§ 13. Криволинейное движение. Линейная и угловая скорости

Мы изучили прямолинейное движение — равномерное и равнопеременное. Криволинейное движение (рис. 88, *а*, *б*) встречается гораздо чаще. Каковы закономерности такого движения?

Пусть тело движется по криволинейной траектории, изображенной на рисунке 88, *в*. Ее (как и любую другую) можно приближенно разбить на прямолинейные участки (MK, AB, ...) и дуги окружностей (KA, BD, ...) соответствующих радиусов.

Прямолинейное движение мы изучили. Рассмотрим теперь движение тела (считая его материальной точкой) по окружности (рис. 89).

Чтобы охарактеризовать положение тела, проводят вектор $\vec{R}$ из центра окружности в ту точку траектории, где в данный момент это тело находится. Вектор $\vec{R}$ называют ***радиус-вектором***.

На рисунке 89 радиус-вектор $\vec{R}_1$ указывает, где находится тело в момент времени t_1, а радиус-вектор $\vec{R}_2$ — в момент t_2.

Тело *движется по окружности*, а радиус-вектор совершает *вращательное движение*. За время $\Delta t = t_2 - t_1$ тело пройдет путь, равный длине дуги AB, а радиус-вектор повернется на угол $\Delta\varphi$.

В СИ угол поворота измеряется в *радианах* (сокращенно — *рад*). **Угол в 1 рад — это центральный угол, длина дуги которого равна радиусу окружности** (рис. 89, угол COD).

Значит, если тело пройдет по окружности путь s, то угол поворота $\Delta\varphi$, выраженный в радианах, будет равен

$$\Delta\varphi = \frac{s}{R}. \qquad (1)$$

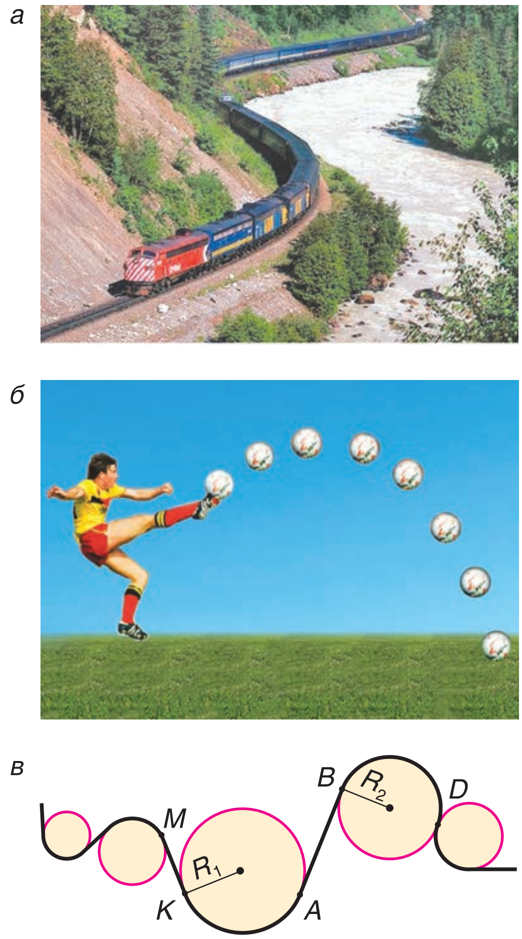

Рис. 88

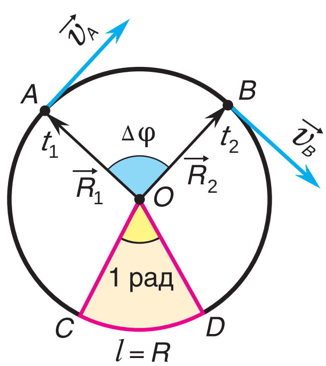

Рис. 89

Для одного полного оборота по окружности путь $s = 2\pi R$, а угол поворота $\Delta\varphi_1 = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi$ рад. Значит, 2π рад $= 360°$, а 1 рад $= \frac{360°}{2\pi} \approx$ $\approx 57{,}30° \approx 57°18'$.

Двигаясь по траектории, в каждый момент времени тело имеет мгновенную скорость $\vec{v}$, направленную по касательной к окружности (рис. 89). При рассмотрении движения по окружности ее принято называть *линейной скоростью*.

