



§ 3.

Скалярные и векторные величины. Действия над векторами

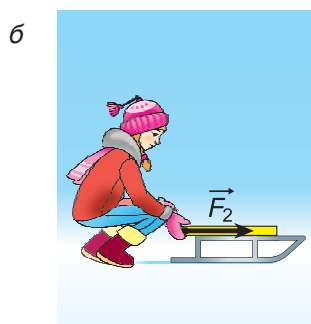
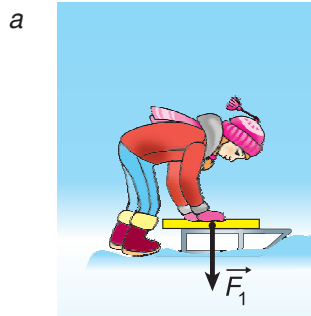


Рис. 14

В 7-м и 8-м классах мы рассматривали различные физические величины. Для одних величин достаточно знать их числовое значение и единицу измерения. Например, масса $m = 25$ кг, путь $s = 10$ м. Такие величины называют **скалярными**. Для других величин необходимо знать еще и **направление**. Их называют **векторными**. Например, векторной величиной является сила. Почему?

На рисунках 14, а и 14, б девочка действует на санки силой, имеющей одно и то же числовое значение. Но в первом случае санки лишь немного погрузились в снег, а во втором — пришли в движение. Значит, сила определяется не только числовым значением, но и *направлением*. Сила — величина векторная.

Векторной величиной является и скорость движения тел (рис. 15), и многие другие физические величины.

Что нужно знать о векторных величинах (векторах)?

1. Векторы характеризуются модулем и направлением в пространстве.

Модулем вектора называется его числовое значение.

Вектор изображают в виде направленного отрезка (стрелки). Стрелка указывает, куда направлен вектор (рис. 14, 15). Длина стрелки характеризует модуль вектора (рис. 16). Над буквенным обозначением вектора ставят стрелку, например: $\vec{F}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$.

Модуль вектора обозначают той же буквой, но без стрелки над ней или символом $|\dots|$. Например, модуль вектора $\vec{a}$ на рисунке 16 равен $a = |\vec{a}| = 4$.

Модуль любого (не равного нулю) вектора — число положительное.

2. Векторы равны между собой, если равны их модули и одинаковы направления.

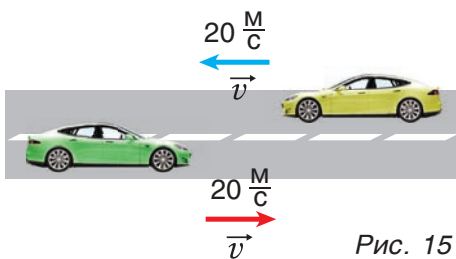


Рис. 15

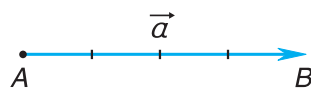


Рис. 16

Равные векторы лежат на одной и той же прямой или на параллельных прямых и направлены в одну и ту же сторону. На рисунке 17 $\vec{a} = \vec{b}$, $\vec{c} = \vec{d}$. Однако, несмотря на равенство модулей, $\vec{a} \neq \vec{c}$, так как у векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$ различные направления.

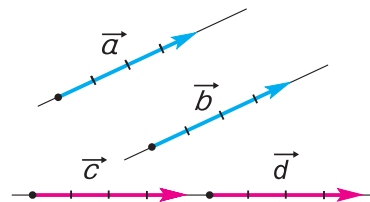


Рис. 17

3. Угол между векторами. Чтобы найти угол φ между векторами (рис. 18, а), нужно совместить их начала (рис. 18, б). Если направления векторов одинаковы, то $\varphi = 0$ (рис. 18, в), если противоположны, то $\varphi = 180^\circ$ (рис. 18, г).

