю, модуль якой пастаянны і роўны $v = 36\,\frac{\text{км}}{\text{г}}$. Радыус дугі моста $R = 40$ м.

9. Матацыкліст выконвае цыркавы нумар, рухаючыся ў гарызантальнай плоскасці па вертыкальнай сцяне (мал. 97, выгляд зверху) па акружнасці радыусам $R = 9{,}0$ м. Вызначыце лінейную скорасць матацыкліста, калі модуль яго цэнтраімклівага паскарэння $a = 16\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Матацыкліста лічыце матэрыяльным пунктам.

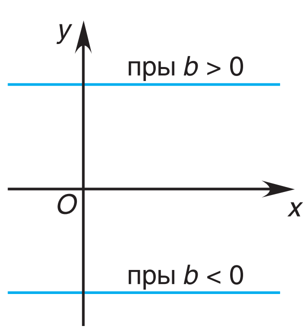
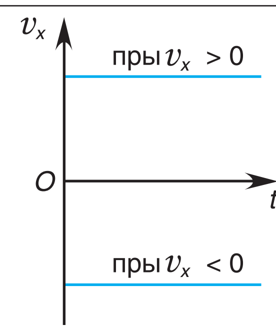
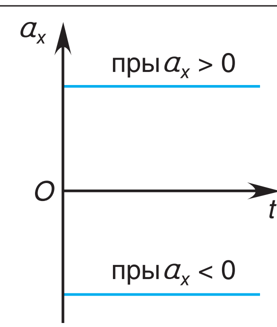
Мал. 97

10. Вызначыце лінейныя скорасці і цэнтраімклівыя паскарэнні пунктаў на паверхні Зямлі: а) на экватары; б) на шыраце $\varphi = 60°$. Радыус Зямлі прыміце роўным $R = 6400$ км.

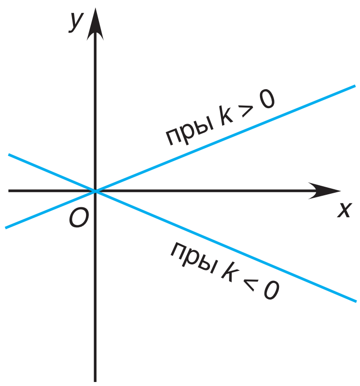
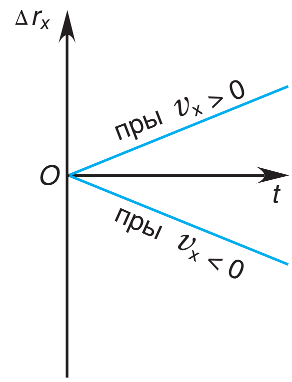
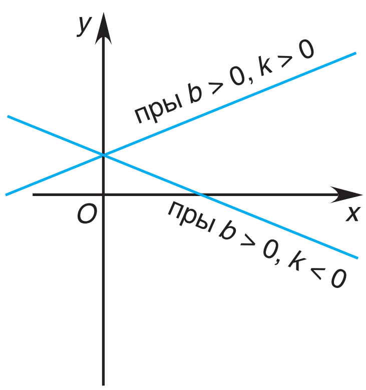
11. Верталёт роўназапаволена зніжаецца па вертыкалі з некаторай вышыні. Модуль паскарэння верталёта $a = 0{,}20\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. За час зніжэння вінт верталёта, верцячыся раўнамерна з частатой $\nu = 300\ \frac{\text{аб}}{\text{мін}}$, выканаў $N = 120$ абаротаў. З якой вышыні зніжаўся верталёт, калі да моманту пасадкі яго скорасць паменшылася да нуля?

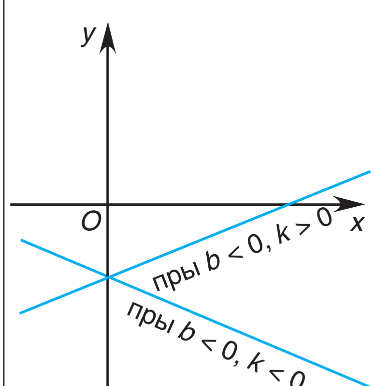
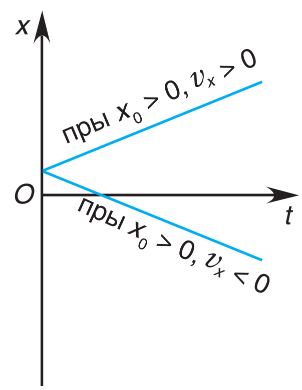
12. Па формуле $a = \frac{v^2}{R}$ цэнтраімклівае паскарэнне адваротна прапарцыянальна радыусу R, а па формуле $a = \omega^2 R$ — прама прапарцыянальна яму. Ці няма ў гэтым супярэчнасці? Растлумачце на прыкладах.