Рассмотрим самое простое из криволинейных движений — *движение по окружности, при котором за любые равные промежутки времени тело (материальная точка) проходит одинаковые пути.* В этом случае модуль линейной скорости $v = \text{const}$. Однако скорость движения $\vec{v}$ как векторная величина непостоянна ($\vec{v} \neq \overrightarrow{\text{const}}$), т. к. ее направление непрерывно изменяется (рис. 89).

При движении по окружности со скоростью, модуль которой $v = \text{const}$, его радиус-вектор $\vec{R}$ совершает *равномерное вращение*. Быстроту вращательного движения характеризуют *угловой* скоростью. Ее обозначают буквой ω (омега). При равномерном вращении **угловая скорость равна отношению угла поворота $\Delta\varphi$ радиус-вектора к промежутку времени Δt, за который этот поворот произошел:**

$$\boxed{\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}}. \qquad (2)$$

При равномерном вращении угловая скорость ω постоянна, а ее числовое значение равно углу поворота радиус-вектора за единицу времени.

Единица угловой скорости в СИ — 1 *радиан в секунду* $\left(1\,\frac{рад}{с}\right)$.

Как связан модуль линейной скорости v с угловой скоростью ω? Подставив $\Delta\varphi = \frac{s}{R}$ в формулу $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, получим: $\omega = \frac{s}{R\Delta t}$. Отношение $\frac{s}{\Delta t} = v$. Значит, связь между угловой скоростью и модулем линейной скорости выражается формулой

$$\boxed{\omega = \frac{v}{R}}. \qquad (3)$$

Равномерное вращение характеризуют также периодом обращения, который обозначается буквой T. **Он равен времени, за которое тело (материальная точка) совершает один полный оборот по окружности.**

За промежуток времени $\Delta t = T$ радиус-вектор поворачивается на угол $\Delta\varphi = 2\pi$. Значит, согласно формуле (2)

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}. \tag{4}$$

С периодом и угловой скоростью связана *частота вращения*. Ее обычно обозначают греческой буквой ν (ню).

Частота вращения равна отношению числа оборотов N к промежутку времени Δt, за которое они совершены:

$$\nu = \frac{N}{\Delta t}. \tag{5}$$

Из формулы (5) следует: частота вращения равна числу оборотов за единицу времени. Единицей частоты в СИ является *1 оборот в секунду*, или $\frac{1}{\text{с}} = \text{с}^{-1}$.

За промежуток времени, равный периоду ($\Delta t = T$) совершается один оборот: $N = 1$. Тогда согласно формуле (5)

$$\boxed{\nu = \frac{1}{T}}, \tag{6}$$

т. е. частота вращения ν — величина, обратная периоду T.

Из формул (4) и (6) следует связь между угловой скоростью и частотой вращения:

$$\boxed{\omega = 2\pi\nu}. \tag{7}$$

Угловая скорость пропорциональна частоте вращения.

Мы рассмотрели движение материальной точки по окружности. Рассмотрим теперь равномерное вращение тела вокруг неподвижной оси (рис. 90).

Точки, находящиеся на оси, покоятся. Остальные точки тела описывают окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных оси вращения. Углы поворота $\Delta\varphi$ радиус-векторов этих точек за одно и то же время одинаковы. Значит, одинаковы *период* T, *частота* ν и *угловая скорость* ω всех этих точек.

В то же время модули линейных скоростей точек тела различны. Они зависят от расстояния R точки до оси вращения (рис. 90). Согласно формуле (3)

$$\upsilon = \omega R.$$

Модули линейных скоростей точек тела, равномерно вращающегося вокруг неподвижной оси, прямо пропорциональны расстоянию до этой оси.

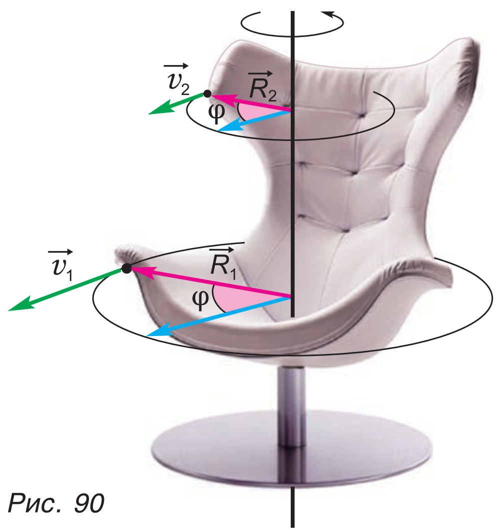

Рис. 90

Главные выводы

1. Угловая скорость вращательного движения численно равна углу поворота радиус-вектора за единицу времени.
2. Единица угловой скорости — 1 радиан в секунду.
3. Частота вращения есть величина, обратная периоду.