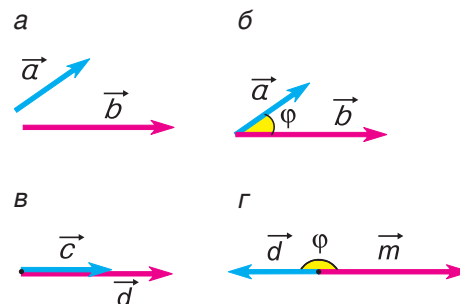


Рис. 18

4. Умножение вектора на число. Произведение вектора $\vec{a}$ на число k есть вектор $\vec{b} = k\vec{a}$. Чему равен его модуль? Куда направлен вектор $\vec{b}$?

- Модуль вектора $\vec{b}$ равен $b = |k|a$.
- Если $k > 0$, то вектор $\vec{b}$ направлен так же, как вектор $\vec{a}$, а если $k < 0$, то противоположно ему.

На рисунке 19 а, б, в и г показаны результаты умножения вектора $\vec{a}$ на 2, на 0,5, на (-3) и на (-1) соответственно.

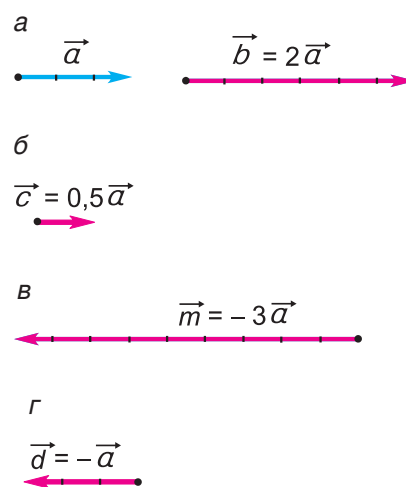


Рис. 19

5. Противоположные векторы. Вектор $\vec{d}$ называется *противоположным* вектору $\vec{a}$, если $\vec{d} = -\vec{a}$. У векторов $\vec{d}$ и $\vec{a}$ одинаковые модули, но противоположные направления (рис. 19, а, г).

6. Сложение векторов. В 7-м классе вы складывали силы, направленные или одинаково, или в противоположные стороны. Результатом сложения в первом случае была сила, модуль которой равен $F_1 + F_2$, а во втором $|F_1 - F_2|$.

То же самое получается и при сложении векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 20). Если они направлены одинаково (рис. 20, а), то их сумма $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ имеет модуль $c = a + b$. Если же направления векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположны (рис. 20, б), то модуль их суммы $c = |a - b|$. Обратите внимание: в последнем случае вектор $\vec{c}$ направлен так, как вектор с большим модулем (т. е. как вектор $\vec{a}$).

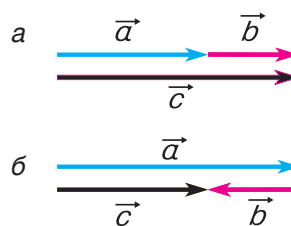


Рис. 20

А как сложить векторы, направленные под любым углом друг к другу? Для этого можно использовать любое из двух следующих далее правил.

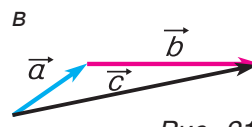
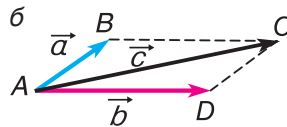


Рис. 21

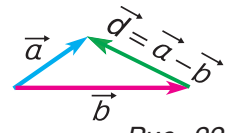


Рис. 22

Правило параллелограмма. Совместим начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 21, а), сохраняя их направления (рис. 21, б). Построим параллелограмм $ABCD$, принимая векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ за его стороны. Сумма векторов $\vec{a} + \vec{b}$ есть вектор $\vec{c}$, совпадающий с диагональю AC параллелограмма: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (см. рис. 21, б).

Правило треугольника. Совместим конец вектора $\vec{a}$ с началом вектора $\vec{b}$, сохраняя их направления (рис. 21, в). Вектор $\vec{c}$, проведенный из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$, равен сумме $\vec{a} + \vec{b}$ (см. рис. 21, в).