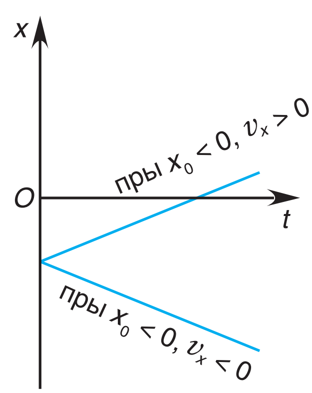
Асноўныя кінематычныя велічыні і іх графікі

Функцыя ў матэматыцы	Графік функцыі	Залежнасць у фізіцы	Графік залежнасці
Пастаянная велічыня $y = b$, дзе $b = \text{const}$		Праекцыя скорасці пры раўнамерным руху $v_x = \text{const}$	
		Праекцыя паскарэння пры роўнапераменным руху $a_x = \text{const}$	

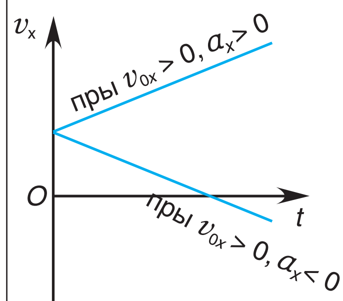
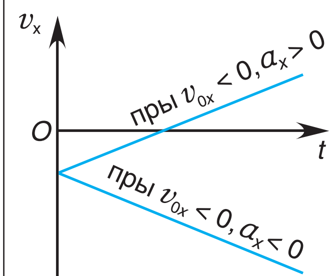
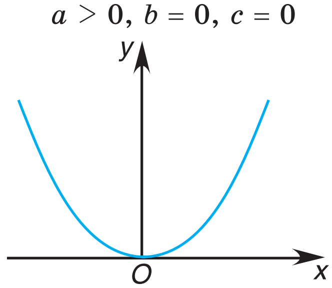
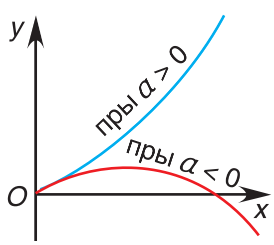
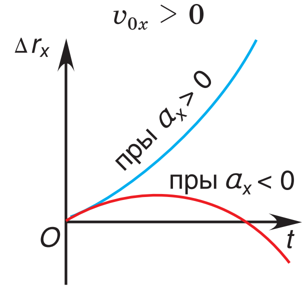
Працяг

<table>
<tr><th>Функцыя ў матэматыцы</th><th>Графік функцыі</th><th>Залежнасць у фізіцы</th><th>Графік залежнасці</th></tr>
<tr>
<td>Прамая прапарцыянальная залежнасць
$y = kx$,
дзе $k = \text{const}$</td>
<td>
</td>
<td>Праекцыя перамяшчэння пры раўнамерным руху
$\Delta r_x = \upsilon_x t$,
дзе $\upsilon_x = \text{const}$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Лінейная функцыя
$y = kx + b$,
дзе
$k = \text{const}$,
$b = \text{const}$</td>
<td>Графік функцыі



</td>
<td>Каардыната пры раўнамерным руху
$x = x_0 + \upsilon_x t$,
дзе
$x_0 = \text{const}$,
$\upsilon_x = \text{const}$</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

Працяг

Функцыя ў матэматыцы	Графік функцыі	Залежнасць у фізіцы	Графік залежнасці
		Праекцыя скорасці пры роўнапераменным руху $v_x = v_{0x} + a_x t$, дзе $v_{0x} = \text{const}$, $a_x = \text{const}$	 
Квадратычная функцыя $y = ax^2 + bx + c$, дзе $a = \text{const} \neq 0$, $b = \text{const}$, $c = \text{const}$	$a > 0,\ b = 0,\ c = 0$  $b > 0,\ c = 0$  	Праекцыя перамяшчэння пры роўнапераменным руху $\Delta r_x = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}$, дзе $v_{0x} = \text{const}$, $a_x = \text{const}$	$v_{0x} > 0$ 
		Каардыната пры раўнамерным руху $x = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}$, дзе $x_0 = \text{const}$, $v_{0x} = \text{const}$, $a_x = \text{const}$	Графік каардынаты атрымліваецца шляхам зруху графіка праекцыі перамяшчэння на $\lvert x_0 \rvert$: уверх (пры $x_0 > 0$), уніз (пры $x_0 < 0$)

Тэмы праектных заданняў па раздзеле «Асновы кінематыкі

1. Час і яго вымярэнне.
2. Фізіка ў маёй будучай прафесіі.
3. Аналогіі паміж пастунальным і вярчальным рухамі.
4. Спосабы лічэння часу. Каляндар.
5. Аптымальны варыянт майго руху з дому ў школу.
6. Прыборы для вымярэння скорасці і паскарэння.