Контрольные вопросы

1. Может ли быть постоянной линейная скорость тела при его движении по окружности? Может ли быть постоянным модуль этой скорости? Почему?
2. Какой физический смысл имеет угловая скорость? В каких единицах она измеряется?
3. Как угловая скорость связана с линейной?
4. Как связан период обращения с угловой скоростью? Частотой вращения?
5. Одинаковы ли периоды обращения точек тела, вращающегося вокруг оси? Одинаковы ли линейные скорости этих точек? Почему?

Пример решения задачи

Вал электродвигателя кофемолки совершает $N = 45$ оборотов за время $t = 6{,}0$ с. Определите период, частоту и угловую скорость равномерного вращения вала.

Дано:

$N = 45$

$t = 6{,}0$ с

T — ?

ν — ?

ω — ?

Решение

Частота вращения вала:

$$\nu = \frac{N}{t}; \quad \nu = \frac{45}{6{,}0\ \text{с}} = 7{,}5\ \text{с}^{-1}.$$

Учитывая связь между периодом и частотой, находим:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{7{,}5\ \text{с}^{-1}} = 0{,}13\ \text{с}.$$

Угловая скорость:

$$\omega = 2\pi\nu = 6{,}28\ \text{рад} \cdot 7{,}5\ \text{с}^{-1} = 47\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Ответ: $T = 0{,}13$ с; $\nu = 7{,}5\ \text{с}^{-1}$; $\omega = 47\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

Упражнение 9

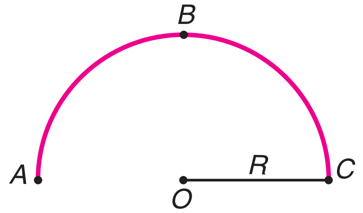

Рис. 91

1. Сколько радиан содержит центральный угол, длина дуги которого равна диаметру окружности? Половине длины окружности?

2. Желоб, изогнутый в виде половины окружности радиусом R, лежит на столе (рис. 91, вид сверху). По желобу из точки A в точку C переместился шарик. Какой путь он прошел? Чему равен модуль перемещения шарика? Изобразите вектор перемещения шарика и линейные скорости шарика в точках A, B и C, считая модуль скорости движения шарика $v = \text{const}$.

3. Используя решение предыдущей задачи, найдите и изобразите векторы: $\Delta\vec{v}_1 = \vec{v}_B - \vec{v}_A$, $\Delta\vec{v}_2 = \vec{v}_C - \vec{v}_B$ и $\Delta\vec{v}_3 = \vec{v}_C - \vec{v}_A$.

4. Чему равно отношение пути к модулю перемещения при движении шарика (рис. 91): а) из точки A в точку B; б) из точки A в точку C? Какой вывод из этих расчетов можно сделать?

5. Определите угловую скорость, частоту вращения и период равномерно вращающегося колеса, если за промежуток времени $\Delta t = 1{,}0$ с оно делает четверть оборота.

6. При равномерном вращении одно колесо за время $t_1 = 8$ с совершает $N_1 = 240$ оборотов, а другое за время $t_2 = 40$ с делает $N_2 = 600$ оборотов. Во сколько раз отличаются их угловые скорости? Их периоды и частоты вращения?

7. Барабан центрифуги для отжима белья вращается равномерно с частотой $\nu = 600\,\frac{1}{\text{мин}}$. Диаметр барабана $d = 40$ см. Определите период и угловую скорость вращения барабана. Найдите модуль линейной скорости точек на его поверхности.

8. Определите периоды, частоты и угловые скорости вращения часовой, минутной и секундной стрелок часов.

9. Определите угловую и линейную скорости обращения Земли вокруг Солнца. Расстояние от Земли до Солнца принять равным $R = 150\,000\,000$ км.