



§ 12.

Перемещение, координата и путь при равнопеременном движении

Мы знаем, что при равнопеременном движении скорость тела линейно зависит от времени. А как зависит от времени перемещение? Координата? Пройденный путь?

В предыдущем параграфе для равнопеременного движения была найдена зависимость проекции скорости от времени:

$$v_x = v_{0x} + a_x t \quad (1)$$

и получена формула для проекции перемещения:

$$\Delta r_x = \frac{v_{0x} + v_x}{2} t. \quad (2)$$

Подставляя v_x из равенства (1) в (2), находим зависимость проекции перемещения от времени:

$$\Delta r_x = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}. \quad (3)$$

Отметим, что при движении с постоянным ускорением соотношения (1) и (3) выполняются и для векторов скорости и перемещения:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} t, \quad (4)$$

$$\Delta \vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}. \quad (5)$$

Учитывая, что проекция перемещения $\Delta r_x = x - x_0$, из формулы (3) находим координату:

$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}. \quad (6)$$

Формула (6) выражает *кинематический закон равнопеременного движения*. Функции (3) и (6) называются *квадратичными*. Следовательно, **при равнопеременном движении проекция перемещения тела и его координата квадратично зависят от времени.**

Сравним зависимости основных кинематических величин от времени для двух видов прямолинейного движения: равномерного и равнопеременного (табл. 1).

Таблица 1

Кинематические величины	Равномерное движение	Равнопеременное движение
Проекция ускорения	$a_x = 0$	$a_x = \text{const}$
Проекция скорости	$v_x = \text{const}$	$v_x = v_{0x} + a_x t$
Проекция перемещения	$\Delta r_x = v_x t$	$\Delta r_x = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}$
Координата	$x = x_0 + v_x t$	$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}$

Из таблицы видно, что при $a_x = 0$ формулы равнопеременного движения переходят в формулы равномерного.

Рассмотрим графики проекций v_x , Δr_x и координаты x на конкретном примере: три тела (0, 1 и 2) движутся вдоль оси Ox . Их начальные скорости одинаковы ($v_{0x} = 20 \frac{\text{см}}{\text{с}}$), а проекции ускорения различны: $a_x = 0$; $a_x = 5 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$; $a_x = -5 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$.

По формуле (1) $v_x = v_{0x} + a_x t$ построим графики проекции скорости этих тел (графики 0, 1, 2 на рис. 79). Графики прямолинейны, а их наклон определяется значением проекции ускорения a_x . График 2 пересекает ось времени в момент поворота t_{π} .

Перейдем к графикам проекции перемещения Δr_x (рис. 80).

Как мы знаем, при $a_x = 0$ (т. е. для равномерного движения) $\Delta r_x = v_x t$ и график $\Delta r_x(t)$ — наклонная прямая (график 0* на рис. 80).

Из таблицы 1 видно, что формулы для проекции перемещения Δr_x при равномерном и равнопеременном движениях отличаются только на слагаемое $\frac{a_x t^2}{2}$. Поэтому при $a_x > 0$ точки графика 0* для каждого значения t следует поднять на $\frac{a_x t^2}{2}$ (график 1*), а при $a_x < 0$ (график 2*) — настолько же опустить (рис. 80).

Так как Δr_x квадратично зависит от времени (см. формулу (3)), графики проекции перемещения при равнопеременном движении являются участками парабол (рис. 80).

Обратите внимание на поведение графиков 2 и 2* в момент поворота t_{π} . График 2 для v_x