Из рисунков 21, б и 21, в ясно, что правило треугольника и правило параллелограмма дают одинаковые результаты. А как найти разность векторов?

7. Вычитание векторов. Пусть начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ совмещены (рис. 22). Проведем вектор $\vec{d}$ из конца *вычитаемого* вектора $\vec{b}$ в конец *уменьшаемого* вектора $\vec{a}$. Вектор $\vec{d}$ есть искомая разность: $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$. Докажите с помощью построения, что $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Такой способ вычитания векторов очень удобен.

Для любознательных

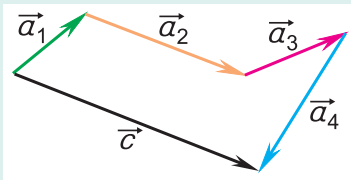


Рис. 23

8. Правило многоугольника. Чтобы найти сумму нескольких векторов (например, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$), каждый следующий вектор нужно проводить из конца предыдущего (рис. 23). Замыкающий вектор $\vec{c}$, проведенный из начала первого вектора $\vec{a}_1$ в конец последнего $\vec{a}_4$, есть сумма данных векторов: $\vec{c} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4$. *Правило многоугольника* следует из правила треугольника.

9. Модуль суммы векторов. Не путайте *модуль суммы* векторов, т. е. $|\vec{a} + \vec{b}|$, и *сумму их модулей* $|\vec{a}| + |\vec{b}|$! Равенство $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ выполняется только для одинаково направленных векторов (см. рис. 20, а на с. 13). Во всех остальных случаях $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$, т. е. *модуль суммы векторов меньше суммы их модулей*. Так получается потому, что в любом треугольнике (см. рис. 21, в) длина одной стороны меньше суммы длин двух других сторон. Проверьте это на примерах.

10. Нуль-вектор. Пусть вектор $\vec{a}$ равен вектору $\vec{b}$. Тогда их разность $\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$, т. е. нуль-вектору.

■ Главные выводы

1. Векторные величины характеризуются модулем и направлением, скалярные — только числовым значением.
2. Сумму двух векторов находят по правилу параллелограмма или треугольника.
3. Разность двух векторов находят, проводя вектор из конца вычитаемого вектора в конец уменьшаемого (при совмещенных началах векторов).
4. Разность векторов $\vec{a} - \vec{b}$ можно найти как сумму $\vec{a} + (-\vec{b})$.
5. Произведение вектора $\vec{a}$ на число k есть вектор $\vec{b} = k\vec{a}$. При $k > 0$ направления векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}$ совпадают, а при $k < 0$ — противоположны. Модуль вектора $\vec{b}$ равен $b = |k|a$.

? Контрольные вопросы

1. В чем различие между векторными и скалярными величинами? Приведите примеры.
2. В каком случае векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ одинаково направлены? Противоположно направлены?
3. Может ли модуль вектора $k\vec{a}$ быть меньше модуля вектора $\vec{a}$? При каком условии?
4. Как сложить два одинаково направленных вектора? Два вектора противоположных направлений?
5. Как найти сумму векторов по правилу треугольника? Параллелограмма?
6. Как найти разность двух векторов?

➔ Домашнее задание

Вырежьте из плотной бумаги пять стрелок различной длины: $a = 3$ см, $b = 4$ см, $c = 5$ см, $d = 7$ см, $e = 9$ см. Стрелки моделируют векторы. Обозначьте векторы, соответственно, как $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$.

Покажите на моделях, как складывать и вычитать векторы.

Какими будут углы между векторами для каждого из равенств: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{d}$, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$, $\vec{b} - \vec{e} = \vec{c}$, $\vec{a} - \vec{b} = \vec{d}$?

Каковы максимальное и минимальное значения модуля суммы и модуля разности для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$? Для $\vec{c}$ и $\vec{d}$?