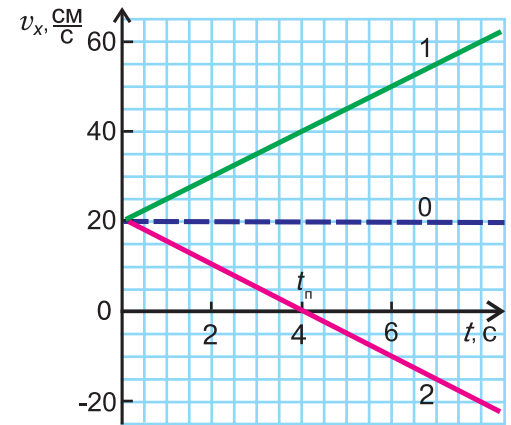


Рис. 79

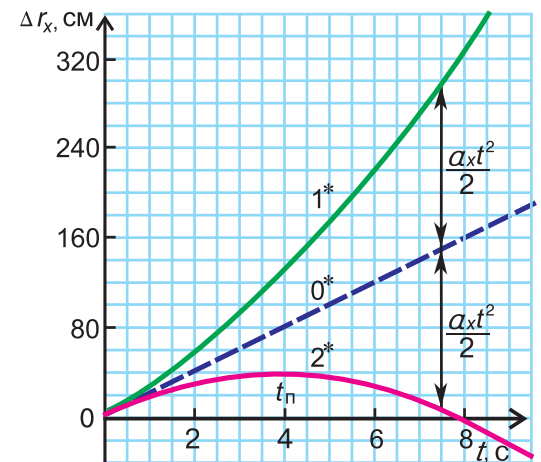


Рис. 80

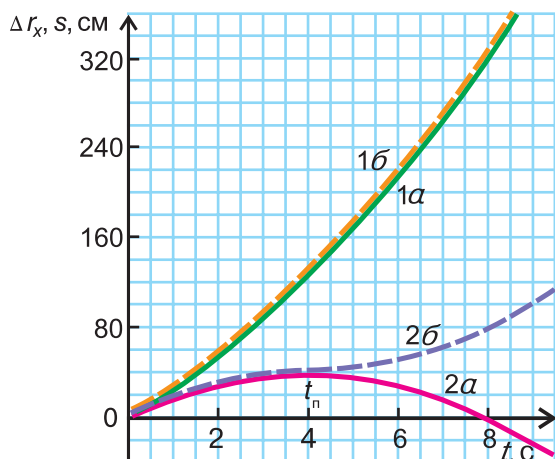


Рис. 81

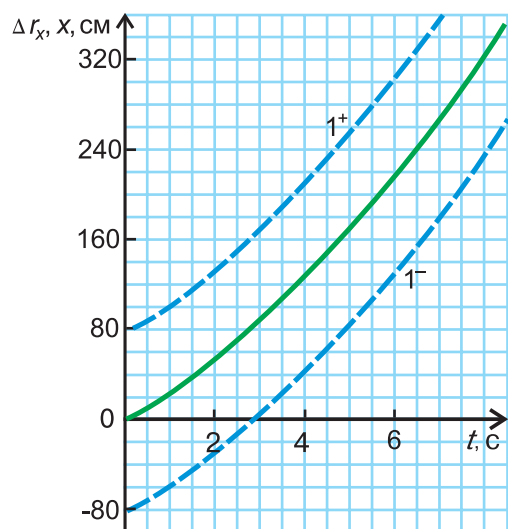


Рис. 82

(рис. 79) в этот момент проходит через нуль, а график 2* для Δr_x (рис. 80) при $t = t_{\text{п}}$ достигает максимума, а затем начинает опускаться. Графики подтверждают: в момент поворота направление движения тела изменяется на противоположное.

А каким будет график пути? Для движения, при котором направление скорости не изменяется, график пути 1б (рис. 81) совпадает с графиком проекции перемещения 1а. Если же скорость меняет свое направление, то график пути s (2б) и график проекции перемещения Δr_x (2а) будут совпадать лишь до момента поворота $t_{\text{п}}$.

При $t > t_{\text{п}}$ проекция перемещения Δr_x начинает уменьшаться, а путь s продолжает расти. Он увеличивается на столько, на сколько за то же время уменьшается проекция перемещения.

От графика проекции перемещения Δr_x легко перейти к графику координаты x (рис. 82).

Так как, согласно формуле (6), $x = x_0 + \Delta r_x$, то графики координаты x (параболы 1⁺ и 1⁻) получаются путем сдвига графика Δr_x на величину $|x_0|$. Сдвиг вверх происходит при $x_0 > 0$, а вниз — при $x_0 < 0$ (рис. 82).

Выведем еще две формулы, полезные для решения задач о равнопеременном движении.

Выразим время из формулы проекции скорости (1): $t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x}$. Подставив это выражение в формулу (2), получим: $\Delta r_x = \frac{v_{0x} + v_x}{2} \cdot \frac{v_x - v_{0x}}{a_x} = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}$. Следовательно, при равнопеременном движении

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x \Delta r_x. \quad (7)$$

В случае когда начальная скорость и ускорение одинаково направлены, из равенства (7) следует:

$$v^2 = v_0^2 + 2as, \quad (8)$$

где s — пройденный путь.

■ Главные выводы

1. При равнопеременном движении тела его перемещение и координата — квадратичные функции времени.
2. Графики зависимости проекции перемещения и координаты от времени для равнопеременного движения являются участками парабол.
3. Вершина параболы на графике проекции перемещения соответствует моменту времени, при котором мгновенная скорость равна нулю.

? Контрольные вопросы

1. Как зависят перемещение и координата от времени при равнопеременном движении?
2. Как с помощью графика проекции перемещения для равномерного движения построить график этой величины для равнопеременного движения?
3. Как, зная график проекции перемещения, получить график координаты? Что еще при этом надо знать?
4. В каком случае графики проекции перемещения и координаты совпадают?
5. Где расположена вершина параболы на графике координаты, если $v_{0x} > 0$, $a_x > 0$?



Пример решения задачи

Шарику, находящемуся в точке A , расположенной посередине наклонного желоба длиной $l_0 = 100$ см (рис. 83), сообщили начальную скорость $\vec{v}_0$ вдоль наклонного желоба вверх. Ускорение шарика $\vec{a}$ направлено вдоль желоба вниз. Найдите координату точки поворота $x_{\text{п}}$ и время $t_{\text{п}}$, за которое шарик ее достигнет, если $v_0 = 40 \frac{\text{см}}{\text{с}}$, $a = 20 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$.

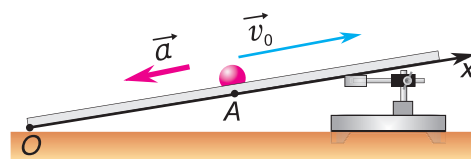


Рис. 83

Определите время, когда шарик вернется в точку A , и время, когда он окажется в точке O . Постройте графики проекций скорости и перемещения, а также координаты шарика.



Пример решения задачи

Дано:

$$l_0 = 100 \text{ см}$$

$$v_0 = 40 \frac{\text{см}}{\text{с}}$$

$$a = 20 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$$

$$x_0 = 50 \text{ см}$$

$$x_{\text{п}} — ?$$

$$t_{\text{п}} — ?$$

$$t_2 — ?$$

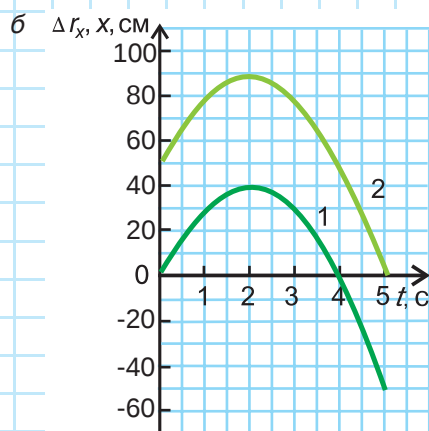
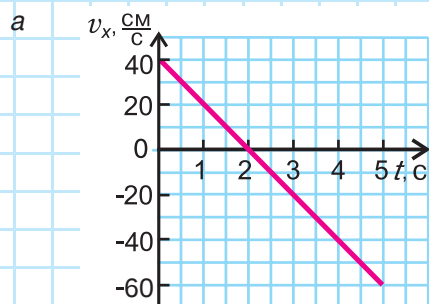
$$t_3 — ?$$

Решение

Выберем ось Ox , как показано на рисунке 83. Тогда проекция скорости $v_x = v_0 - at$, проекция перемещения $\Delta r_x = v_0 t - \frac{at^2}{2}$, координата $x = x_0 + v_0 t - \frac{at^2}{2}$, где $x_0 = 0,5l_0 = 50 \text{ см}$, $v_{0x} = v_0 = 40 \frac{\text{см}}{\text{с}}$, $a_x = -a = -20 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$.

По этим формулам для моментов времени $t = 0; 1,0 \text{ с}; 2,0 \text{ с}; 3,0 \text{ с}; 4,0 \text{ с}; 5,0 \text{ с}$ найдем значения v_x и Δr_x и занесем результаты в таблицу.

$t, \text{ с}$	0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
$v_x, \frac{\text{см}}{\text{с}}$	40	20	0	-20	-40	-60
$\Delta r_x, \text{ см}$	0	30	40	30	0	-50



Используя полученные значения, строим графики проекций скорости (рис. 84, а) и перемещения (рис. 84, б, график 1) за промежуток времени от 0 до 5 с.

График координаты получим, сдвинув график проекции перемещения на $x_0 = 50 \text{ см}$ вверх (график 2 на рис. 84, б). Из графиков и таблицы находим: координата точки поворота $x_1 = 90 \text{ см}$; шарик достиг ее в момент $t_{\text{п}} = 2,0 \text{ с}$; в точке А шарик оказался при $t_2 = 4,0 \text{ с}$, а в точке О — при $t_3 = 5,0 \text{ с}$.

Ответ: $x_{\text{п}} = 90 \text{ см}$; $t_{\text{п}} = 2,0 \text{ с}$;
 $t_2 = 4,0 \text{ с}$; $t_3 = 5,0 \text{ с}$.

Рис. 84

Упражнение 8

1. Дети съезжают с горки на санках за время $t = 3,0$ с, двигаясь с постоянным ускорением $a = 2,0 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Начальная скорость движения санок равна нулю. Определите длину горки.

2. Электровоз, подходя к станции со скоростью $v = 20 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, начинает равномерно тормозить и через время $t = 1,0$ мин останавливается. Определите тормозной путь электровоза. С каким ускорением двигался электровоз?

3. Проекция скорости шарика, движущегося по прямолинейному желобу, зависит от времени по закону $v_x = A + Bt$, где $A = 20 \frac{\text{см}}{\text{с}}$, $B = 2,0 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$. Определите проекцию начальной скорости и проекцию ускорения шарика. Найдите зависимость проекции перемещения Δr_x шарика от времени. Найдите значения v_x и Δr_x в момент времени $t = 6,0$ с. Постройте графики проекций скорости и перемещения шарика.

4. По графикам проекции скорости прямолинейно движущихся мотоциклистов (рис. 85) постройте графики проекций их ускорения и перемещения. Охарактеризуйте эти движения. Чему равно отношение путей, пройденных каждым мотоциклистом к моментам времени $t_1 = 4,0$ с и $t_2 = 8,0$ с от начала движения? Запишите кинематический закон движения каждого из мотоциклистов, считая $x_0 = 0$.

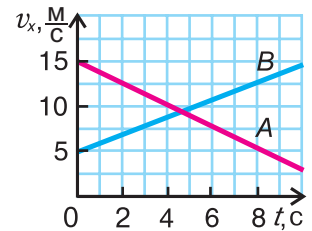


Рис. 85



5. Подъемный кран поднимает груз из состояния покоя с постоянным ускорением $a = 0,1 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Как относятся пути, проходимые грузом за 1, 2, 3 и 4-ю секунды движения? Подтвердите ответ графиком зависимости модуля скорости движения груза от времени.

6. Кинематический закон движения брошенного вверх мяча во время игры детей на площадке имеет вид $y = At - Bt^2$, где $A = 15,0 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $B = 5,0 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Определите путь, модуль перемещения и координату мяча к моментам времени $t_1 = 1,0$ с, $t_2 = 2,0$ с и $t_3 = 3,0$ с от начала движения. Постройте графики зависимости от времени проекций ускорения и скорости, координаты мяча, модуля перемещения и пути.



7. Автомобиль первую половину пути двигался равномерно со скоростью $v_1 = 36 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а вторую — равноускоренно. Определите среднюю скорость движения автомобиля на всем маршруте, если в конце движения скорость $v_2 = 20 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.



8. Пассажир, стоявший на платформе у начала отправляющегося поезда, определил, что первый вагон прошел мимо него за время $t_1 = 4 \text{ с}$, а весь поезд — за $t_2 = 16 \text{ с}$. Сколько вагонов было у поезда? За какое время прошел мимо пассажира последний вагон? Движение поезда считать равноускоренным, а вагоны одинаковыми.

9. Графики движения для двух велосипедистов (рис. 86) являются параболой с вершиной в начале координат. Чем отличаются движения велосипедистов? Чему равны проекции на ось Ox ускорений и начальных скоростей движения для каждого из велосипедистов? Каковы проекции и модули скоростей движения велосипедистов при $t = 3,0 \text{ с}$?



10. Используя график зависимости координаты транспортного средства от времени (рис. 87), опишите движение данного транспортного средства.

По графику координаты постройте график скорости движения этого транспортного средства. Как изменялась скорость его движения?

Движению какого транспортного средства может соответствовать этот график? Почему?

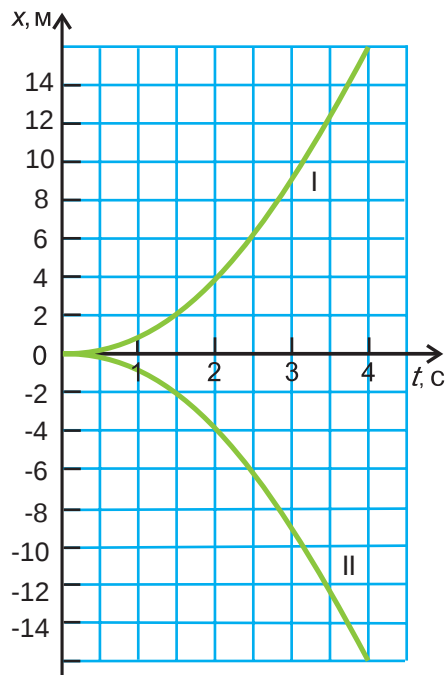


Рис. 86

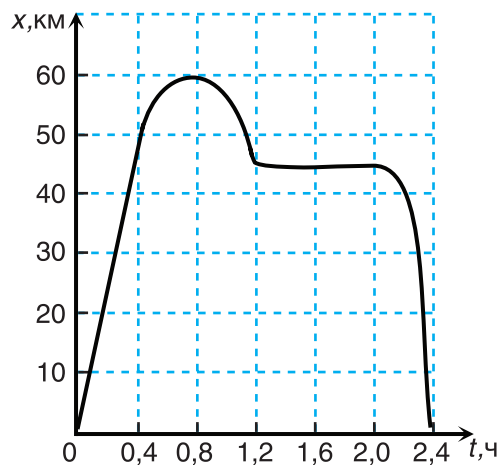


Рис. 87